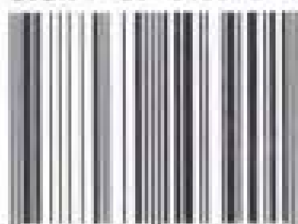
群论习题精解

马中骐　著



科学出版社
www.sciencep.com

(O-1615,0101)
责任编辑：张邦固
整体设计：黄华斌
责任印制：安春生



ISBN 7-03-010390-4/O·1615
定 价：35.00 元

群论习题精解

马中骐 著

科学出版社

2002

内 容 简 介

本书是《物理学中的群论》配套的习题集，主要包括群的基本概念、群的线性表示理论、三维转动群、晶体的对称性、置换群、SU(N)群、SO(N)群和洛伦兹群、李群和李代数.后者是中国科学院研究生教学丛书之一，1998年出版以来，深受读者欢迎，已重印两次.

习题的亲手演算对于掌握群论的理论内容和计算方法都是必不可少的.本书为读者提供了一个好帮手.

本书适合于物理各专业的研究生，亦可供物理工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

群论习题精解/马中骐著. -北京:科学出版社，2002
ISBN 7-03-010390-4

Ⅰ.群…　Ⅱ.马…　Ⅲ.群论　解题　Ⅳ.O152-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第027305号

科学出版社　出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂　印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2002年8月第 一 版　　开本:B5(720×1000)
2002年8月第　次印刷　　印张:23
印数:1—3 000　　字数:425 000

定价: 35.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

前　言

群论是研究系统对称性质的十分有效的数学工具. 随着人类对客观世界的认识逐步深入到微观领域，对称性在现代物理理论中的应用越来越广泛，群论方法也逐渐深入到物理学各个领域，因而近年来群论课已成为物理专业研究生必修的基础课程.

群论本身是一门抽象的代数理论，有它自身的特点和规律性. 但作为一个物理工作者，更关心的是如何把群论方法灵活地运用到实际的物理问题中去. 作者从1962年开始长期担任物理系本科生或研究生的群论教学工作，同时作为理论物理的科研工作者，在科研工作中，从物理学不同角度应用群论方法来研究和处理问题. 总结自己的教学经验和科研心得，也从已有的群论专著和教材中吸取营养，逐渐形成了比较适合物理专业学生学习的群论教学体系，于1998年由科学出版社出版了《物理学中的群论》(下称文献[1])一书，书中并附有适量的习题，供物理专业研究生教学使用. 此书出版四年多来，承蒙广大读者的支持，已再印了两次. 现已有不少高等院校和科研机构采用此书作为物理专业研究生的群论课教材或主要参考书.

在这几年教材的使用过程中，作者收到了不少教师和同学的来信来电，除了表达对作者的鼓励外，也提出了一些中肯的意见. 意见归纳起来有三方面. 一是感到书中有的习题比较难做，或者不容易找到简洁明了的计算方法，希望能看到供参考的习题解法. 二是教材的篇幅较大，不能适应不同情况的教学需要，由于课时的限制，希望有一本简写本，能对物理学中所用群论方法有提纲式的介绍. 三是结合物理科研和教学各种情况的需要，希望能提供一些供查阅的常用资料和表格，以及反映近年在物理学中所应用的群论方法的新发展. 由此萌发出写一本供物理专业用的群论习题精解的想法. 在科学出版社和各位朋友的鼓励和支持下，促成了本习题精解的出版. 当然要想通过一本习题精解完全克服这些缺点是不现实的，也超出了作者的能力所及. 作者只是希望通过本习题精解，在作者比较熟悉的领域内，尽其所能，努力在下面几方面作一些弥补和改进.

首先，习题精解涵盖了文献[1]的全部习题，尽可能采用简单的方法解答这些习题. 在选用文献[1]作为群论教材时，希望习题精解会对教学工作有所帮助. 为便于读者寻找，本习题精解对新增加的习题用星号加以区分. 在文献[1]中包

含的习题，除作为群论方法的基本练习题外，还包括两种类型的题. 一是某些群论定理或方法，让读者知道可能会有好处，由于篇幅有限，放在习题里向读者提示可能更合适. 这类题有的比较简单，有的包含一些小技巧，也有的通过适当的提示是可以证明或计算出来的. 作者原意并不要求读者都会计算或证明这些习题，只是知道这些结论就行. 后来知道有些题使部分读者花费了过多的精力. 现在把它们一一解出来，供读者参考. 二是数学上一些重要结论，它们并不是群论本身的内容，放在教材中花大量篇幅讨论似乎不很合适. 于是就放在习题中告诉读者，其中最典型的是把矩阵化为若尔当标准型(第一章第 15 题，以本习题精解编号为准，下同). 此结论在数学上虽有严格证明，但涉及名词概念太多，容易分散读者学习群论知识的精力. 文献[1]用习题形式向读者告知这结论，本习题精解用物理工作者习惯的语言作了证明. 但作者并不鼓励读者花很大精力去学懂它们，承认其结论对大多数读者已经足够.

其次，本习题精解在各节习题前面，用了相当的篇幅概括主要解题方法，有的加以简单证明，有的只是列出结论，努力去包括物理学中常用群论方法的基本方面. 这些注解一方面为读者做习题提供方便，另一方面也希望为课时较少的群论课程教学提供一个提纲. 后一目的能否达到，作者没有把握，也许考虑尚欠成熟，希望通过实践来加以验证或今后改进.

第三，本习题精解比原教材(文献[1])增加了一些内容. 近年来的教学使作者体会到分导表示和诱导表示的概念在处理某些问题时相当有效，因而在本习题精解的第三章专门设一节作详细的介绍，并在第六章和第七章介绍了有关的应用. 计算可约表示的分解和函数基的重新组合是群论方法在物理学中应用的一个重要方面，本习题精解对此问题给予了较多的关注，在各章都有较大篇幅的介绍和举例，希望能引起读者足够的重视. 置换群是物理学中常见的一个有限群，在第六章不仅介绍了主要计算方法，也列出了若干计算结果供查阅，如第 6，7，8，31 题. 文献[1]第二章和第三章列举了正二十面体及其对称群的一些重要性质，这些内容本来是供查阅用的，书中对具体计算方法介绍不够，本习题精解在第四章第 5，6，12 题作了补充. 有限群群空间不可约基的计算，实际上提供了一类投影算符，可以很快地把波函数组合成属不可约表示的函数基. 在文献[1]第三章有过介绍，本习题精解除在第三章给出计算的例子外，还在第六章第 22～25 题把此方法应用于甲烷分子对称基的计算. 这方法已在物理中找到实际应用，具体可参看文献[21～23,43,56,58]. 非紧致李群的无穷维幺正表示也是物理学中群论方法的一个应用方向，在文献[1]把这方面完全略去了. 本习题精解在第四章第 24 题就一个最简单的例子作了认真的分析，其方法有普遍意义. 第八章第三节介绍洛伦兹群的一些性质，也是对文献[1]的补充. 量子少体系统转动自由度的分离是量子物理中的一个基本问题，从量子力学创始之初就得到大师们的关注

(见文献[26,76,41]),以后不断有新的改进(见文献[14,60,9,10]),近年来引入了新的方法(见文献[36,37]),其中充分运用了群论工具.第九章第三节把这问题当作一个群论应用的例子作了介绍.

由于作者对物理学中应用的群论方法的理解不可避免地具有局限性,对群论习题精解的编写也缺乏经验,题目和方法的选择明显表现出偏向于作者熟悉的领域,引文肯定存在挂一漏万的现象.限于作者的水平和写作时间,本习题精解只能作为一种尝试,希望能起到抛砖引玉的作用.作者对书中可能出现的错误事先向读者致以深深的谦意,诚恳欢迎读者的各种批评和指正.

本书编写过程中有关的科研工作得到国家自然科学基金的资助。

马中骐
高能物理研究所
2002 年于北京

目　录

第一章　线性代数复习

一、矩阵的本征值和本征矢量

★　m 维矩阵 R 的本征值 λ 和本征矢量 $\boldsymbol{a}$ 满足

$$R\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a}, \tag{1.1}$$

这是关于本征矢量分量 a_μ 的联立线性齐次方程，方程有非零解的充要条件是方程的系数行列式为零

$$\det(R - \lambda \mathbf{1}) = \begin{vmatrix} R_{11} - \lambda & R_{12} & \cdots & R_{1m} \\ R_{21} & R_{22} - \lambda & \cdots & R_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{m1} & R_{m2} & \cdots & R_{mm} - \lambda \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

$$= (-\lambda)^m + (-\lambda)^{m-1}\mathrm{tr}R + \cdots - \det R = 0.$$

其中 $\mathrm{tr}R$ 是矩阵的迹，即矩阵对角元之和，$\det R$ 是矩阵的行列式. 方程(1.2)称为矩阵的久期方程，它是关于 λ 的 m 次代数方程，包括重根共有 m 个复根. 这些根就是矩阵的本征值. 对于每一个给定的本征值 λ，由本征方程(1.1)，至少可解得一个本征矢量 $\boldsymbol{a}$. 本征矢量包含有一个可乘的非零常数因子.

如果本征值 λ 是 n 重根，由本征方程(1.1)不一定可算出 n 个线性无关的本征矢量. 如果矩阵 R 的 m 个行(或列)矢量中只有 r 个是线性无关的，则称矩阵 R 的秩为 r. 若矩阵 $(R - \lambda\mathbf{1})$ 的秩为 r，则由久期方程可找到 $(m - r)$ 个线性无关的本征矢量. 对应同一本征值的本征矢量之任意线性组合都是对应此本征值的本征矢量. 零矢量是任何矩阵的平庸的本征矢量，我们只讨论非平庸的本征矢量.

对于维数较低的矩阵，或包含较多零矩阵元素的矩阵，本征值和本征矢量有时可以根据经验猜出来，或由计算和猜测相结合得到，只要猜出的本征值和本征矢量满足本征方程(1.1)，它们就是正确的结果. 另一方面，即使是计算得的结果，也应该代入方程(1.1)进行验算.

★　$R^\dagger = R$ 的矩阵称为厄米矩阵，$R^\dagger = R^{-1}$ 的矩阵称为幺正矩阵. 实的厄米矩阵是实对称矩阵，实的幺正矩阵是实正交矩阵. 本征值都是正数的矩阵称为正定的

矩阵，不包含负本征值的矩阵称为半正定的矩阵. 同样可定义负定或半负定的矩阵.

1. 证明矩阵的本征值之和等于矩阵迹，本征值之积等于矩阵行列式.

证 对于一个 m 维矩阵 R，久期方程是一个 m 次代数方程，它的包括重根在内的 m 个复根 λ_j，就是矩阵 R 的本征值. 因此久期方程又可以表为

$$\begin{aligned}\det(R-\lambda\mathbf{1}) &= \prod_{j=1}^{m}(\lambda_j-\lambda)\\ &= (-\lambda)^m+(-\lambda)^{m-1}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j+\cdots+\prod_{j=1}^{m}\lambda_j=0.\end{aligned}$$

与(1.2)式比较，得 R 矩阵的矩阵迹等于本征值之和，R 矩阵的行列式等于本征值之积. 证完.

2. 计算泡利矩阵 σ_1 和 σ_2 的本征值和本征矢量

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\\ \mathrm{i}&0\end{pmatrix}.$$

解 σ_1 矩阵对矢量的作用是把矢量上下两个分量交换，如果矢量的两分量相等，则它是 σ_1 矩阵的本征值为 1 的本征矢量，如果矢量的两分量互差负号，则它是 σ_1 矩阵的本征值为 -1 的本征矢量，

$$\sigma_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\quad \sigma_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

同理可知，如果矢量的两分量相差 $\pm\mathrm{i}$，则它是 σ_2 矩阵的本征矢量：

$$\sigma_2\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix},\quad \sigma_2\begin{pmatrix}1\\-\mathrm{i}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\-\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

当矩阵 R 包含许多零矩阵元素时，有时会以直和或直积形式包含着 σ_1 或 σ_2 矩阵，此时 R 矩阵的某些本征值和本征矢量可以利用上面结果猜出来. 所谓矩阵 R 以直和形式包含一个二维子矩阵是指在给定的 a 和 b 行(列)，有 $R_{ac}=R_{ca}=R_{bc}=R_{cb}=0$，其中 c 是所有不等于 a 和 b 的行(列)指标.

3. 计算下面 R 矩阵的本征值和本征矢量

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解　矩阵 R 可以看成两个子矩阵 σ_1 的直和，其中一个子矩阵处在第一和第四行(列)，另一个子矩阵处在第二和第三行(列). 根据上题的计算结果知，R 矩阵有两个本征值为 1，另两个本征值为 -1，对应的本征矢量分别为

$$1:\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\qquad -1:\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. 计算下面 R 矩阵的本征值和本征矢量

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

解　这是 σ_1 矩阵的推广，它对矢量的作用是把矢量的三个分量顺序变换，变换三次则恢复原状，即 $R^3 = \mathbf{1}$，因此 R 矩阵的本征值为 1，$\omega = \exp\{-i2\pi/3\}$ 和 ω^2，本征矢量两个相邻分量之比为本征值. 下面依次列出各本征值对应的本征矢量：

$$1:\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \omega:\begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix},\qquad \omega^2:\begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}.$$

5. 若 $\det R \neq 0$，证明 $R^\dagger R$ 和 $RR^\dagger$ 都是正定的厄米矩阵.

解　显然，$R^\dagger R$ 和 $RR^\dagger$ 是厄米矩阵. 设 λ 和 $\boldsymbol{a}$ 是 $R^\dagger R$ 的本征值和非零的本征矢量，

$$(R^\dagger R)\boldsymbol{a} = \lambda\,\boldsymbol{a},\qquad \boldsymbol{a}^\dagger\,\boldsymbol{a} > 0,$$

则

$$\lambda\{\boldsymbol{a}^{\dagger}\boldsymbol{a}\} = \boldsymbol{a}^{\dagger}(R^{\dagger}R)\ \boldsymbol{a} = (R\boldsymbol{a})^{\dagger}(R\boldsymbol{a}) \geqslant 0\ ,$$

即 $\lambda \geqslant 0$. 由于 $\det R \neq 0$, $\det(R^{\dagger}R) \neq 0$, 则本征值 λ 不为零, 因此 $(R^{\dagger}R)$ 是正定的. 把 $R^{\dagger}$ 看成新的 R, 同样可证 $RR^{\dagger}$ 是正定的.

6. 证明: (1) 若 $R^{\dagger}R = \mathbf{1}$, 则 $RR^{\dagger} = \mathbf{1}$;

(2) 若 $R^{-1}R = \mathbf{1}$, 则 $RR^{-1} = \mathbf{1}$;

(3) 若 $R^{T}R = \mathbf{1}$, 则 $RR^{T} = \mathbf{1}$.

证 三个小题的证法完全相同, 这里以小题(1)为例来证明.

由于 $R^{\dagger}R = \mathbf{1}$, $R^{\dagger}$ 是非奇的. 设 S 是 $R^{\dagger}$ 的逆矩阵, $SR^{\dagger} = 1$, 于是有 $RR^{\dagger} = (SR^{\dagger})RR^{\dagger} = S(R^{\dagger}R)R^{\dagger} = SR^{\dagger} = 1$. 把第一小题中的 $R^{\dagger}$ 换成 R^{-1} 或 R^{T}, 同样可证明后两个小题.

7. 试讨论 2×2 幺正矩阵, 实正交矩阵和厄米矩阵各含有多少个独立实参数, 并写出它们的一般表达式.

解 2×2 复矩阵包含四个复参数, 即八个实参数. 对幺正矩阵, 两个列矩阵的归一条件给出参数的两个实条件, 列矩阵正交给出一个复条件, 即两个实条件, 共四个实条件, 因此 2×2 幺正矩阵包含四个独立实参数. 对厄米矩阵, 对角元是实数, 即它们的虚部为零, 给出两个实条件, 一对非对角元互为复共轭, 给出一个复条件, 因此 2×2 厄米矩阵也包含四个独立实参数.

2×2 实矩阵包含四个实参数. 对实正交矩阵, 两个列矩阵的归一条件给出参数的两个实条件, 列矩阵正交给出一个实条件, 共三个实条件, 因此 2×2 实正交矩阵只包含一个独立实参数.

取任意 2×2 幺正矩阵 u, 行列式为 $\det u = \exp\{i\varphi\}$, 提出因子 $\exp\{i\varphi/2\}$, 得

$$u = e^{i\varphi/2}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

根据定义,

$$aa^{*} + bb^{*} = cc^{*} + dd^{*} = 1, \quad ac^{*} + bd^{*} = 0, \quad ad - bc = 1.$$

由此得

$$a = a(cc^{*} + dd^{*}) = d^{*}(-bc + ad) = d^{*},$$

$$b = b(cc^{*} + dd^{*}) = c^{*}(bc - ad) = -c^{*}.$$

因此,2×2 幺正矩阵的一般形式为

$$u = e^{i\varphi/2}\begin{pmatrix} a & -b^* \\ b & a^* \end{pmatrix}, \quad aa^* + bb^* = 1.$$

其中受限制的复参数 a 和 b 包含三个实参数,加上 φ,共四个独立实参数.

实正交矩阵也是幺正矩阵,行列式可等于 ±1. 当行列式为 1 时, a 和 b 取实数,满足条件 $a^2+b^2=1$,常取 $a=\cos\theta$, $b=\sin\theta$. 当行列式为 −1 时,常把第一行矩阵元素改号,得 2×2 实正交矩阵的一般形式为

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad 或 \quad R' = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

2×2 厄米矩阵的一般形式为

$$R = \begin{pmatrix} a & c+id \\ c-id & b \end{pmatrix},$$

其中 a,b,c 和 d 都是独立实参数.

二、相似变换和矩阵的对角化

★　在 m 维空间 $\mathscr{L}$ 中,选定基 $\boldsymbol{e}_\mu$ 后,任何矢量 $\boldsymbol{a}$ 可按基展开,

$$\boldsymbol{a} = \sum_{\mu=1}^{m} \boldsymbol{e}_\mu a_\mu . \tag{1.3}$$

a_μ 称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 关于基 $\boldsymbol{e}_\mu$ 的分量,把这些分量排成 m 行一列的列矩阵 $\underline{a}$,称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 关于基 $\boldsymbol{e}_\mu$ 的列矩阵形式.

★　设 m 维空间 $\mathscr{L}$ 对算符 R 保持不变,则算符 R 作用在基 $\boldsymbol{e}_\mu$ 上得到基的线性组合,

$$R\boldsymbol{e}_\mu = \sum_{\nu=1}^{m} \boldsymbol{e}_\nu D_{\nu\mu}(R). \tag{1.4}$$

组合系数 $D_{\nu\mu}(R)$ 排列起来得到的 $m\times m$ 矩阵 $D(R)$ 称为算符 R 关于基 $\boldsymbol{e}_\mu$ 的矩阵形式.

★　选择一组新基 $\boldsymbol{e}'_\nu$,把它们在原基 $\boldsymbol{e}_\mu$ 中的列矩阵形式,作为列矩阵排列成 S 矩阵:

$$\boldsymbol{e}'_\nu = \sum_{\mu=1}^{m} \boldsymbol{e}_\mu S_{\mu\nu} . \tag{1.5}$$

此 S 矩阵称为两组基间的变换矩阵，它是 m 维非奇矩阵．关于新基 e'_{ν}，矢量 $\boldsymbol{a}$ 的列矩阵形式和算符 R 的矩阵形式分别为

$$\boldsymbol{a} = \sum_{\mu=1}^{m} \boldsymbol{e}'_{\mu} a'_{\mu}, \quad R\boldsymbol{e}'_{\nu} = \sum_{\rho=1}^{m} \boldsymbol{e}'_{\rho} D_{\rho\nu}(R), \tag{1.6}$$

它们与关于原基的矩阵形式间的联系为

$$\boldsymbol{a}' = S^{-1}\boldsymbol{a}, \quad \bar{D}(R) = S^{-1}D(R)S. \tag{1.7}$$

通常称"$D(R)$矩阵经过相似变换 S 变成 $\bar{D}(R)$矩阵"，有的书上把 $D(R)$矩阵和 $\bar{D}(R)$矩阵称为等价的矩阵，它们是同一个算符关于不同基的矩阵形式．由相似变换相联系的矩阵有共同的本征值．

把相似变换关系写成矩阵元素形式：

$$\sum_{\rho=1}^{m} D_{\mu\rho}(R) S_{\rho\nu} = \sum_{\rho=1}^{m} S_{\mu\rho} \bar{D}_{\rho\nu}(R), \quad D(R)S_{\cdot\nu} = \sum_{\rho=1}^{m} S_{\cdot\rho} \bar{D}_{\rho\nu}(R). \tag{1.8}$$

因为 S 矩阵的列矩阵正是新基在原来基中的列矩阵形式，而(1.8)式中的 $\bar{D}_{\rho\nu}(R)$ 是作为组合系数出现的，所以(1.8)式是(1.6)式在原来基 $\boldsymbol{e}_{\mu}$ 中的矩阵形式．这形式在以后的计算中非常有用．

★　如果 S 矩阵的第一列是 $D(R)$矩阵的本征值为 λ_1 的本征矢量，则 $\bar{D}(R)$的第一列只有第一个分量等于 λ_1，其余分量都为零．如果 S 矩阵的所有列矩阵都是 $D(R)$矩阵的线性无关的本征矢量，则 $\bar{D}(R)$矩阵是对角矩阵，对角元依次是各本征矢量对应的本征值．这就是矩阵通过相似变换对角化的本质．

把 m 维 $D(R)$矩阵对角化的充要条件是 $D(R)$矩阵存在 m 个线性无关的本征矢量．把 $D(R)$矩阵对角化的相似变换矩阵 S 的各列矩阵正是 $D(R)$矩阵的线性无关的本征矢量．这样的 S 矩阵并没有完全确定，它允许右乘一个与对角化的 $\bar{D}(R)$矩阵相对易的矩阵 X．如果 $D(R)$矩阵的 m 个本征值互不相同，则 X 矩阵是对角矩阵，它的存在说明每个本征矢量允许乘一个任意常数．如果 $D(R)$矩阵各本征值 λ_j 的重数分别为 n_j，$\sum_j n_j = m$，则 X 矩阵是方块矩阵，包含 $\sum_j n_j^2$ 个任意常数，这些常数表明，对应同一本征值的本征矢量之间允许作任意线性组合．

★　m 维幺正矩阵和厄米矩阵都存在 m 个正交归一的本征矢量，因此它们可通过幺正的相似变换对角化．m 维实对称矩阵（也是厄米矩阵）存在 m 个正交归一的实本征矢量，因此可通过实正交相似变换对角化．但 m 维实正交矩阵（也是幺正矩阵）不一定可以通过实正交相似变换对角化．

8. 找相似变换把下列矩阵对角化：

$$(1)\ \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix};\quad (2)\ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

解　设题中给出的矩阵为 $D(R)$.

(1) 矩阵 $D(R)$ 的久期方程为

$$-\lambda^3+2\lambda^2-4\lambda+8=(2-\lambda)(\lambda^2+4)=0,$$

解得本征值为 2，2i 和 −2i. 注意到 $D(R)/2$ 矩阵是实正交矩阵，它的三个本征矢量是互相正交的. 由 $D(R)$ 矩阵的第二行可以看出，若本征矢量的第一和第三分量相等，第二分量为零，则在 $D(R)$ 矩阵作用后，第二分量保持为零. 再由 $D(R)$ 矩阵的第一和第三行知，它正是 $D(R)$ 矩阵的本征值为 2 的本征矢量，它的转置为 $(1,0,1)$. 根据正交性，其他两个本征矢量的转置取 $(1,a,-1)$ 的形式，代入本征方程

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}=\pm 2\mathrm{i}\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix},$$

解得 $a=\mp \mathrm{i}\sqrt{2}$. 归一化后得

$$X^{-1}D(R)X=\begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\mathrm{i} \end{pmatrix},\quad X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\mathrm{i}\sqrt{2} & 0 & \mathrm{i}\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) 矩阵 $D(R)$ 的久期方程为

$$\lambda^2-2(\cos\theta)\lambda+1=(\lambda-e^{\mathrm{i}\theta})(\lambda-e^{-\mathrm{i}\theta})=0,$$

解得本征值为 $\exp(\pm\mathrm{i}\theta)$. 代入本征方程，

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}=e^{\pm\mathrm{i}\theta}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix},$$

解得 $a=\mp\mathrm{i}$. 归一化后得

$$X^{-1}D(R)X = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \quad X = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}.$$

9. 找相似变换矩阵 M 使

$$M^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -\cos\theta & \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta\cos\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 设相似变换前的矩阵为 $D(R)$，相似变换后的矩阵为 $\bar{D}(R) = M^{-1}D(R)M$. $\bar{D}(R)$矩阵是 $-i\sigma_2$ 和 0 的直和，故可与下面矩阵对易

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

因此，若 M 矩阵满足式 $M^{-1}D(R)M = \bar{D}(R)$，则 MX 矩阵也满足此式，其中 X 中的参数反映了相似变换 M 的不完全确定性.

由 $\bar{D}(R)$矩阵的形式可知，$D(R)$矩阵的本征值是 0 和 $\pm i$，而 M 矩阵的第三列正是对应零本征值的本征矢量，前两列则是对应本征值为 $\pm i$ 的本征矢量之线性组合. 先计算 $D(R)$的零本征值的本征矢量. 取本征矢量的第三个分量为 $\cos\theta$，由 $D(R)$矩阵的前两行知，本征矢量的前两个分量分别为 $\sin\theta\cos\varphi$ 和 $\sin\theta\sin\varphi$. 这相当选择了参数 γ. 令

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \sin\theta\cos\varphi \\ b_1 & b_2 & \sin\theta\sin\varphi \\ c_1 & c_2 & \cos\theta \end{pmatrix},$$

代入

$$D(R)M = M\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & -a_1 & 0 \\ b_2 & -b_1 & 0 \\ c_2 & -c_1 & 0 \end{pmatrix},$$

得

$$
\begin{aligned}
a_2 &= -b_1\cos\theta + c_1\sin\theta\sin\varphi,\\
b_2 &= a_1\cos\theta - c_1\sin\theta\cos\varphi,\\
c_2 &= -a_1\sin\theta\sin\varphi + b_1\sin\theta\cos\varphi,\\
-a_1 &= -b_2\cos\theta + c_2\sin\theta\sin\varphi,\\
-b_1 &= a_2\cos\theta - c_2\sin\theta\cos\varphi,\\
-c_1 &= -a_2\sin\theta\sin\varphi + b_2\sin\theta\cos\varphi.
\end{aligned}
$$

把前三式代入后三式,或后三式代入前三式,得

$$
\begin{aligned}
a_1\sin\theta\cos\varphi + b_1\sin\theta\sin\varphi + c_1\cos\theta &= 0,\\
a_2\sin\theta\cos\varphi + b_2\sin\theta\sin\varphi + c_2\cos\theta &= 0.
\end{aligned}
$$

这两个关系说明 M 矩阵的前两列与第三列正交. 这是 $D(R)$矩阵的反对称性所决定的,因为若 $D(R)\underline{\boldsymbol{a}}=\lambda\underline{\boldsymbol{a}}\neq 0$, $D(R)\underline{\boldsymbol{b}}=0$,则 $\underline{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}D(R)=0$,

$$
0 = \underline{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}D(R)\underline{\boldsymbol{a}} = \lambda\underline{\boldsymbol{b}}^{\mathrm{T}}\underline{\boldsymbol{a}}
$$

现在为方便起见,选择 $c_1=-\sin\theta$,则由上式可得一组特解: $a_1=\cos\theta\cos\varphi$ 和 $b_1=\cos\theta\sin\varphi$. 这相当对参数 α 和 β 的一种选择. 再由前面公式可解得 $a_2=-\sin\varphi$, $b_2=\cos\varphi$和$c_2=0$. 最后得 M 是一个实正交矩阵:

$$
M = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi & \sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.
$$

10. 找相似变换矩阵 M 使

$$
M^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},
$$

$$
M^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$M^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0 & \mathrm{i}\\ 0 & 0 & 0\\ -\mathrm{i} & 0 & 0\end{pmatrix}M=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

解　第一式是一个把矩阵对角化的相似变换关系，相似变换前的矩阵的三个本征矢量，构成了 M 矩阵的三个列矩阵. 为了满足后两个公式，本征矢量必须保留可乘因子，即 M 矩阵可取为

$$M=\begin{pmatrix}a & 0 & c\\ \mathrm{i}a & 0 & -\mathrm{i}c\\ 0 & b & 0\end{pmatrix}.$$

可以取 $b=1$，这相当对相似变换的可乘因子的一种选择. 代入第二式，为了避免计算 M^{-1} 矩阵，可先把 M^{-1} 移到等式右面去，得

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -\mathrm{i} & 0\\ -a & 0 & c\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & a+c & 0\\ 0 & \mathrm{i}(a-c) & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

解得 $a=-c=-\sqrt{1/2}$，

$$M=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i}\\ 0 & \sqrt{2} & 0\end{pmatrix}.$$

经过检验，它确实也满足第三式.

11.　设

$$R=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad S=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}.$$

找相似变换矩阵 X 使

$$X^{-1}(R\times R)X=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},$$

$$X^{-1}(S\times S)X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-1&-\sqrt{3}\\0&0&\sqrt{3}&-1\end{pmatrix}.$$

解　根据矩阵直乘的定义，

$$R\times R=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad S\times S=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&\sqrt{3}&\sqrt{3}&3\\-\sqrt{3}&1&-3&\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&-3&1&\sqrt{3}\\3&-\sqrt{3}&-\sqrt{3}&1\end{pmatrix}.$$

$R\times R$ 已经是对角矩阵，容易看出，它的本征值为 1 和 -1 的本征矢量分别为

$$+1:\begin{pmatrix}a\\0\\0\\b\end{pmatrix},\qquad -1:\begin{pmatrix}0\\c\\d\\0\end{pmatrix},$$

因此 X 矩阵取如下形式

$$\begin{pmatrix}a&0&a'&0\\0&c&0&c'\\0&d&0&d'\\b&0&b'&0\end{pmatrix}.$$

在代入第二式前，先把 X^{-1} 矩阵移到等式的右面，得

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} a+3b & \sqrt{3}(c+d) & a'+3b' & \sqrt{3}(c'+d') \\ -\sqrt{3}(a-b) & c-3d & -\sqrt{3}(a'-b') & c'-3d' \\ -\sqrt{3}(a-b) & -3c+d & -\sqrt{3}(a'-b') & -3c'+d' \\ 3a+b & -\sqrt{3}(c+d) & 3a'+b' & -\sqrt{3}(c'+d') \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a & 0 & -a' & -\sqrt{3}a' \\ 0 & 2c & \sqrt{3}c' & -c' \\ 0 & 2d & \sqrt{3}d' & -d' \\ 2b & 0 & -b' & -\sqrt{3}b' \end{pmatrix}.$$

解得 $a=b$，$c=-d$ 和 $c'=d'=-a'=b'$. 由于相似变换的不完全确定性，可选 $a=c=c'=\sqrt{1/2}$，得

$$X=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. 找使下面三矩阵同时对角化的公共相似变换矩阵 X，

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&1&1 \\ 1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

解 前两个矩阵都是方块矩阵，除了行列排列的区别外，它们都是三个 σ_1 矩阵的直和，第一个矩阵中，子矩阵涉及的行列是(1,4)，(2,5)和(3,6)，而对第二个矩阵

则为(1,4),(2,6)和(3,5).因此,两矩阵各有三个本征值为 1,三个本征值为 -1.两个矩阵的本征矢量分别为

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ -a' \\ -b' \\ -c' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \\ d \\ f \\ e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d' \\ e' \\ f' \\ -d' \\ -f' \\ -e' \end{pmatrix}.$$

$$1 \qquad -1 \qquad 1 \qquad -1$$

第三个矩阵的本征方程为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+t+u \\ s+t+u \\ s+t+u \\ p+q+r \\ p+q+r \\ p+q+r \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \\ t \\ u \end{pmatrix}.$$

除了本征值为零的情况外,前三个分量必须相等,后三个分量也必须相等,因此本征值是 ± 3. 相应的本征矢量是

$$+3: \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad -3: \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

这两个矢量也是前两个矩阵的本征矢量,本征值为 1 和 -1. 在余下的子空间中,第

三个矩阵的本征值都是零，而前两个矩阵的本征值分别是 ±1. 适当排列后，得相似变换矩阵为

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 & 0 & 0 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -1 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -1 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2 & 0 & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -1 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -1 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix},$$

经过此相似变换，三个矩阵都变成对角矩阵，列举如下：

$$\mathrm{diag}\{1, -1, 1, 1, -1, -1\},$$

$$\mathrm{diag}\{1, -1, 1, -1, 1, -1\},$$

$$\mathrm{diag}\{3, -3, 0, 0, 0, 0\}.$$

13. 写出 m 行 m 列既幺正又厄米矩阵的一般形式.

解 幺正矩阵和厄米矩阵都可以通过幺正的相似变换对角化，对角化后，幺正矩阵对角元的模为 1，而厄米矩阵的对角元为实数. 因此，既幺正又厄米的矩阵经过幺正的相似变换对角化后，对角元只能取 ±1. 适当排列后记作 Γ_n，它是对角矩阵，前 n 个对角元为 1，后 $m-n$ 个对角元为 -1. 因此既幺正又厄米的矩阵一般可表为 $U\Gamma_n U^{-1}$，其中 U 矩阵是行列式为 1 的幺正矩阵.

14. 证明若 R 和 $R^{\dagger}$ 乘积可以对易，则 R 和 $R^{\dagger}$ 可通过共同的幺正相似变换对角化. 进一步再证明矩阵 R 能通过幺正相似变换对角化的充要条件是 R 和 $R^{\dagger}$ 乘积可以对易.

证 本题第一部分的证明，与证明幺正或厄米矩阵能通过幺正的相似变换对角化的方法很类似. 取 R 矩阵的任一本征值 λ_1 和相应归一化的本征矢量 $S_1^{(1)}$，以 $S_1^{(1)}$ 为第一个列矩阵，找一组完备的正交归一的列矩阵，把它们排列起来构成幺正矩阵 $S^{(1)}$. 经过 $S^{(1)}$ 相似变换，$(S^{(1)})^{-1}R^{\dagger}(S^{(1)})$ 和 $(S^{(1)})^{-1}RS^{(1)}$ 仍互为转置共轭矩阵，且仍互相对易. 因为

$$(S^{(1)})^{-1}RS^{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & r_2 & \cdots & r_m \\ 0 & & & \\ \vdots & & R^{(1)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \{(S^{(1)})^{-1}R^{\dagger}S^{(1)}\}^{\dagger},$$

两矩阵的两种次序的乘积得到的第一行第一列矩阵元素应该相等

$$|\lambda_1|^2 = |\lambda_1|^2 + \sum_{n=2}^{m} |r_n|^2.$$

可见所有 r_n 都等于零.余下的子矩阵 $R^{(1)}$ 仍与 $(R^{(1)})^{\dagger}$ 对易,可以重复前面的步骤,通过一系列的幺正相似变换把 R 和 $R^{\dagger}$ 同时对角化.

反之,若 R 可以通过幺正相似变换 S 对角化,则 $R^{\dagger}$ 也可以通过 S 相似变换对角化,因对角矩阵互相对易,得出对角化前的矩阵 R 和 $R^{\dagger}$ 也可对易.证完.

15. 证明任何矩阵都可通过相似变换化为若尔当(Jordan)标准型的直和,若尔当标准型是

$$R_{a,b} = \begin{cases} \lambda, & \text{当 } a = b \\ 0 \text{ 或 } 1, & \text{当 } a + 1 = b \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

证 我们已经知道,对久期方程解得的每一个本征值,至少可以找到一个本征矢量与它相对应,但当有重本征值出现时,不一定能找到与重数相同个数的线性无关的本征矢量.若 R 矩阵存在 m 个线性无关的本征矢量,把它们作为列矩阵排列起来,就得到能把 R 矩阵对角化的相似变换矩阵.现在我们需要研究的是当久期方程存在重根,又找不到与重数相同个数的线性无关的本征矢量的情况.下面分三步来证明.第一步证明,任何矩阵 R 都可通过相似变换化为上三角矩阵,矩阵的对角元就是本征值,而且相同的本征值排在一起,第二步证明,可进一步通过相似变换,把 R 矩阵化为方块矩阵,其中每一个子矩阵都只与一个确定的本征值相联系.换言之,如果一个非对角元,它所在的行和列的对角元(本征值)不相同,则可通过相似变换把它化为零.第三步证明,每一个与确定本征值相联系的子矩阵可通过相似变换化为若尔当标准型.因此任何矩阵都可通过相似变换化成若干个若尔当型矩阵的直和.

第一步,用数学归纳法来证明.对一维矩阵,此性质显然满足.现在假设此性质对任意 $n \leqslant m-1$ 维矩阵都成立,要证此性质对 m 维矩阵 R 也成立.设 R 矩阵有 d 个不同的本征值 λ_j,重数分别为 n_j,

$$\sum_{j=1}^{d} n_j = m.$$

对本征值 λ_1，找一个本征矢量 $S_{\cdot 1}$，以 $S_{\cdot 1}$ 为第一个矢量基，任选 m 个线性无关的矢量，构成一组完备的矢量基，把它们作为列矩阵排列起来构成 m 维矩阵 S，则 S 矩阵是非奇的. 经过 S 相似变换，R 矩阵变成 $R'=S^{-1}RS$，它的第一列中，第一个分量是 λ_1，其余分量为零，去掉 R' 矩阵的第一行和第一列后，就得到 R' 矩阵的一个 $(m-1)$ 维子矩阵 A. A 矩阵的久期方程解与 R 矩阵的久期方程解相比较，只是根 λ_1 的重数减少 1. 作为一个 $(m-1)$ 维矩阵 A，按假设，它可通过 $(m-1)$ 维的相似变换 X 化为上三角矩阵 $A'=X^{-1}AX$. 矩阵的对角元依次是 (n_1-1) 个 λ_1，n_2 个 λ_2，直至 n_d 个 λ_d. 设 m 维矩阵 T 是数 1 和 X 矩阵的直和，数 1 处于第一行第一列. 让 R' 矩阵作 T 相似变换，$R''=T^{-1}R'T$，则 R'' 矩阵的第一列只有对角元是 λ_1，其余矩阵元素为零，第一行其他矩阵元素可能发生了变化，后 $(m-1)$ 行列的子矩阵 A 则变成了 A'. 因此，R'' 矩阵是上三角矩阵，对角线下方的矩阵元素全为零，对角元顺序为 n_1 个 λ_1，n_2 个 λ_2 等. 证完第一步.

为了叙述方便，把相似变换后的矩阵仍记作 R，行和列都用两个指标 (ja) 标记，$1\leqslant j\leqslant d$，$1\leqslant a\leqslant n_j$：

$$R_{ja,kb}=\begin{cases}0, & 当\ j>k\\ 0, & 当\ j=k\ 和\ a>b\\ \lambda_j, & 当\ j=k\ 和\ a=b\\ R_{ja,kb}, & 其他.\end{cases}$$

第二步，对 $j<k$，要找相似变换 X，把所有 $R_{ja,kb}$ 都化为零. 取 $S^{(ab)}$ 矩阵，它的对角元都为 1，非对角元中只有 $S^{(ab)}_{ja,kb}=\omega$，其余都为零. 它的逆矩阵只是把 ω 改为 $-\omega$，记作 $T^{(ab)}$. 经过此相似变换，$R'=T^{(ab)}RS^{(ab)}$，R 矩阵中只有如下矩阵元素发生变化，其余保持不变：

$$R'_{ja,kb}=R_{ja,kb}+R_{ja,ja}S^{(ab)}_{ja,kb}+T^{(ab)}_{ja,kb}R_{kb,kb}=R_{ja,kb}+\omega(\lambda_j-\lambda_k),$$

$$R'_{ja,k'b'}=R_{ja,k'b'}+T^{(ab)}_{ja,kb}R_{kb,k'b'}=R_{ja,k'b'}-\omega R_{kb,k'b'},\qquad 当\ k\leqslant k',b<b',$$

$$R'_{j'a',kb}=R_{j'a',kb}+R_{j'a',ja}S^{(ab)}_{ja,kb}=R_{j'a',kb}+\omega R_{j'a',ja},\qquad 当\ j'\leqslant j,a'<a,$$

选

$$\omega = \frac{-R_{ja,kb}}{\lambda_j - \lambda_k},$$

得 $R'_{ja,kb}=0$. 现在由 $j=1,k=2,b=1$ 和 $a=n_1$ 开始,按 a 减少的次序,分别选择 $S^{(ab)}$ 及其 ω,逐个把 $R_{1a,21}$ 化为零. 然后随 b 增加,对每一列 $2b$ 按 a 减少的次序,分别选择 $S^{(ab)}$ 及其 ω,逐个把所有的 $R_{1a,2b}$ 化为零. 用此方法,固定 $j=1$,让 k 逐渐增加,使所有 $R_{1a,kb}=0$,再让 j 逐渐增加,使所有 $R_{ja,kb}=0$. 证完第二步.

这样,通过一系列的相似变换,把 R 矩阵化为方块矩阵,每一个子矩阵又都是上三角矩阵,即

$$R_{ja,kb} = \begin{cases} 0, & \text{当 } j \neq k \\ 0, & \text{当 } j = k \text{ 和 } a > b \\ \lambda_j, & \text{当 } j = k \text{ 和 } a = b \\ R_{ja,jb}, & \text{当 } j = k \text{ 和 } a < b. \end{cases}$$

第三步,既然 R 矩阵已经简化为方块矩阵,R 矩阵的化简问题可以简化为把每一个子矩阵化为若尔当标准型的问题. 设有 n 维矩阵 R,它的久期方程有 n 个相同的根 λ. 又设矩阵 $(R-\lambda\mathbf{1})$ 的秩是 $(n-t)$,即它的 n 个行矩阵中,线性无关的只有 $(n-t)$ 个,因而 R 矩阵存在 t 个线性无关的本征矢量. 把这 t 个线性无关的本征矢量作为前 t 个列矩阵,补上线性无关的 $(n-t)$ 个列矩阵,组成非奇的矩阵 X,经此相似变换 X,R 矩阵的前 t 列,只有对角元为 λ,其余分量都为零. 再按第一步证过的结论,对右下角的 $(n-t)$ 维子矩阵作相似变换,把它化为上三角矩阵,则 R 矩阵也化为上三角矩阵,且保持前 t 列只有对角元不为零,等于 λ. 因此,问题就简化为,用相似变换把如下 n 维梯形 R 矩阵化为若尔当标准型的问题:

$$R = \begin{pmatrix} A & T \\ 0 & S \end{pmatrix},$$

其中 A 是 $t\times t$ 常数矩阵,$A=\lambda\mathbf{1}$,行列指标用前几个小写拉丁字母标记,$a=1,2,\cdots,t$,S 是 $(n-t)\times(n-t)$ 上三角矩阵,对角元是 λ,行列指标用中间的小写拉丁字母标记,$j=(t+1),(t+2),\cdots,n$,T 是 $t\times(n-t)$ 矩阵,行指标用 a 标记,列指标用 j 标记. R 矩阵的行列指标用 α 标记,$\alpha=1,2,\cdots,n$. 用公式表达,

$$\Lambda_{ab} = \lambda\delta_{ab}, \qquad T\ \text{任意}, \qquad S_{jk} = \begin{cases} \lambda, & \text{当}\ j = k \\ 0, & \text{当}\ j > k \\ S_{jk}, & \text{当}\ j < k. \end{cases}$$

下面引进的相似变换都保持 Λ 矩阵不变,保持 S 矩阵的上三角形式和对角元不变,但能简化 S 和 T 矩阵.我们的目标是要把 R 矩阵化成一个上三角矩阵,其中对角元都是 λ,在对角线上面的矩阵元素,每一行和每一列都最多只有一个元素不为零,而等于 1.然后通过行列交换的简单相似变换,就可把 R 矩阵化成若尔当标准型.

引入 X 型相似变换,其中相似变换矩阵 $X(M,b)$是一个 b 维单位矩阵、一个$(t-b)$维非奇矩阵 M^{-1}和一个$(n-t)$维单位矩阵的直和,它的作用只是使 T 矩阵的第$(b+1)$行至第 t 行中各列矩阵作M 变换,例如可使其中一个非零列矩阵变成只有一个分量等于 1,其余分量都为零,而 Λ 和 S 矩阵都保持不变.先看 T 矩阵的第$(t+1)$列,它的矩阵元素不会全为零,否则 R 矩阵就有$(t+1)$个线性无关的本征矢量.作 $X(M,0)$相似变换,选择其中的 M 矩阵,使 T 矩阵的第$(t+1)$列简化为只有第一个分量为 1,其余分量都为零.

引入 Y 型相似变换,它的相似变换矩阵 $Y_\omega(\beta_1,\alpha_1;\beta_2,\alpha_2;\cdots)$,除所有对角元为 1 外,只有若干个非对角元不为零,即 β_1 行 α_1 列,β_2 行 α_2 列等非对角元为 ω,其余非对角元都为零,其中这些不等于零的非对角元所涉及的行列都互不相同.它的逆矩阵只是把 ω 换成 $-\omega$,其余相同.作 $Y_\omega(t-1,k)$相似变换,其中 $\omega=-T_{1k}$,$k>t+1$,则把 T_{1k}化为零,而在 T 矩阵中k 列左面的矩阵元素保持不变.从基的观点看,原来的基在 R 作用下作如下变换

$$R\boldsymbol{e}_{t+1} = \lambda\boldsymbol{e}_{t+1} + \boldsymbol{e}_1, \quad R\boldsymbol{e}_k = \lambda\boldsymbol{e}_k + T_{1k}\boldsymbol{e}_1 + \cdots.$$

$Y_\omega(t+1,k)$相似变换是把第 k 个基$\boldsymbol{e}'_k$换成新基$\boldsymbol{e}'_k=\boldsymbol{e}_k-T_{1k}\boldsymbol{e}_{t+1}$,正好把 $R\boldsymbol{e}_k$中与$\boldsymbol{e}_1$有关的项抵消掉了:

$$\begin{aligned} R\boldsymbol{e}'_k &= R(\boldsymbol{e}_k - T_{1k}\boldsymbol{e}_{t+1}) = \lambda\boldsymbol{e}_k + T_{1k}\boldsymbol{e}_1 + \cdots - T_{1k}(\lambda\boldsymbol{e}_{t+1} + \boldsymbol{e}_1) \\ &= \lambda(\boldsymbol{e}_k - T_{1k}\boldsymbol{e}_{t+1}) + \cdots. \end{aligned}$$

通过一系列的 $Y_\omega(t+1,k)$相似变换,$\omega=-T_{1k}$,$t+2\leqslant k\leqslant n$,可以把 T 矩阵的第一行元素,除 $T_{1(t+1)}=1$ 外,都化为零.我们把这简化第$(t+1)$列矩阵元素的方法称为第一类方法.

现在研究 R 矩阵的第 $t+2$ 列. 有两种情况. 第一种情况是 $S_{(t+1)(t+2)}=0$. 此时可用第一类方法, 作 $X(M,1)$ 相似变换, 保持 T 矩阵的第一行矩阵元素不变, 把 T 矩阵的第 $(t+2)$ 列化为只有 $T_{2(t+2)}=1$, 其余元素都为零, 再作一系列 $Y_\omega(t+2,k)$ 相似变换, 其中 $\omega=-T_{2k}$, $t+3\leqslant k\leqslant n$, 把 T 矩阵的第二行其余元素 T_{2k} 都化为零.

第二种情况是 $S_{(t+1)(t+2)}\neq 0$, 引入 Z 型相似变换, 它的相似变换矩阵 $Z_\zeta(\alpha)$ 是对角矩阵, 对角元中, 除了第 α 个分量为 ζ 外, 其余分量都是 1. 这种相似变换使 R 矩阵的第 α 列元素放大 ζ 倍, 第 α 行元素缩小 ζ 倍, 但保持对角元不变. 现在作 $Z_\zeta(t+2)$ 相似变换, 其中 $\zeta=\{S_{(t+1)(t+2)}\}^{-1}$. 经过此相似变换, $S_{(t+1)(t+2)}$ 化为 1.

进一步要把 T 矩阵的第 $(t+2)$ 列全化为零. 该列的第一个分量已经化为零, 现在作一系列 $Y_\omega(a,t+1)$ 相似变换, 取 $\omega=T_{a(t+2)}$, $2\leqslant a\leqslant t$, 这些相似变换不改变 T 矩阵的第一列, 但使 T 矩阵的第二列矩阵元素都化为零. 从基的观点说, 原来的基 $\boldsymbol{e}_{t+2}$ 在 R 作用下得

$$Re_{t+2}=\lambda e_{t+2}+\left(e_{t+1}+\sum_{a=2}^{t}T_{a(t+2)}e_a\right).$$

一系列的 $Y_\omega(a,t+1)$ 相似变换把上式括号中的矢量变成新的基 $\boldsymbol{e}'_{t+1}$, 从而消去了 $T_{a(t+2)}$. 然后再简化 S 矩阵的第 $(t+1)$ 行, 作一系列 $Y_\omega(t+2,k)$ 相似变换, 取 $\omega=-S_{(t+1)k}$, $t+3\leqslant k\leqslant n$, 把 $S_{(t+1)k}$ 都化为零. 这系列相似变换的作用是与前面消去 T_{1k} 的相似变换是一样的. 我们把此第二种情况下简化第 $(t+2)$ 列矩阵元素的方法称为第二类方法, 只是后面应用时要作适当的变化.

在上述两列的简化基础上, 我们用数学归纳法证明 R 矩阵可以通过相似变换化成若尔当标准型. 设经过相似变换, R 矩阵的对角元, 梯形结构和 Λ 矩阵保持不变, R 矩阵的第 $(t+1)$ 列至第 $(t+d)$ 列, 在对角线以上的元素中都只有一个矩阵元素等于 1, 其余都为零, 而且每一个等于 1 的非对角矩阵元, 它们所在行的其余非对角矩阵元都为零. 这种形式的 R 矩阵我们称为 d 级简化 R 矩阵, 我们已用相似变换把 R 矩阵化为 1 级和 2 级简化 R 矩阵, 现在要把这方法推广, 证明可以用相似变换把 d 级简化 R 矩阵化为 $(d+1)$ 级简化 R 矩阵.

为了用数学符号确切地描述 d 级简化 R 矩阵, 必须清楚地标记在 R 矩阵的第 $(t+1)$ 列至第 $(t+d)$ 列中等于 1 的那些非对角矩阵元素所在的位置. 设在这 d 列中, 有 g 个等于 1 的非对角矩阵元素出现在 T 矩阵中, 而 $d-g$ 个出现在 S 矩阵中, $1\leqslant g\leqslant t$ 和 $g\leqslant d$. 设在 T 矩阵中, 等于 1 的非对角矩阵元所在位置是第 b 行第 k_b 列, $b=1,2,\cdots,g$ 和 $t+1\leqslant k_b\leqslant t+d$, 而在 S 矩阵中, 如果存在这样的非对角矩阵元, 即 $g<d$, 它们所在位置是第 j_s 行第 k_s 列, $s=1,2,\cdots,d-g$, $t+1\leqslant$

$j_s \leqslant t+d-1, k_s \neq k_b$，和 $t+1 \leqslant k_s \leqslant t+d$，当然这些 k_b 之间，j_s 之间，k_s 之间都互不相同，$j_s < k_s$，则

$$T_{ak} = \begin{cases} 1, & \text{当 } a = b \text{ 和 } k = k_b, \\ 0, & \text{当 } a = b \text{ 和 } k \neq k_b, \\ 0, & \text{当 } a > g \text{ 和 } k \leqslant t + d, \\ T_{ak}, & a > g \text{ 和 } k > t + d, \end{cases}$$

$$S_{jk} = \begin{cases} \lambda, & \text{当 } j = k, \\ 0, & \text{当 } j > k, \\ 1, & \text{当 } j = j_s \text{ 和 } k = k_s, \\ 0, & \text{当 } j = j_s \text{ 和 } j < k \neq k_s, \\ 0, & \text{当 } j \neq j_s \text{ 和 } j < k \leqslant t + d, \\ S_{jk}, & \text{其他}, \end{cases}$$

注意我们的约定：$1 \leqslant a \leqslant t, t+1 \leqslant k \leqslant n$ 和 $R_{ja} = 0, R_{ac} = \Lambda_{ac} = \lambda\delta_{ac}$.

在 d 级简化 R 矩阵中，第$(t+d+1)$列的非对角矩阵元不全等于零，分两种情况来讨论.第一种情况是在第$(t+d+1)$列中不等于零的非对角矩阵元都出现在子矩阵 T 中.则可采用第一类方法化简，第二种情况是子矩阵 S 的第$(t+d+1)$列中也存在不等于零的非对角矩阵元，则需采用第二类方法化简.

对第一种情况，可通过 $X(M,g)$相似变换，适当选取 M 矩阵，保持 T 矩阵的前 g 行矩阵元素不变，在后面行中，把第$(t+d+1)$列矩阵元素化为 $T_{(g+1)(t+d+1)} = 1$，其余都化为零，然后，再通过一系列 $Y_\omega(t+d+1,k)$相似变换，其中 $\omega = -T_{(g+1)k}, t+d+2 \leqslant k \leqslant n$，把所有 $T_{(g+1)k}$化为零.这就是$(d+1)$级简化 R 矩阵.

对第二种情况，设 $S_{\alpha_1(t+d+1)}$是该列中不等于零的非对角矩阵元，又设第 α_1 列中等于 1 的非对角矩阵元在第 α_2 行，第 α_2 列中等于 1 的非对角矩阵元在第 α_3 行，依次类推，直到 $\alpha_u \leqslant t$，第 α_u 列中没有不等于零的非对角矩阵元，则我们定义 $S_{\alpha_1(t+d+1)}$的级数为 u，级指标为$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_u)$.

设在 S 矩阵第$(t+d+1)$列中有若干个不等于零的非对角元，任取一个级数最高的非对角矩阵元，记作 $S_{\alpha_1(t+d+1)}$，级数为 u，级指标为$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots)$，其他不等于零的非对角矩阵元，例如 $S_{\beta_1(t+d+1)}$，级数 $v \leqslant u$，级指标为$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_v)$.先作 $Z_\zeta(t+d+1)$相似变换，取 $\zeta = (S_{\alpha_1(t+d+1)})^{-1}$，使 $S_{\alpha_1(t+d-1)}$变为 1. R 矩阵第$(t+$

$d+1$)列的其他非对角矩阵元虽然乘了数 ζ,但位置并未变化,为节省符号,我们仍用原符号标记.

现在作 $Y_v(\beta_1,\alpha_1;\cdots;\beta_v,\alpha_v)$相似变换,其中 ω 等于$S_{\beta_1(t+d+1)}$,它可把此非对角矩阵元化为零.这相似变换能消去 $S_{\beta_1(t+d+1)}$的原因可用基变换的概念来理解.为简化符号,我们把 $S_{\beta_1(t+d+1)}$记作 σ.此相似变换引入的新基为

$$e'_{\alpha_1}=e_{\alpha_1}+\sigma e_{\beta_1},\quad e'_{\alpha_2}=e_{\alpha_2}+\sigma e_{\beta_2},$$
$$\cdots\qquad e'_{\alpha_v}=e_{\alpha_v}+\sigma e_{\beta_v},$$

其他基与原基相同.在相似变换前

$$Re_{t+d+1}=\lambda e_{t+d+1}+(e_{\alpha_1}+\sigma e_{\beta_1})+\cdots,$$
$$Re_{\alpha_1}=\lambda e_{\alpha_1}+e_{\alpha_2},\quad Re_{\alpha_2}=\lambda e_{\alpha_2}+e_{\alpha_3},\quad\cdots,$$
$$Re_{\alpha_v}=\begin{cases}\lambda e_{\alpha_v}+e_{\alpha_{v+1}}, & \text{当 } v<u,\\ \lambda e_{\alpha_v}, & \text{当 } v=u,\end{cases}$$
$$Re_{\beta_1}=\lambda e_{\beta_1}+e_{\beta_2},\qquad Re_{\beta_2}=\lambda e_{\beta_2}+e_{\beta_3},\quad\cdots$$
$$Re_{\beta_v}=\lambda e_{\beta_v},$$

在相似变换后

$$Re'_{t+d+1}=Re_{t+d+1}=\lambda e'_{t+d+1}+e'_{\alpha_1}+\cdots,$$
$$Re'_{\alpha_1}=\lambda(e_{\alpha_1}+\sigma e_{\beta_1})+e_{\alpha_2}+\sigma e_{\beta_2}=\lambda e'_{\alpha_1}+e'_{\alpha_2},$$
$$Re'_{\alpha_2}=\lambda(e_{\alpha_2}+\sigma e_{\beta_2})+e_{\alpha_3}+\sigma e_{\beta_3}=\lambda e'_{\alpha_2}+e'_{\alpha_3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Re'_{\alpha_v}=\lambda(e_{\alpha_v}+\sigma e_{\beta_v})+e_{\alpha_{v+1}}=\lambda e'_{\alpha_v}+e'_{\alpha_{v+1}}.$$

当 $v=u$ 时,最后等式中的 $e_{\alpha_{v+1}}$ 项和 $e'_{\alpha_{v+1}}$ 项不存在.这样,所有的 e'_{α_j},在 R 作用下的变换规律都与原来的e_{α_j} 的变换规律相同,只是 e'_{t+d+1}在变换中消去了 σe_{β_1} 的项,e'_j,$j>t+d+1$ 的变换也可能发生变化(j 列非对角元发生变化).通过一系列这样的相似变换可使 S 矩阵的第($t+d+1$)列只有一个不等于零的非对角元,$S_{\alpha_1(t+d+1)}=1$.如果此时 T 矩阵有非零矩阵元,例如 $T_{a(t+d+1)}\neq 0$,作变换 $Y_\omega(a,$

α_1)相似变换，其中 ω 等于 $T_{a(t+d+1)}$，它可把 $T_{a(t+d+1)}$ 化为零. 最后作一系列 $Y_\omega(t+d+1,k)$ 相似变换，其中 $\omega=-S_{a_1k}$，$t+d+2\leqslant k\leqslant n$，把所有 S_{a_1k} 化为零. 因此，通过这一系列的相似变换，把 d 级简化 R 矩阵化成了 $(d+1)$ 级简化 R 矩阵.

通过上述一系列相似变换，R 矩阵化成了上三角矩阵，其中对角元都是 λ，在对角线上面的矩阵元素，每一行和每一列都最多只有一个元素不为零，而等于 1. 然后通过行列交换的简单相似变换，就可把 R 矩阵化成若尔当标准型. 证完.

由于符号比较复杂，我们举一个典型而又包括各种特征的例子来具体说明如何通过相似变换把 d 级简化 R 矩阵化为 $(d+1)$ 级简化 R 矩阵形式. 设 $t=6$，$n=15$，$g=4$ 和 $d=7$，

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{5(14)} & T_{5(15)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{6(14)} & T_{6(15)} \end{pmatrix},$$

$$S=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{8(14)} & S_{8(15)} \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & S_{(10)(14)} & S_{(10)(15)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & S_{(11)(14)} & S_{(11)(15)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & S_{(13)(14)} & S_{(13)(15)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & S_{(14)(15)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

即 $k_b=7,8,11,12$，$j_s=7,9,12$，和 $k_s=9,10,13$. 根据在相似变换前 S 矩阵第 14 列（一般情况是第 $(t+d+1)$ 列）元素的值，可分为两种情况. 第一种情况是 S 矩阵的第 14 列非对角矩阵元素都为零，则 T 矩阵的第 14 列矩阵元素不会都为零，可采用第一类方法来简化. 作 $X(M,4)$ 相似变换，其中选择二维 M 矩阵，保持 T 矩阵前 4 行不变，把 T 矩阵的第 14 列化为 $T_{5(14)}=1$ 和 $T_{6(14)}=0$. 再作 $Y_\omega(14,15)$

相似变换，其中 $\omega=-T_{5(15)}$，使 $T_{5(15)}=0$. 这已经是 8 级简化 R 矩阵. 第二种情况是在 S 矩阵的第$(t+d+1)$列中非对角元不全为零，在本例中我们假定凡是尚待简化的非对角元都不为零. 先确定这些非对角元的级数和级指标. $S_{8(14)}$ 是二级，级指标是(8,2)，$S_{(10)(14)}$的级数最高，是四级，级指标是(10,9,7,1)，$S_{(11)(14)}$ 是二级，级指标是(11,3)，$S_{(13)(14)}$ 是三级，级指标是(13,12,4). 作 $Z_{\zeta}(14)$ 相似变换，其中 $\zeta=(S_{(10)(14)})^{-1}$，把 $S_{(10)(14)}$ 化为 1. 第 14 列的其他非对角元虽然发生了变化，但仍用原符号标记. 现逐个作如下变换得到 8 级简化 R 矩阵：

变换 $Y_{\omega}(8,10;2,9)$， $\omega=S_{8(14)}$， 把 $S_{8(14)}$ 化为零，

变换 $Y_{\omega}(11,10;3,9)$， $\omega=S_{(11)(14)}$， 把 $S_{(11)(14)}$ 化为零，

变换 $Y_{\omega}(13,10;12,9;4,7)$，$\omega=S_{(13)(14)}$， 把 $S_{(13)(14)}$ 化为零，

变换 $Y_{\omega}(5,10)$， $\omega=T_{5(14)}$， 把 $T_{5(14)}$ 化为零，

变换 $Y_{\omega}(6,10)$， $\omega=T_{6(14)}$， 把 $T_{6(14)}$ 化为零，

变换 $Y_{\omega}(14,15)$， $\omega=-S_{(10)(15)}$，把 $S_{(10)(15)}$ 化为零.

第二章 群的基本概念

一、群的定义和群的同构和同态

★ 群是元素 R 的集合，在定义了元素乘积规则后，要求集合对元素乘积是封闭的，元素乘积满足结合律，集合中存在恒元 E，满足 $ER=R$，集合中包含每一元素 R 的逆元R^{-1}，满足 $R^{-1}R=E$. 有限群中包含的元素数目称为群的阶. 元素的乘积关系反映了群的结构，是群的最基本的性质. 有限群元素的乘积关系由群的乘法表描写，由乘法表可得到群的全部性质. 乘法表中每行或每列元素都不重复,此性质称为群的重排定理. 由群的定义可推出群元素的重排定理和下面第 1 题给出的一些基本性质.

★ 两同构的群，元素间存在一一对应关系，且元素的乘积仍满足同样的一一对应关系，因此从群论角度看，同构群的性质完全相同. 两同态的群，元素间存在一多对应关系，元素乘积仍满足同样的一多对应关系. 对应前群恒元的后群元素的集合，构成后群的不变子群，称为同态对应的核，它的商群与前群同构. 前群只描写了后群的部分性质，即描写了同态对应核的商群的性质，而同态对应核内元素间的差别没有被描写出来.

1. 设 E 是群 G 的恒元，R 和 S 是群 G 中的任意元素，R^{-1}和 S^{-1}分别是 R 和 S 的逆元，试由群的定义证明：(1) $RR^{-1}=E$；(2) $RE=R$；(3) 若 $TR=R$，则 $T=E$；(4) 若 $TR=E$，则 $T=R^{-1}$；(5)(RS)的逆元为 $S^{-1}R^{-1}$.

证 证明的关键是，群中任何元素都存在逆元. 在证明后面的小题时，前面已经证明过的结论可以应用.

(1) 用两种方法证明. 第一种方法比较直接. 由于 R^{-1}是群中一元素，在群中存在它的逆元，记作 S，$SR^{-1}=E$. 因此，由群的定义得

$$RR^{-1}=ERR^{-1}=(SR^{-1})RR^{-1}=S(R^{-1}R)R^{-1}$$

$$=SER^{-1}=SR^{-1}=E.$$

另一方法是设 $RR^{-1}=W$，它的逆元是 W^{-1}，$W^{-1}W=E$：

$$WW=R(R^{-1}R)R^{-1}=RER^{-1}=W,$$

$$RR^{-1} = W = EW = (W^{-1}W)W = W^{-1}(WW) = W^{-1}W = E.$$

(2)

$$RE = R(R^{-1}R) = (RR^{-1})R = ER = R.$$

(3) 群中恒元的惟一性：若 $TR = R$，则

$$T = T(RR^{-1}) = (TR)R^{-1} = RR^{-1} = E.$$

(4) 群中任何元素的逆元是惟一的：若 TR 也等于恒元 E，则

$$T = T(RR^{-1}) = (TR)R^{-1} = ER^{-1} = R^{-1}.$$

(5)

$$(S^{-1}R^{-1})(RS) = S^{-1}(R^{-1}R)S = S^{-1}ES = S^{-1}S = E.$$

由逆元的惟一性知 $S^{-1}R^{-1}$是 RS 的逆元.

2. 证明以乘法作为“乘积”的所有正实数构成的群和以“加法”作为乘积的所有实数构成的群同构.

证　设所有正实数 R 的集合为H，元素的“乘积”定义为普通的数的乘积，于是，集合对元素的乘积是封闭的，数的乘积满足结合律，正实数 1 是此集合的恒元，R 的倒数 $1/R$ 仍是正实数，它是 R 的逆元，因此，集合 H 构成群，称为正实数的乘法群.

设所有实数 S 的集合为G，元素的“乘积”定义为数的加法，于是，集合对元素的“乘积”是封闭的，数的加法满足结合律，实数 0 是此集合的恒元，　S 仍是实数，它是 S 的逆元，因此，集合 G 构成群，称为实数的加法群.

通过指数函数建立两群 H 和G 的元素间的一一对应关系，且这种对应关系对元素乘积保持不变：

$$R = e^{S}, \qquad R' = e^{S'}, \qquad RR' = e^{S}e^{S'} = e^{S+S'}.$$

因此，群 H 和群G 同构.

二、群的各种子集

★　群的子集，在原群元素的乘积规则下，如果满足群的四个条件，称为原群的子群. 对有限群，只要子集对元素乘积满足封闭性，它就构成子群，因此很容易由乘法表来判断一个子集是否构成子群. 群中任一元素的幂次的集合构成的子群称为循环子群，也称该元素的周期. 循环子群中包含的元素数目称为该元素的

阶．恒元和原群是群的两个平庸的子群，通常不计入子群之列．

★　群 G 中不属于子群 H 的元素 R，左乘或右乘到子群上得到的集合，分别称为子群的左陪集 RH 和右陪集 HR．陪集中不含子群的元素．不同左陪集(或不同的右陪集)也不包含共同的元素．元素 R 和 S 属同一左陪集的充要条件是 $R^{-1}S\in H$，属同一右陪集的充要条件是 $RS^{-1}\in H$．对有限群，每一陪集中包含的元素数目等于子群的阶．因此子群的阶 h 是原群阶数 g 的约数，$n=g/h$ 称为子群 H 的指数，子群的不同左(或右)陪集的数目等于 $(n-1)$．在乘法表中，与子群元素相关的列里，每一行的元素集合，或者是子群本身，或者是子群的左陪集，与子群元素相关的行里，每一列的元素集合，或者是子群本身，或者是子群的右陪集．

★　对于群 G 的任意两元素 R 和 S，

$$SRS^{-1}=R',$$

R' 称为与 R 共轭的元素．共轭关系是相互的，共轭于同一元素的两元素互相共轭．群 G 中所有互相共轭的元素的集合构成类 C_α．设 $R\in C_\alpha$，逆元 R^{-1} 所属的类记作 C_α^{-1}，这两个类互称相逆类．如果 $C_\alpha=C_\alpha^{-1}$，则称自逆类．RS 和 SR 共轭，反之，互相共轭的元素一定可以分别表为某两元素的不同次序的乘积．对有限群，互相共轭元素的阶数相等，当乘法表的行和列用相同次序排列时，互相共轭的元素一定会在乘法表关于对角线对称的位置出现．这是由乘法表判断两元素是否共轭的基本方法．

★　对于群 G 的子群 H，若由群 G 任一元素 R 得到的左陪集和右陪集相等，

$$RH=HR,\qquad RHR^{-1}=H,$$

则 H 称为群 G 的不变子群，或称正规子群．指数为 2 的子群必为不变子群．不变子群包含子群中每一元素的幂和所有与之共轭的元素．因而不变子群由若干个整类构成．把若干个类合起来，如果它构成子群，则必是不变子群．这是找有限群的不变子群的基本方法．在判断若干类的集合是否构成子群时，首先看集合包含的元素数目是不是原群阶数的约数，集合是不是包含了其中每一元素的幂．

3.　设 H_1 和 H_2 是群 G 的两个子群，证明 H_1 和 H_2 的公共元素的集合也构成群 G 的子群．

证　设群 H_1 和群 H_2 都是群 G 的子群，集合 $H_3=\{R_1,R_2,\cdots\}$ 是子群 H_1 和 H_2 的交．集合 H_3 也是群 G 的子集，元素的乘积仍服从 G 中元素的乘积规则，因而 H_3 中元素的乘积满足结合律．既然 H_1 和 H_2 都是群 G 的子群，集合 H_3 中任意元素的乘积 R_iR_j 仍同时属于子群 H_1 和 H_2，因而仍属于集合 H_3．G 中恒元 E 和集合 H_3 中任意元素 R_j 的逆元 R_j^{-1} 都同时属于子群 H_1 和 H_2，因而仍属于集合 H_3．

因此集合 H_3 构成群，是群 G 的子群.

4. 证明阶数 g 为素数的群只能是循环群 C_g.

证 元素的阶数正是元素所产生的循环子群的阶数. 我们已经知道，子群 $H \subset G$ 的阶数 h 是群 G 阶数 g 的约数，所以当群的阶数为素数时，除恒元外，元素的阶数只能等于群 G 阶数 g，因而循环子群就是群 G 本身.

5. 试证明，准确到同构，六阶群只有两种：循环群 C_6 和正三角形对称群 D_3.

证 因为元素的周期构成循环子群，所以六阶群中，除恒元外，元素的阶数只能等于 2，3 和 6. 若六阶群中至少有一个元素的阶数为 6，则此群为循环群 C_6. 若六阶群中没有 6 阶元素，而至少有一个元素的阶数为 3，记作 R，它的周期构成的循环子群是指数为 2 的不变子群，$\{E, R, R^2\}$. 不失普遍性，陪集记作 S_0, S_1, S_2，满足 $R^m S_j = S_{j+m}$，其中 $S_{j+3} = S_j$. 由重排定理，S_j^2 不能等于 S_k，若它等于 R 或 R^2，则 S_j 是 6 阶元素，与假设矛盾. 因此 $S_j^2 = E$，S_j 都是 2 阶元素，并能推出 $R^m = S_{j+m}S_j$ 和 $S_j R^m = S_{j-m}$. 这就是 D_3 群. 最后若六阶群中除恒元外元素的阶数都是 2，任取其中两个元素 R 和 S，设 $RS = T$，由于恒元和逆元的惟一性、T 不等于恒元 E、也不等于 R 或 S，E、R，S 和 T 组成的子集构成子群，同构于四阶反演群 V_4，它的阶数不是 6 的约数，矛盾. 证完.

6. 试证明，除恒元外，每个元素的阶都是 2 的群一定是阿贝尔群.

证 在恒元之外，任取群 G 中两个不相同的元素 R 和 S，它们的乘积记作 $RS = T$. 由第 1 题，我们已知，$ER = RE$，$ES = SE$，现在只要证明 SR 也等于 T. 根据假设，$R^2 = S^2 = E$，则由于恒元和逆元的惟一性，T 不等于恒元 E，也不等于 R 或 S，且 $T^2 = E$. 由此，$TS = RS^2 = R$，$TR = T^2 S = S$，和 $SR = TR^2 = T = RS$. 因此群 G 中任意元素的乘积可以对易，群 G 是阿贝尔群.

7. 量子力学中常用的泡利(Pauli)矩阵 σ_a 定义如下：

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab} \mathbf{1} + \mathrm{i} \sum_{d=1}^{3} \epsilon_{abd} \sigma_d, \quad 如\ \sigma_a^2 = \mathbf{1}, \quad \sigma_1 \sigma_2 = \mathrm{i}\sigma_3,$$

其中 ϵ_{abd} 是三阶完全反对称张量. 试证明由 σ_1 和 σ_2 的所有可能乘积和幂次的集合构成群，列出此群的乘法表，指出此群的阶数、各元素的阶数，群所包含

的类和不变子群，不变子群的商群与什么群同构．并建立同构关系，证明此群和正方形对称群 D_4 同构．

证 根据泡利矩阵的乘积规则，由 σ_1 和 σ_2 乘积产生的矩阵共有 8 个，它们的乘法表如下：

	1	σ_1	σ_2	$i\sigma_3$	-1	$-\sigma_1$	$-\sigma_2$	$-i\sigma_3$
1	1	σ_1	σ_2	$i\sigma_3$	-1	$-\sigma_1$	$-\sigma_2$	$-i\sigma_3$
σ_1	σ_1	1	$i\sigma_3$	σ_2	$-\sigma_1$	-1	$-i\sigma_3$	$-\sigma_2$
σ_2	σ_2	$-i\sigma_3$	1	$-\sigma_1$	$-\sigma_2$	$i\sigma_3$	-1	σ_1
$i\sigma_3$	$i\sigma_3$	$-\sigma_2$	σ_1	-1	$-i\sigma_3$	σ_2	$-\sigma_1$	1
-1	-1	$-\sigma_1$	$-\sigma_2$	$-i\sigma_3$	1	σ_1	σ_2	$i\sigma_3$
$-\sigma_1$	$-\sigma_1$	-1	$-i\sigma_3$	$-\sigma_2$	σ_1	1	$i\sigma_3$	σ_2
$-\sigma_2$	$-\sigma_2$	$i\sigma_3$	-1	σ_1	σ_2	$-i\sigma_3$	1	$-\sigma_1$
$-i\sigma_3$	$-i\sigma_3$	σ_2	$-\sigma_1$	1	$i\sigma_3$	$-\sigma_2$	σ_1	-1

由乘法表知，此 8 个元素的集合对元素的乘积是封闭的，矩阵的乘积满足结合律，$E=\mathbf{1}$ 是此集合的恒元，除 $\pm i\sigma_3$ 互为逆元外，其他元素都是自逆的．因此，此集合构成群，阶数为 8．恒元 E 的阶数为 1．$-\mathbf{1}$、$\pm\sigma_1$ 和 $\pm\sigma_2$ 的阶数为 2．$\pm i\sigma_3$ 的阶数为4．$\mathbf{1}$ 和 $-\mathbf{1}$ 各自成一类，$\pm\sigma_1$，$\pm\sigma_2$ 和 $\pm i\sigma_3$ 分别构成一类，共五个类．不变子群有 $\{\mathbf{1},-\mathbf{1}\}$，$\{\mathbf{1},-\mathbf{1},\sigma_1,-\sigma_1\}$，$\{\mathbf{1},-\mathbf{1},\sigma_2,-\sigma_2\}$，和 $\{\mathbf{1},-\mathbf{1},i\sigma_3,-i\sigma_3\}$．后三个不变子群的商群都是二阶群，与 V_2 群同构．第一个不变子群的陪集是互差负号的两个矩阵，作为复元素，它们的平方都是不变子群 $\{\pm\mathbf{1}\}$，因此商群同构于四阶反演群 V_4．

把 D_4 群中的四次转动 C_4 与 $i\sigma_3$ 对应，沿 x 轴方向的二次转动 C'_2 与 σ_1 对应，其他元素间的对应关系可由对应元素的乘积产生，例如 C_4^2 与 $-\mathbf{1}$ 对应，C_4^3 与 $-i\sigma_3$ 对应，$C_4C'_2C_4{}^3$ 为沿 y 轴方向的二次转动，与 $-\sigma_1$ 对应，$C_4C'_2$ 和 C'_2C_4 为沿 xy 平面坐标轴角平分线方向的二次转动，分别与 $-\sigma_2$ 和 σ_2 对应．这样，元素的乘积仍按此规则一一对应，两群同构．两群对应元素的阶相同，类的结构相同，不变子群及其商群也对应相同．

8． 证明由 $i\sigma_1$ 和 $i\sigma_2$ 的所有可能乘积和幂次的集合构成群，列出此群的乘法表．指出此群的阶数，各元素的阶数，群包含的各类和不变子群，和不变子群的商群分别与什么群同构．说明此群与 D_4 群不同构．

证　由 $\mathrm{i}\sigma_1$ 和 $\mathrm{i}\sigma_2$ 乘积产生的矩阵共有 8 个，乘法表如下.

	1	$\mathrm{i}\sigma_1$	$\mathrm{i}\sigma_2$	$\mathrm{i}\sigma_3$	1	$-\mathrm{i}\sigma_1$	$-\mathrm{i}\sigma_2$	$-\mathrm{i}\sigma_3$
1	1	$\mathrm{i}\sigma_1$	$\mathrm{i}\sigma_2$	$\mathrm{i}\sigma_3$	-1	$-\mathrm{i}\sigma_1$	$-\mathrm{i}\sigma_2$	$-\mathrm{i}\sigma_3$
$\mathrm{i}\sigma_1$	$\mathrm{i}\sigma_1$	-1	$-\mathrm{i}\sigma_3$	$\mathrm{i}\sigma_2$	$-\mathrm{i}\sigma_1$	1	$\mathrm{i}\sigma_3$	$-\mathrm{i}\sigma_2$
$\mathrm{i}\sigma_2$	$\mathrm{i}\sigma_2$	$\mathrm{i}\sigma_3$	-1	$-\mathrm{i}\sigma_1$	$-\mathrm{i}\sigma_2$	$-\mathrm{i}\sigma_3$	1	$\mathrm{i}\sigma_1$
$\mathrm{i}\sigma_3$	$\mathrm{i}\sigma_3$	$-\mathrm{i}\sigma_2$	$\mathrm{i}\sigma_1$	-1	$-\mathrm{i}\sigma_3$	$\mathrm{i}\sigma_2$	$-\mathrm{i}\sigma_1$	1
-1	-1	$-\mathrm{i}\sigma_1$	$\mathrm{i}\sigma_2$	$\mathrm{i}\sigma_3$	1	$\mathrm{i}\sigma_1$	$\mathrm{i}\sigma_2$	$\mathrm{i}\sigma_3$
$-\mathrm{i}\sigma_1$	$\mathrm{i}\sigma_1$	1	$\mathrm{i}\sigma_3$	$-\mathrm{i}\sigma_2$	$\mathrm{i}\sigma_1$	-1	$-\mathrm{i}\sigma_3$	$\mathrm{i}\sigma_2$
$-\mathrm{i}\sigma_2$	$-\mathrm{i}\sigma_2$	$-\mathrm{i}\sigma_3$	1	$\mathrm{i}\sigma_1$	$\mathrm{i}\sigma_2$	$\mathrm{i}\sigma_3$	-1	$-\mathrm{i}\sigma_1$
$-\mathrm{i}\sigma_3$	$-\mathrm{i}\sigma_3$	$\mathrm{i}\sigma_2$	$-\mathrm{i}\sigma_1$	1	$\mathrm{i}\sigma_3$	$-\mathrm{i}\sigma_2$	$\mathrm{i}\sigma_1$	-1

由乘法表知，此 8 个元素的集合对元素的乘积是封闭的，矩阵的乘积满足结合律，$E=\mathbf{1}$ 是此集合的恒元，$-\mathbf{1}$ 是自逆元素，$\pm\mathrm{i}\sigma_a$，$1\leqslant a\leqslant 3$，互为逆元. 因此，此集合构成群，阶数为 8. 恒元 $\mathbf{1}$ 的阶数为 1. $-\mathbf{1}$ 的阶数为 2. $\pm\mathrm{i}\sigma_a$ 的阶数都为 4. $\mathbf{1}$ 和 $-\mathbf{1}$ 各自成一类，$\pm\mathrm{i}\sigma_1$、$\pm\mathrm{i}\sigma_2$ 和 $\pm\mathrm{i}\sigma_3$ 分别构成一类，共五个类. 不变子群有 $\{\mathbf{1},-\mathbf{1}\}$，$\{\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathrm{i}\sigma_1,-\mathrm{i}\sigma_1\}$，$\{\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathrm{i}\sigma_2,-\mathrm{i}\sigma_2\}$，和 $\{\mathbf{1},-\mathbf{1},\mathrm{i}\sigma_3,-\mathrm{i}\sigma_3\}$. 后三个不变子群的商群都是二阶群，与 V_2 群同构. 第一个不变子群的陪集是互差负号的两个矩阵，作为复元素，它们的平方都是不变子群 $\{\pm\mathbf{1}\}$，因此商群同构于四阶反演群 V_4. 由于此群包含六个阶数为 4 的元素，此群与 D_4 群不同构，与 C_{4h} 群也不同构. 文献上常称为四元数群 Q_8.

9.　试证明，准确到同构，八阶群只有五种：循环群 C_8，C_{4h}，正方形对称群 D_4，四元素群 Q_8 和 D_{2h}.

证　因为元素的周期构成循环子群，所以八阶群中，除恒元外，元素的阶数只能等于 2，4 和 8. 若八阶群中至少有一个元素的阶数为 8，则此群为循环群 C_8. 若八阶群中没有 8 阶元素，而至少有一个元素的阶数为 4，记作 R，它的周期构成的循环子群是指数为 2 的不变子群，$\{E,R,R^2,R^3\}$. 陪集记作 $\{S_0,S_1,S_2,S_3\}$，满足 $R^mS_j=S_{j+m}$，其中 $S_{j+4}=S_j$. 由重排定理，$S_j{}^2$ 不能等于 S_k，若它等于 R 或 R^3，则 S_j 是 8 阶元素，与假设矛盾. 若至少有一个 $S_j=R^2$，不失普遍性，设 $S_1{}^2=R^2$，则 S_1 是 4 阶元素，$S_1{}^{-1}=S_1{}^3=R^2S_1=S_3$，而且 $S_3{}^2=R^2$. 现在存在两种情况. 若 $S_0{}^2=R^2$，同理有 $S_0{}^{-1}=S_0{}^3=S_2$，$S_2{}^2=R^2$ 和 $S_1S_0=RS_0{}^2=R^3$，$S_0S_1=R^3S_1{}^2=R$，因而此群同构于四元数群 Q_8，同构关系为

$$R\leftrightarrow \mathrm{i}\sigma_3,\qquad S_0\leftrightarrow \mathrm{i}\sigma_2,\qquad S_1\leftrightarrow \mathrm{i}\sigma_1.$$

若 $S_0{}^2 = S_2{}^2 = E$，则由 $R^3 S_3 = S_2$取逆得 $S_1 R = S_2 = RS_1$，故有 $S_3 R = RS_3$. 由 $R^3 S_0 = S_3$取逆得 $S_0 R = S_1 = RS_0$，同理 $S_2 R = RS_2$. 而且 $S_0 S_1 = R^{-1} S_1{}^2 = R$ 和 $S_1 S_0 = RS_0{}^2 = R$，因而此群同构于阿贝尔群 $C_{4h} = C_4 \times V_2$，同构关系为

$$R \leftrightarrow C_4, \qquad S_0 \leftrightarrow \sigma, \qquad S_1 \leftrightarrow \sigma C_4.$$

其中 σ 是空间反演. 若所有 S_j 都是 2 阶元素，$S_j{}^2 = E$，则由 $R^m S_j = S_{j+m}$可推出 $R^m = S_{j+m} S_j$ 和 $S_j R^m = S_{j-m}$，因而此群同构于 D_4 群，同构关系为

$$R \leftrightarrow \mathrm{i}\sigma_3, \qquad S_0 \leftrightarrow \sigma_2, \qquad S_1 \leftrightarrow \sigma_1.$$

最后，若八阶群中没有 8 阶和 4 阶元素，即除恒元外所有元素都是 2 阶元素，则得阿贝尔群 $D_{2h} = D_2 \times V_2$. 这五个群中所包含元素的阶和类数列举于下表.

群	一阶	二阶	四阶	八阶	类数
C_8	1	1	2	4	8
Q_8	1	1	6	0	5
C_{4h}	1	3	4	0	6
D_4	1	5	2	0	5
D_{2h}	1	7	0	0	8

10. 试研究所有不同构的九阶群.

	E	A	A^2	B	C	D	B^2	C^2	D^2
E	E	A	A^2	B	C	D	B^2	C^2	D^2
A	A	A^2	E	C	D	B	D^2	B^2	C^2
A^2	A^2	E	A	D	B	C	C^2	D^2	B^2
B	B	C	D	B^2	D^2	C^2	E	A^2	A
C	C	D	B	D^2	C^2	B^2	A	E	A^2
D	D	B	C	C^2	B^2	D^2	A^2	A	E
B^2	B^2	D^2	C^2	E	A	A^2	B	D	C
C^2	C^2	B^2	D^2	A^2	E	A	D	C	B
D^2	D^2	C^2	B^2	A	A^2	E	C	B	D

解　九阶群中，除恒元外，元素的阶数只能等于 3 和 9. 若九阶群中至少有一个元素的阶数为 9，则此群为循环群 C_9. 若九阶群中没有 9 阶元素，即除恒元外的

元素都是 3 阶元素. 任取一个 3 阶元素，记作 A，由 A 构成的循环子群为 $\{E, A, A^2\}$，一个右陪集记作 $\{B, C, D\}$. 不失普遍性，可设

$$AB = C, \quad AC = D, \quad AD = B.$$

B，C 和 D 都是 3 阶元素，它们的平方不能等于 E，A 或 A^2，又由重排定理，它们的平方也不能等于 B，C 或 D，它们互相间也不能相等，因而可把群中其余三个元素记作 B^2，C^2 和 D^2，构成另一个右陪集. 由重排定理，$AB^2 = CB$ 不能等于 C^2 和 B^2，因而只能等于 D^2. 其他乘积关系都可由这些公式推出，从而得此群的乘法表. 由乘法表知此群是阿贝尔群，有九个类.

11. 试研究所有不同构的十阶群.

证 十阶群中，除恒元外，元素的阶数只能等于 2，5 和 10. 若十阶群中至少有一个元素的阶数为 10，则此群为循环群 C_{10}. 若十阶群中恒元外的元素都是二阶元素，任取 R 和 S，设 $RS = T$，则有四阶子群 $\{E, R, S, T\}$，同构于四阶反演群，子群阶数不是 10 的约数，矛盾. 若十阶群中没有 10 阶元素，而至少有一个元素的阶数为 5，记作 R，它的周期构成的循环子群是指数为 2 的不变子群，$\{E, R, R^2, R^3, R^4\}$. 不失普遍性，陪集记作 $\{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4\}$，满足 $R^m S_j = S_{j+m}$，其中 $S_{j+5} = S_j$. 由重排定理，$S_j{}^2$ 不能等于 S_k，若它等于 R^j，其中 j 不是 5 的倍数，则 S_j 是 10 阶元素，与假设矛盾. 因此 $S_j{}^2 = E$，S_j 都是 2 阶元素，有 $R^m = S_{j+m}S_j$ 和 $S_j R^m = S_{j-m}$. 这正是 D_5 群. 十阶群只有 C_{10} 和 D_5 两个不同构的群. 从六阶群(第 5 题)和十阶群的研究可知，当群 G 阶数 g 等于一个素数 $n>1$ 的两倍时，它只能是循环群 C_{2n} 或正 n 边形对称群 D_n.

12. 举例说明群 G 的不变子群的不变子群不一定是群 G 的不变子群. 反之，证明若群 G 的不变子群完整地属于子群 H，则它也是子群 H 的不变子群.

证 T 群包含三个二次轴和四个三次轴，其中三个二次转动，加上恒元，构成 T 群的不变子群 D_2，但 D_2 群中包含的三个二阶不变子群，都不是 T 群的不变子群.

设 H_1 是群 G 的不变子群，是子群 H 的子群，R 是子群 H_1 中的任意元素，S 是子群 H 中的任意元素，当然也是群 G 中的元素，则因为 H_1 是群 G 的不变子群，所以 SRS^{-1} 属于子群 H_1，因而 H_1 也是群 H 的不变子群.

13. 设有限群 G 的阶为 g，$C_\alpha = \{S_1, S_2, \cdots, S_{n(\alpha)}\}$ 是群 G 的一个类，含 $n(\alpha)$ 个元素，对类中任意两个元素 S_i 和 S_j (可以不同，也可相同)，试证明群 G 中满足共轭关系 $S_i = PS_jP^{-1}$ 的元素 P 的个数为 $m(\alpha) = g/n(\alpha)$.

证　对于给定的元素 $S_j\in C_\alpha$，设群 G 中所有与 S_j 对易的元素 R 的数目为 $m(\alpha)$. 下面要证明在群 G 元素的乘积规则下，元素 R 的集合 H 构成群 G 的子群. 若 R 和 R' 都可与 S_j 对易，则 RR' 也可与 S_j 对易，因而集合满足封闭性. 结合律当然满足. 恒元 E 可与 S_j 对易，R 的逆元 R^{-1} 也可与 S_j 对易，因而都在集合 H 中. 此性质证完.

设 T 是群 G 中任意一个不属于子群 H 的元素，则 T 不能与 S_j 对易. 设 $TS_jT^{-1}=S_i\in C_\alpha$，则子群 H 的左陪集 TH 中的任意元素 TR 满足 $TRS_jR^{-1}T^{-1}=S_i$，左陪集 TH 包含的元素数目仍是 $m(\alpha)$. 反之，满足 $PS_jP^{-1}=S_i$ 的元素 P，有

$$(P^{-1}T)S_j(P^{-1}T)^{-1}=P^{-1}S_iP=S_j,$$

因而 $P^{-1}T\in H$，P 一定在此左陪集 TH 中. 这样，通过关系

$$TRS_jR^{-1}T^{-1}=S_i,$$

建立起 S_j 的共轭元素 S_i 和子群 H 的左陪集 TH 间的一个一一对应关系. 因此子群 H 的指数等于 S_j 所属类 C_α 中元素数目 $n(\alpha)$，即 $m(\alpha)=g/n(\alpha)$. $m(\alpha)$ 和类 C_α 中包含的元素数目 $n(\alpha)$ 都是群 G 阶数 g 的约数. 证完.

14.　试证明群 G 两个类作为复元素的乘积，必由若干个整类构成，即作为乘积的集合，包含集合中每个元素的共轭元素.

证　设 $R\in C_1$ 和 $S\in C_2$ 是群 G 中两个类，所有形如 RS 的元素集合为 H，要证明 H 由若干个整类构成，就是要证明集合 H 中包含 RS 的所有共轭元素，即对群 G 中的任意元素 T，要证明 $TRST^{-1}$ 属于集合 H. 因为 $TRT^{-1}=R'$ 属于类 C_1，$TST^{-1}=S'$ 属于类 C_2，所以 $TRST^{-1}=R'S'$ 属于集合 H. 证完.

15.　试以 T 群的子群 $C_3=\{E,R_1,R_1^2\}$ 为基础，将 C_3 群的乘法表扩充，计算 T 群的乘法表.

解　T 群有三个互相垂直的二次轴，取其轴向为坐标轴方向，二次转动分别记作 T_x^2，T_y^2 和 T_z^2，$T_z^2=T_x^2T_y^2$. T 群有四个三次轴，分别沿着 $\boldsymbol{e}_x\pm\boldsymbol{e}_y\pm\boldsymbol{e}_z$，和 $-\boldsymbol{e}_x\mp\boldsymbol{e}_y\pm\boldsymbol{e}_z$ 方向. 绕 $\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z$ 方向转动 $2\pi/3$ 角的元素记作 R_1，则

$$R_1^2T_y^2R_1=T_z^2,\quad R_1^2T_x^2R_1=T_x^2,\quad R_1^2T_z^2R_1=T_y^2,$$

$$R_1T_x^2R_1^2=T_y^2,\quad R_1T_y^2R_1^2=T_z^2,\quad R_1T_z^2R_1^2=T_x^2.$$

其他三次转动可用下式定义：

$$T_x^2R_1 = R_4, \quad T_y^2R_1 = R_3, \quad T_z^2R_1 = R_2.$$

代入上式得

$$R_1T_x^2 = R_3, \quad R_1T_y^2 = R_2, \quad R_1T_z^2 = R_4,$$

$$T_x^2R_1^2 = R_3^2, \quad T_y^2R_1^2 = R_2^2, \quad T_z^2R_1^2 = R_4^2,$$

$$R_1^2T_x^2 = R_4^2, \quad R_1^2T_y^2 = R_3^2, \quad R_1^2T_z^2 = R_2^2.$$

由于 T_x^2，T_y^2和 T_z^2间的乘积关系，得

$$T_x^2R_2 = R_3, \quad T_x^2R_3 = R_2, \quad T_x^2R_4 = R_1,$$

$$T_y^2R_2 = R_4, \quad T_y^2R_3 = R_1, \quad T_y^2R_4 = R_2,$$

$$T_z^2R_2 = R_1, \quad T_z^2R_3 = R_4, \quad T_z^2R_4 = R_3,$$

$$T_x^2R_2^2 = R_4^2, \quad T_x^2R_3^2 = R_1^2, \quad T_x^2R_4^2 = R_2^2,$$

$$T_y^2R_2^2 = R_1^2, \quad T_y^2R_3^2 = R_4^2, \quad T_y^2R_4^2 = R_3^2,$$

$$T_z^2R_2^2 = R_3^2, \quad T_z^2R_3^2 = R_2^2, \quad T_z^2R_4^2 = R_1^2.$$

上面等式给出了子群 C_3的右陪集公式和 T_x^2，T_y^2及 T_z^2左乘群 T 中任一元素的公式，由这些公式就可以填写群 T 的乘法表.

把乘法表的行(表中第一列)按子群 C_3及其左陪集 $T_x^2C_3$，$T_y^2C_3$和 $T_z^2C_3$的次序排列，乘法表的列(表中第一行)按子群 C_3及其右陪集 $C_3T_x^2$，$C_3T_y^2$和 $C_3T_z^2$的次序排列，这样把乘法表分割成4× 4 个小方块，每块是3× 3 个乘积元素. 第一行最左面的小方块就是子群 H 的乘法表，其他三小块是由第一小块分别右乘 T_x^2，T_y^2和 T_z^2得到，而后三行则是由第一行左乘 T_x^2，T_y^2和 T_z^2得到. 每一小块中的元素相对排列都与子群 H 的乘法表相同，只是元素作了替换，替换办法完全由上面公式给出. 最后得正四面体对称群 T 的乘法表如下：

	E	R_1	R_1^2	T_x^2	R_3	R_4^2	T_y^2	R_2	R_3^2	T_z^2	R_4	R_2^2
E	E	R_1	R_1^2	T_x^2	R_3	R_4^2	T_y^2	R_2	R_3^2	T_z^2	R_4	R_2^2
R_1	R_1	R_1^2	E	R_3	R_4^2	T_x^2	R_2	R_3	T_y^2	R_4	R_2^2	T_z^2
R_1^2	R_1^2	E	R_1	R_4^2	T_x^2	R_3	R_3^2	T_y^2	R_2	R_2^2	T_z^2	R_4
T_x^2	T_x^2	R_4	R_3^2	E	R_2	R_2^2	T_z^2	R_3	R_1^2	T_y^2	R_1	R_4^2
R_4	R_4	R_3^2	T_x^2	R_2	R_2^2	E	R_3	R_1^2	T_z^2	R_1	R_4^2	T_y^2
R_3^2	R_3^2	T_x^2	R_4	R_2^2	E	R_2	R_1^2	T_z^2	R_3	R_4^2	T_y^2	R_1
T_y^2	T_y^2	R_3	R_3^2	T_z^2	R_1	R_3^2	E	R_2	R_4^2	T_y^2	R_2	R_1^2
R_3	R_3	R_2^2	T_y^2	R_1	R_3^2	T_z^2	R_4	R_1^2	E	R_2	R_1^2	T_y^2
R_2^2	R_2^2	T_y^2	R_3	R_1^2	T_z^2	R_1	R_4^2	E	R_4	R_1^2	T_z^2	R_2
T_z^2	T_z^2	R_2	R_4^2	T_y^2	R_4	R_1^2	T_x^2	R_1	R_2^2	E	R_3	R_3^2
R_2	R_2	R_4^2	T_z^2	R_4	R_1^2	T_y^2	R_1	R_3^2	T_x^2	R_3	R_1^2	E
R_4^2	R_4^2	T_z^2	R_2	R_1^2	T_y^2	R_4	R_2^2	T_x^2	R_1	R_3^2	E	R_3

16. 群 G 由 12 个元素组成，它的元素乘法表如下：

	E	A	B	C	D	F	I	J	K	L	M	N
E	E	A	B	C	D	F	I	J	K	L	M	N
A	A	E	F	I	J	B	C	D	M	N	K	L
B	B	F	A	K	L	E	M	N	I	J	C	D
C	C	I	L	A	K	N	E	M	J	F	D	B
D	D	J	K	L	A	M	N	E	F	I	B	C
F	F	B	E	M	N	A	K	L	C	D	I	J
I	I	C	N	E	M	L	A	K	D	B	J	F
J	J	D	M	N	E	K	L	A	B	C	F	I
K	K	M	J	F	I	D	B	C	N	E	L	A
L	L	N	I	J	E	C	D	B	E	M	A	K
M	M	K	D	B	C	J	F	I	L	A	N	E
N	N	L	C	D	B	I	J	F	A	K	E	M

(1) 找出群 G 各元素的逆元；(2) 指出哪些元素可与群中任一元素乘积对易；(3) 列出各元素的周期和阶；(4) 找出群 G 各类包含的元素；(5) 找出群 G 包含哪些不变子群，列出它们的陪集，并指出它们的商群与什么群同构；(6) 判断群 G 是否与正四面体对称群 T 同构，或与正六边形对称群 D_6 同构.

解　(1) 互为逆元的元素有

$$E^{-1}=E,\quad A^{-1}=A,\quad B^{-1}=F,\quad C^{-1}=I$$

$$D^{-1}=J,\quad K^{-1}=L,\quad M^{-1}=N.$$

(2) E 和 A 可与群中所有元素对易.

(3) 阶数为 1 的元素是恒元 E，周期由一个元素 E 组成.

阶数为 2 的元素是 A，周期是 $\{E, A\}$.

阶数为 3 的元素有 M 和 N，它们属共同的周期 $\{E,M,N\}$.

阶数为 4 的元素有 B，C，D，F，I 和 J，它们所属周期分别是 $\{E,B,A,F\}$，$\{E,C,A,I\}$，和 $\{E,D,A,J\}$.

阶数为 6 的元素有 K 和 L，它们属共同的周期 $\{E,K,N,A,M,L\}$.

(4) 恒元和 A 分别构成一个类，$\{E\}$ 和 $\{A\}$. 阶数为 3 和 6 的元素分别构成两个类，$\{M,N\}$ 和 $\{K,L\}$. 阶数为 4 的元素分成两个类，$\{B,C,D\}$ 和 $\{F,I,J\}$.

(5) 不变子群由若干个整类组成，它包含子群中每个元素所属的周期，它的阶数只能是群 G 阶数的约数，即为 2，3，4 和 6.

不变子群 $\{E,A\}$，陪集有 $\{B,F\}$，$\{C,I\}$，$\{D,J\}$，$\{K,M\}$ 和 $\{L,N\}$. 因为 $B^2=C^2=D^2=A$，所以作为复元素，前三个陪集的平方都是不变子群，故商群同构于正三角形对称群 D_3.

不变子群 $\{E,M,N\}$，陪集有 $\{A,K,L\}$，$\{B,C,D\}$ 和 $\{F,I,J\}$. 因为 $B^2=F^2=A$，所以作为复元素，后两个陪集的平方不是不变子群，故商群同构于四阶循环群 C_4.

不变子群 $\{E,K,N,A,M,L\}$，陪集有 $\{B,I,D,F,C,J\}$，商群同构于二阶反演群 V_2.

(6) T 群不包含阶数为 6 的元素，因此群 G 和群 T 不同构. D_6 群不包含阶数为 4 的元素，因此群 G 和群 D_6 不同构.

第三章　群的线性表示理论

一、群的线性表示和标量函数变换算符

★　若行列式不为零的 m 维方矩阵 $D(R)$ 构成的群 $D(G)$ 与已知群 G 同构或同态，则 $D(G)$ 称为群 G 的 m 维线性表示，简称表示．$D(R)$ 称为群 G 元素 R 在该表示中的表示矩阵．$D(R)$ 的矩阵迹 $\chi(R)$ 称为元素 R 在该表示中的特征标．如果所有 $D(R)$ 矩阵都是幺正矩阵，则 $D(G)$ 称为幺正表示．如果所有 $D(R)$ 矩阵都是实正交矩阵，则 $D(G)$ 称为实正交表示．特征标都是实数的表示称为自共轭表示．如无特别说明，本书只讨论有限维表示．

★　用 x 简表量子系统所有自由度的坐标，标量波函数表为 $\psi(x)$．经过变换 R，x 变成 $x'=Rx$，波函数 $\psi(x)$ 变成 $\psi'(x)\equiv P_R\psi(x)$．作为标量波函数，变换后的波函数在 $x'=Rx$ 点的取值，必须等于变换前波函数在 x 点的取值，即

$$P_R\psi(Rx)=\psi(x),\qquad P_R\psi(x)=\psi(R^{-1}x).\tag{3.1}$$

新波函数的形式可根据(3.1)式由原波函数来计算，即把原波函数 ψ 的自变量 x 换成 $R^{-1}x$，再把它看成 x 的函数，就得到新的函数形式 $P_R\psi$．P_R 是线性算符，与变换 R 有一一对应关系，且乘积仍按同一规则一一对应．因此如果 R 的集合构成群 G，则 P_R 的集合 P_G 也构成群，且与 G 同构．作用在波函数上的线性算符 $L(x)$ 在变换 R 中作如下变换：

$$L(x)\rightarrow L'(x)=P_RL(x)P_R^{-1}.$$

★　设量子系统用标量波函数描写，它的哈密顿量是 $H(x)$，则 R 作为系统对称变换的充要条件是 P_R 可与 $H(x)$ 对易．设能级 E 是 m 重简并的，本征函数空间的基为 $\psi_\mu(x)$，则此函数空间对变换 P_R 保持不变．P_R 在此空间关于基 $\psi_\mu(x)$ 的矩阵形式为 $D(R)$：

$$P_R\psi_\mu(x)=\sum_\nu\psi_\nu(x)D_{\nu\mu}(R).\tag{3.2}$$

$D(R)$ 的集合构成对称群的一个表示．

1.　设 G 是一个非阿贝尔群，$D(G)$ 是群 G 的一个不可约真实表示．元素 R 的表示矩阵为 $D(R)$．现让群 G 元素 R 分别与下列矩阵对应，问此矩阵的集合

是否分别构成群 G 的表示？例如第一小题，设 $R\leftrightarrow D(R)^{\dagger}$，问 $D(R)^{\dagger}$ 的集合 $D(G)^{\dagger}$ 是否构成群 G 的不可约表示？

(1) $D(R)^{\dagger}$；(2) $D(R)^{T}$；(3) $D(R^{-1})$；(4) $D(R)^{*}$；(5) $D(R^{-1})^{\dagger}$；

(6) $\det D(R)$；(7) $\mathrm{tr}D(R)$．

解　题中给出了群 G 元素和给定矩阵集合中的矩阵间的一一对应关系，现在需要判断它们的乘积是否按同一规则一一对应，从而决定此矩阵集合是不是群的表示．注意 $D(RS)=D(R)D(S)$．

(1) 因为 $D(R)^{\dagger}D(S)^{\dagger}\neq D(RS)^{\dagger}$，所以 $D(R)^{\dagger}$ 的集合不是群 G 的表示．

(2) 因为 $D(R)^{T}D(S)^{T}\neq D(RS)^{T}$，所以 $D(R)^{T}$ 的集合不是群 G 的表示．

(3) 因为 $D(R^{-1})D(S^{-1})\neq D[(RS)^{-1}]$，所以 $D(R^{-1})$的集合不是群 G 的表示．

(4) 因为 $D(R)^{*}D(S)^{*}=D(RS)^{*}$，所以 $D(R)^{*}$ 的集合是群 G 的不可约表示．

(5) 因为 $D(R^{-1})^{\dagger}D(S^{-1})^{\dagger}=D[(RS)^{-1}]^{\dagger}$，所以 $D(R^{-1})^{\dagger}$ 的集合是群 G 的不可约表示．

(6) 因为 $\det D(R)\det D(S)=\det D(RS)$，所以 $\det D(R)$的集合是群 G 的不可约表示．

(7) 因为 $\mathrm{tr}D(R)\mathrm{tr}D(S)\neq\mathrm{tr}D(RS)$，所以 $\mathrm{tr}D(R)$的集合不是群 G 的表示．

2.　由函数基 $\psi_1(x,y)=x^2$，$\psi_2(x,y)=xy$，和 $\psi_3(x,y)=y^2$ 架设的三维函数空间(二次齐次函数空间)对下列二维空间转动变换 R 保持不变，试计算变换 R 对应的标量函数变换算符 P_R 在此函数基中的矩阵形式 $D(R)$：

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\qquad (1)\ R=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},$$

$$(2)\ R=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&-1\end{pmatrix},\qquad (3)\ R=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}.$$

再把基 $\psi_2(x,y)$换成$\sqrt{2}xy$，试重新计算 P_R 算符的矩阵形式．

解　题中给出的三个变换矩阵都是实正交矩阵，逆矩阵等于矩阵的转置．

(1) $P_R\psi_1(x,y)=x^2=\psi_1(x,y)$，

$P_R\psi_2(x,y)=-xy=-\psi_2(x,y)$，

$P_R\psi_3(x,y)=y^2=\psi_3(x,y)$，

$$D(R)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(2) $P_R\psi_1(x,y)=(1/4)(-x+\sqrt{3}y)^2$

$=(1/4)\{\psi_1(x,y)-2\sqrt{3}\psi_2(x,y)+3\psi_3(x,y)\}$,

$P_R\psi_2(x,y)=(1/4)(-x+\sqrt{3}y)(-\sqrt{3}x-y)$

$=(1/4)\{\sqrt{3}\psi_1(x,y)-2\psi_2(x,y)-\sqrt{3}\psi_3(x,y)\}$,

$P_R\psi_3(x,y)=(1/4)(-\sqrt{3}x-y)^2$

$=(1/4)\{3\psi_1(x,y)+2\sqrt{3}\psi_2(x,y)+\psi_3(x,y)\}$,

$$D(R)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3} & 3\\ -2\sqrt{3} & -2 & 2\sqrt{3}\\ 3 & -\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}.$$

(3) $P_R\psi_1(x,y)=(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2$

$=\cos^2\alpha\psi_1(x,y)+\sin(2\alpha)\psi_2(x,y)+\sin^2\alpha\psi_3(x,y)$,

$P_R\psi_2(x,y)=(x\cos\alpha+y\sin\alpha)(-x\sin\alpha+y\cos\alpha)$

$=-\sin\alpha\cos\alpha\psi_1(x,y)+\cos(2\alpha)\psi_2(x,y)+\sin\alpha\cos\alpha\psi_3(x,y)$,

$P_R\psi_3(x,y)=(-x\sin\alpha+y\cos\alpha)^2$

$=\sin^2\alpha\psi_1(x,y)-\sin(2\alpha)\psi_2(x,y)+\cos^2\alpha\psi_3(x,y)$,

$$D(R)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\cos^2\alpha & -\sin(2\alpha) & 2\sin^2\alpha\\ 2\sin(2\alpha) & 2\cos(2\alpha) & -2\sin(2\alpha)\\ 2\sin^2\alpha & \sin(2\alpha) & 2\cos^2\alpha\end{pmatrix}.$$

把基 $\psi_2(x,y)$扩大$\sqrt{2}$倍，算符的矩阵形式作对角相似变换 X.

$X=\mathrm{diag}\{1,\sqrt{2},1\}$, $\quad \bar{D}(R)=X^{-1}D(R)X$,

(1) $\bar{D}(R)=D(R)$,

$$(2)\ \bar{D}(R)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} & 3 \\ -\sqrt{6} & -2 & \sqrt{6} \\ 3 & -\sqrt{6} & 1 \end{pmatrix},$$

$$(3)\ \bar{D}(R)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos^2\alpha & -\sin(2\alpha) & \sqrt{2}\sin^2\alpha \\ \sin(2\alpha) & \sqrt{2}\cos(2\alpha) & -\sin(2\alpha) \\ \sqrt{2}\sin^2\alpha & \sin(2\alpha) & \sqrt{2}\cos^2\alpha \end{pmatrix}.$$

二、有限群的不等价不可约表示

★　若群 G 的每一个元素 R 在两个同维表示中的表示矩阵 $D(R)$ 和 $\bar{D}(R)$ 都可通过同一个相似变换 X 联系起来，$\bar{D}(R)=X^{-1}D(R)X$，则两表示称为等价的表示．任何元素 R 在两等价表示中的特征标相同．有限群和紧致李群的任何表示等价于幺正表示，两等价的幺正表示一定可以通过幺正的相似变换相联系，而且特征标对应相同是两表示等价的充要条件．

★　若群 G 每一个元素 R 在表示 $D(G)$ 中的表示矩阵 $D(R)$ 可通过相似变换变成同一形式的阶梯矩阵

$$X^{-1}D(R)X=\begin{pmatrix} D^{(1)}(R) & T(R) \\ 0 & D^{(2)}(R) \end{pmatrix}$$

则此表示称为可约表示，反之则称为不可约表示．可约表示的充要条件是在它的表示空间中存在关于 $D(G)$ 的非平庸的不变子空间．对有限群和紧致李群，可约表示一定可以通过相似变换变成同一形式的方块矩阵，即所有 $T(R)=0$．也就是说，可约表示一定可以通过相似变换化为不可约表示的直和，这样的表示形式称为既约表示．

★　设 $D^{(1)}(G)$ 和 $D^{(2)}(G)$ 是群 G 的两个不等价不可约表示．对所有群元素 R，若有 $D^{(1)}(R)X=XD^{(2)}(R)$，则 $X=\mathbf{0}$，若有 $D^{(1)}(R)X=XD^{(1)}(R)$，则 $X=c\mathbf{1}$．这称为舒尔(Schur)定理．

★　有限群 G 的不等价不可约表示个数等于群的类数 g_c，不等价不可约表示维数 m_j 平方和等于群的阶数 g．设元素 R 属于类 C_α，类 C_α 中包含 $n(\alpha)$ 个元素，元素在不等价不可约表示中的特征标 $\chi^j(R)=\chi^j_\alpha$ 构成类空间的正交完备基，有

$$\frac{1}{g}\sum_{R\in G}\chi^i(R)^*\chi^j(R)=\frac{1}{g}\sum_\alpha n(\alpha)\chi^{i*}_\alpha\chi^j_\alpha=\delta_{ij}$$

$$\sum_j \chi^j_\alpha \chi^{j*}_\beta = \frac{g}{n(\alpha)} \delta_{\alpha\beta}. \tag{3.3}$$

这些性质是群 G 不等价不可约表示特征标满足的必要条件. 再考虑群 G 不变子群的商群表示等方法，可以确定群 G 所有不等价不可约表示的特征标，排列成群 G 的特征标表. 进一步还要找到群 G 的所有不等价不可约表示的表示矩阵. 对较复杂的群则需要更专门的计算方法. 此外注意，当 $i=j$ 时，(3.3)的前式给出判定有限群不可约表示的充要条件.

★ 设有限群 G 是给定物理系统的对称变换群，元素 R 对应的变换算符 P_R 可与系统哈密顿量 $H(x)$ 对易. 设能级 E 是 m 重简并：

$$H(x)\psi_\mu(x) = E\psi_\mu(x), \qquad \mu = 1,2,\cdots,m.$$

由 $\psi_\mu(x)$ 架设的 m 维空间对 P_R 变换保持不变，由此可得到群 G 的一个 m 维表示 $D(G)$，它一般是可约表示：

$$P_R\psi_\mu(x) = \psi_\mu(R^{-1}x) = \sum_{\nu=1}^m \psi_\nu(x) D_{\nu\mu}(R). \tag{3.4}$$

设群 G 的所有不等价不可约表示 $D^j(G)$ 及其特征标 χ^j_α 都已经找到，通过下面方法，可把表示 $D(G)$ 约化为不可约表示的直和，并把函数基 $\psi_\mu(x)$ 组合成按不可约表示变换的函数.

作相似变换 X

$$X^{-1}D(R)X = \bigoplus_j a_j D^j(R). \tag{3.5}$$

取特征标

$$\chi_\alpha = \sum_j a_j \chi^j_\alpha.$$

利用特征标的正交性(3.3)式可求得在表示 $D(G)$ 约化中不可约表示 $D^j(G)$ 出现的重数 a_j：

$$a_j = \frac{1}{g}\sum_{R\in G} \chi^j(R)^* \chi(R) = \frac{1}{g}\sum_\alpha n(\alpha)\chi^{j*}_\alpha \chi_\alpha. \tag{3.6}$$

然后代入(3.5)式，计算相似变换矩阵 X. 计算时先取表示矩阵 $D^j(A)$ 是对角矩阵的那些生成元 A，此时(3.5)式变成计算矩阵 $D(A)$ 的本征值和本征矢量的问题. 计算中出现的待定参数必须暂时保留. 把算得的 X 矩阵代入关于其他生成元的(3.5)式，定出待定参数. 为避免计算 X^{-1} 矩阵，计算中先要把(3.5)式的 X^{-1} 矩阵移到等式的右边. 最后的 X 矩阵还会包含 $\sum_j a_j^2$ 个未定参数，可以按任何方便的方式选定，但必须保证 X 矩阵行列式不为零. 算得的 X 矩阵行指标为 μ，列

指标为不可约表示及其行指标 j 和 ρ. 在 $a_j>1$ 时还需指标 r 来区分 a_j 个 D^j 表示. 用 X 矩阵组合波函数:

$$\Phi^j_{\mu r}(x)=\sum_\rho \psi_\rho(x)X_{\rho,j\mu r},$$

$$P_R\Phi^j_{\mu r}(x)=\sum_\lambda \Phi^j_{\lambda r}(x)D^j_{\lambda\mu}(R), \tag{3.7}$$

$\Phi^j_{\mu a}(x)$是属于群 G 不可约表示D^j μ 行的函数. 对于相同 j 和μ 的函数, 还允许作一个仅依赖于 r 的线性组合, 这组合不会改变函数在 P_R 作用下的变换性质. 这就是上面任意选定的$\sum_j a_j^2$ 个参数的意义.

★　在量子力学中常用的标积运算, 对称算符 R_R 常常是幺正算符(有例外). 在此条件下, 属于对称群不等价不可约幺正表示的函数互相正交

$$P_R\phi^i_\nu(x)=\sum_\lambda \phi^i_\lambda(x)D^i_{\lambda\nu}(R),$$

$$P_R\psi^j_\mu(x)=\sum_\rho \psi^j_\rho(x)D^j_{\rho\mu}(R), \tag{3.8}$$

$$\langle\phi^i_\nu(x),\ \psi^j_\mu(x)\rangle=\delta_{ij}\delta_{\nu\mu}\langle\phi^i\parallel\Psi^j\rangle,$$

其中$\langle\phi^i\parallel\Psi^j\rangle$称为约化矩阵元, 它是不依赖于下标 ν 和μ 的常数. 这性质称为维格纳-埃伽(Wigner-Eckart)定理.

3.　证明有限群任何一维表示的表示矩阵模为 1.

证　有限群的线性表示等价于幺正表示, 而一维表示在相似变换中保持不变, 因此是幺正的. 一维幺正表示的表示矩阵是模为 1 的数.

此题还有许多别的证明办法. 有限群元素的若干次方(元素的阶)等于恒元, 而恒元在一维表示中对应数 1, 因此有限群元素在一维表示中的表示矩阵(数)的若干次方等于 1, 即模为 1.

4.　证明阿贝尔群(包括无限群)的不可约表示都是一维的.

证　阿贝尔群的元素乘积可以对易, 因而任一元素的表示矩阵 $D(R)$可与所有元素的表示矩阵对易, 对不可约表示, 按舒尔定理, $D(R)$取常数矩阵, 于是只能是一维的.

5.　证明有限群两个等价的不可约幺正表示之间的相似变换矩阵, 如果限制其行列式为 1, 必为幺正矩阵.

证　设 $D(R)$和 $\bar{D}(R)$是有限群的两个等价的不可约幺正表示, 它们可以通过幺正的相似变换联系起来,

$$\bar{D}(R) = M^{-1}D(R)M, \qquad M^{\dagger}M = \mathbf{1}.$$

若它们又通过另一个相似变换联系起来，$\bar{D}(R)=X^{-1}D(R)X$，则

$$D(R) = (XM^{-1})^{-1}D(R)(XM^{-1}),$$

由舒尔定理，$XM^{-1}=c\mathbf{1}$，$X=cM$，其中 c 是常数．又因为 X 矩阵的行列式为 1，所以 c 的模为 1，故 X 是幺正矩阵．

6． 证明除恒等表示外，有限群任一不可约表示的特征标对群元素求和为零．

证 有限群两个不等价不可约表示的特征标满足(3.3)式．取表示 $D^j(R)$为恒等表示，则 $D^j(R)=\chi^j(R)=1$，代入(3.3)式得，除恒等表示外，有限群任一不可约表示的特征标 $\chi^i(R)$对群元素 R 求和为零．

7． 在有限群 G 的群代数中，以群元素 R 为基，左乘群元素 S，得到正则表示 $D(S)$，右乘群元素 S，得到表示 $\bar{D}(S)$，它们的表示矩阵如下：

$$SR = \sum_{T\in G} TD_{TR}(S), \qquad RS = \sum_{T\in G} \bar{D}_{RT}(S)T,$$

$$D_{TR}(S) = \begin{cases} 1, & 当\ SR = T \\ 0, & 当\ SR \neq T, \end{cases}$$

$$\bar{D}_{RT}(S) = \begin{cases} 1, & 当\ RS = T \\ 0, & 当\ RS \neq T, \end{cases}$$

$$\chi(S) = \bar{\chi}(S) = \begin{cases} g, & 当\ S = E \\ 0, & 当\ S \neq E, \end{cases}$$

既然两表示的特征标对应相等，则两表示等价．试计算这样两表示间的相似变换矩阵，并具体写出 D_3 群群代数中，左乘和右乘群元素产生的这两个表示间的相似变换矩阵．

解 设此两表示通过相似变换 X 相联系：

$$\sum_{P\in G} \bar{D}_{TP}(S)X_{PR} = \sum_{P\in G} X_{TP}D_{PR}(S).$$

把表示矩阵的值代入，得 $X_{(TS)R} = X_{T(SR)}$．注意，现在 X 矩阵的行列指标都是群元素．由群元素乘积满足结合律知，在 X 矩阵中如下矩阵元素必须相等，即它们的行列指标作为群元素相乘，乘积相同．可以让行列指标相乘等于某一确定元素(例如 E)的那些 X 矩阵元素为 1，其余矩阵元素为零，就得到所需要的相似变换矩阵 X．设在群的乘法表中行和列的排列次序，与 X 矩阵的行列指标排列相同，

把与乘法表中填该确定元素(例如 E)的位置相同的那些 X 矩阵元素取为 1，其余为零．例如对正三角形对称群 D_3，取此确定元素为恒元 E，由乘法表得

D_3 群乘法表

	E	D	F	A	B	C
E	E	D	F	A	B	C
D	D	F	E	B	C	A
F	F	E	D	C	A	B
A	A	C	B	E	F	D
B	B	A	C	D	E	F
C	C	B	A	F	D	E

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

请读者根据 D_3 群的乘法表具体写出生成元在正则表示及其等价表示中的矩阵形式，并检验它们确通过此 X 相似变换相联系．

由于此确定元素的不同选择，这样算得的 X 矩阵，线性无关的有 g 个，g 是群的阶数．这是因为正则表示约化后，每一个不可约表示出现的重数等于它的维数 m_j，故与约化后表示的所有表示矩阵对易的矩阵可以包含$\sum_j m_j^2=g$ 个参数．

8. 设有限群 G 的类C_α 包含$n(\alpha)$个元素，在群代数中这些元素之和记作 W．设 $D^j(G)$是群 G 的不可约表示、维数为 m_j，类 C_α 的特征标为χ_α^j．试证明 W 在此不可约表示中的表示矩阵是常数矩阵，并计算此常数．

证　设在群 G 中，类 C_α 包含 $n(\alpha)$个元素 R_k，这些元素在 m_j 维不可约表示 $D^j(R)$中的特征标为 χ_α^j．又设 S 是群 G 中任意元素，则 $SR_kS^{-1}\in C_\alpha$．很明显，如果 $R_k\neq R_i$，则 $SR_kS^{-1}\neq SR_iS^{-1}$．因此，$SR_kS^{-1}$的集合仍是类 C_α．在群代数中，把属于类 C_α 的元素之和记作 W，

$$W=\sum_{R_k\in C_\alpha}R_k,\qquad D^j(W)=\sum_{R_k\in C_\alpha}D^j(R_k),$$

$$\mathrm{tr}D^j(W)=n(\alpha)\chi_\alpha^j,$$

则 $SWS^{-1}=W$，$D^j(S)D^j(W)D^j(S)^{-1}=D^j(W)$．按照舒尔定理，$D^j(W)=c\mathbf{1}$，取矩阵迹得 $n(\alpha)\chi_\alpha^j=m_jc$．把 c 代入上式得

$$D^j(W)=\left\{\frac{n(\alpha)\chi_\alpha^j}{m_j}\right\}\mathbf{1}.$$

9. 证明有限群包含的相逆类的对数等于不等价不可约的非自共轭表示的对数，因此自逆类的个数等于不等价不可约的自共轭表示的个数.

证 设有限群 G 有 n 个自逆类 C_i，m 对相逆类 C_α 和 C_α^{-1}，在不可约表示中，自逆类的特征标是实数，相逆类的特征标互为复共轭. 我们又知道，自共轭表示的特征标是实数，互为复共轭的一对非自共轭表示，它们的特征标也互为复共轭，因此每一对非自共轭表示的特征标之和是实数，特征标之差，对自逆类为零，对相逆类是互差负号的一对虚数.

由于群 G 所有不等价不可约表示的特征标，作为类的函数，互相线性无关，且构成类函数的完备基，任何类函数都可表为群 G 各不等价不可约表示特征标的线性组合. 一方面，既然各对非自共轭表示的特征标之差，作为类的函数是线性无关的，非自共轭表示的对数就不能大于相逆类的对数 m. 另一方面，定义 m 个类的函数 F_β，

$$F_\beta(C_i) = 0,\quad F_\beta(C_\alpha) = -F_\beta(C_\alpha^{-1}) = \delta_{\alpha\beta}.$$

这些函数可以表为群 G 各不等价不可约表示特征标的线性组合. 由于函数的具体形式，在此线性组合式中，自共轭表示的特征标不会出现，每一对非自共轭表示的特征标也都以差的形式出现，因此这些差式的项数，也就是非自共轭表示的对数不能小于 m. 合起来，非自共轭表示的对数等于群中相逆类的对数 m，由此，自共轭表示的个数等于群中自逆类的个数 n. 证完.

10. 若群 G 等于两子群的直乘，$G = H_1 \otimes H_2$，证明群 G 的不等价不可约表示都可表为两子群不等价不可约表示的直乘.

证 设 $R \in H_1$，$S \in H_2$，$RS = SR \in G = H_1 \otimes H_2$. $D^j(H_1)$是子群 H_1 的不可约表示，表示空间是 $\mathscr{L}_1$，$D^k(H_2)$是子群 H_2 的不可约表示，表示空间是 $\mathscr{L}_2$. $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$ 分别对群 H_1 和 H_2 不存在非平庸的不变子空间.

我们首先证明子群不可约表示的直乘构成直乘群的表示. 让矩阵 $D(RS) = D^j(R) \times D^k(S)$与群 G 元素 RS 一一或一多对应，矩阵 $D(R'S') = D^j(R') \times D^k(S')$与群 G 元素 $R'S'$对应，则它们的乘积仍按同一规则与元素$(RS)(R'S') = RR'SS'$对应，

$$\begin{aligned}
D(RS)D(R'S') &= [D^j(R) \times D^k(S)][D^j(R') \times D^k(S')] \\
&= [D^j(R)D^j(R')] \times [D^k(S)D^k(S')] \\
&= D^j(RR') \times D^k(SS') \\
&= D(RR'SS') = D(RSR'S'),
\end{aligned}$$

因此 $D(RS)$的集合构成群 G 的表示，记作 $D(G)=D^j(H_1)\times D^k(H_2)$，对应的表示空间是 $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$ 的直乘空间，记作 $\mathscr{L}$. 设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 分别是空间 $\mathscr{L}_1$ 和 $\mathscr{L}_2$ 中的任意矢量，则它们的直乘 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是直乘空间 $\mathscr{L}$ 的任意矢量.

其次证明此表示是不可约的. 按照不可约表示的定义，要证明它的表示空间不存在非平庸的不变子空间. 设空间 $\mathscr{L}$ 中存在关于 $D(G)$不变的非零子空间 $\mathscr{L}'$，它至少包含一个非零矢量，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. 由于 $\mathscr{L}'$对$D^j(H_1)\times D^j(E)$不变，它必须包含子空间 $\mathscr{L}_1\times\boldsymbol{b}$ 中的所有矢量. 又由于 $\mathscr{L}'$对 $D^j(E)\times D^j(H_2)$不变，它必须包含空间 $\mathscr{L}_1\times\mathscr{L}_2=\mathscr{L}$ 中的全部矢量，因此 $\mathscr{L}=\mathscr{L}'$.

如果对群 G 的每一个可约表示，都能找到非常数矩阵与它所有表示矩阵对易（在常见的群中，这一性质都成立），则关于表示 $D(G)$的不可约性，还有更简单的证明方法. 根据舒尔定理，与所有表示矩阵 $D^j(R)\times D^j(E)$对易的矩阵只能取 $\mathbf{1}\times X$ 的形式，但它又与所有表示矩阵 $D^j(E)\times D^j(S)$对易，故 X 只能是常数矩阵，因此 $D(G)$是群 G 的不可约表示.

第三讨论表示的完备性. 如果把 $D^j(R)$或 $D^j(S)$换成另一个不等价的不可约表示，用反证法很容易证明，直乘的表示也变成另一个不等价的不可约表示. 对有限群，不等价不可约表示 $D^j(R)$的个数等于子群 H_1 的类数，不等价不可约表示 $D^k(S)$的个数等于子群 H_2 的类数，而直乘群 G 的类数等于两子群类数的乘积，正好等于由表示的直乘得到的群 G 不等价不可约表示的个数. 因此，直乘群的不可约表示都可表为子群不可约表示的直乘.

对无限群，表示完备性的证明比较困难，我们只讨论一个常见的特殊情况，即群 G 的不可约表示 $D(G)$至少关于一个子群的分导表示是完全可约的. 设 $D(G)$是群 G 的任一不可约表示，$D(G)$关于子群 H_2 的分导表示一般是可约表示，可取既约形式

$$D(S)=D^k(S)\oplus D^{k'}(S)\oplus\cdots,\quad S\in H_2,$$

就是说，矩阵 $D(S)$的行(列)可用两个指标 $k\mu$ 标记，k 标记既约表示中出现的表示，μ 标记此表示的行(列). 对 $S\in H_2$，当 $k\neq k'$时，$D_{k\mu,k'\nu}(S)=0$. 对子群 H_1 中的任意元素 R，它的表示矩阵 $D(R)$的行(列)也用此两个指标 $k\mu$ 标记，当然 $D_{k\mu,k'\nu}(R)$不一定等于零. 下面我们来证明，当表示 $D^k(H_2)$和 $D^{k'}(H_2)$不等价时，$D_{k\mu,k'\nu}(R)$一定为零.

设 $D^k(H_2)$和 $D^{k'}(H_2)$是子群 H_2 的两不等价的不可约表示，在 $D(R)$中与此两表示相联系的非对角子矩阵是 $D_{k\cdot,k'\cdot}(R)$. 由于 $D(R)$可与所有 $D(S)$对易，$D(R)D(S)=D(S)D(R)$，在与该子矩阵所在位置处，有 $D_{k\cdot,k'\cdot}(R)D^{k'}(S)=D^k(S)D_{k\cdot,k'\cdot}(R)$，按照舒尔定理，$D_{k\cdot,k'\cdot}(R)=0$.

因此，在 $D(G)$关于子群 H_2 的分导表示的分解中，如果出现不等价的不可约表示，则 $D(R)$和 $D(S)$都变成方块矩阵，它们的乘积也是相同形式的方块矩阵，于是 $D(G)$是可约表示，与假设矛盾．这样，$D(S)$的分解式可取 $D(S)=1\times D^k(S)$形式．因为 $D(R)$可与 $D(S)$对易，所以 $D(R)$只能取 $D^j(R)\times 1$ 形式，$D^j(R)$的集合构成 H_1 群的表示．再考虑到 $D(G)$的不可约性，$D^j(R)$必须是子群 H_1 的不可约表示．因此

$$D(RS) = D^j(R) \times D^k(S).$$

11. 设 D_3群元素是在二维空间中的坐标变换：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad R \in D_3,$$

取生成元 D 和 A，它们的变换矩阵正是它们在二维表示 $D^E(D_3)$中的表示矩阵：

$$D^E(D) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad D^E(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

已知下列函数基架设的四维函数空间对 D_3群保持不变：

$$\psi_1(x,y) = x^3, \qquad \psi_2(x,y) = x^2 y,$$

$$\psi_3(x,y) = xy^2, \qquad \psi_4(x,y) = y^3.$$

试计算 D_3 群在此空间关于这组函数基的线性表示，即计算 D_3 群生成元在此表示中的表示矩阵，然后，把此表示约化为 D_3 群不可约表示的直和，把此函数基组合为分属各不等价不可约表示的函数基．

解 首先要按照公式

$$P_R\psi_\mu(x) = \psi_\mu(R^{-1}x) = \sum_\nu \psi_\nu(x) D_{\nu\mu}(R),$$

计算 D_3 群生成元 D 和 A 在给定基架设的四维空间中的表示矩阵，公式中的 $R^{-1}x = x''$是一种缩写，写全了是

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

对元素 D 有

$$x'' = (-x + \sqrt{3}y)/2, \qquad y'' = (-\sqrt{3}x - y)/2,$$

$$\begin{aligned}
P_D\psi_1(x,y) &= \psi_1(x'',y'') = \{-x^3 + 3\sqrt{3}x^2y - 9xy^2 + 3\sqrt{3}y^3\}/8 \\
&= \{-\psi_1 + 3\sqrt{3}\psi_2 - 9\psi_3 + 3\sqrt{3}\psi_4\}/8, \\
P_D\psi_2(x,y) &= \psi_2(x'',y'') = \{-\sqrt{3}x^3 + 5x^2y - \sqrt{3}xy^2 - 3y^3\}/8 \\
&= \{-\sqrt{3}\psi_1 + 5\psi_2 - \sqrt{3}\psi_3 - 3\psi_4\}/8, \\
P_D\psi_3(x,y) &= \psi_3(x'',y'') = \{-3x^3 + \sqrt{3}x^2y + 5xy^2 + \sqrt{3}y^3\}/8 \\
&= \{-3\psi_1 + \sqrt{3}\psi_2 + 5\psi_3 + \sqrt{3}\psi_4\}/8, \\
P_D\psi_4(x,y) &= \psi_4(x'',y'') \\
&= \{-3\sqrt{3}x^3 - 9x^2y - 3\sqrt{3}xy^2 - y^3\}/8 \\
&= \{-3\sqrt{3}\psi_1 - 9\psi_2 - 3\sqrt{3}\psi_3 - \psi_4\}/8.
\end{aligned}$$

由此得

$$D(D) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} & -3 & -3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 5 & \sqrt{3} & -9 \\ -9 & -\sqrt{3} & 5 & -3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

对元素 A 有

$$x'' = x, \qquad y'' = -y,$$

$$P_A\psi_1(x,y) = \psi_1(x'',y'') = x^3 = \psi_1,$$

$$P_A\psi_2(x,y) = \psi_2(x'',y'') = -x^2y = -\psi_2,$$

$$P_A\psi_3(x,y) = \psi_3(x'',y'') = xy^2 = \psi_3,$$

$$P_A\psi_4(x,y) = \psi_4(x'',y'') = -y^3 = -\psi_4.$$

由此得

$$D(A)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

因此

$$\chi(D)=1=\chi^{A_1}(D)+\chi^{A_2}(D)+\chi^{E}(D),$$
$$\chi(A)=0=\chi^{A_1}(A)+\chi^{A_2}(A)+\chi^{E}(A).$$

要找相似变换 X，使

$$D(D)X=\frac{X}{2}\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-1&-\sqrt{3}\\0&0&\sqrt{3}&-1\end{pmatrix},$$

$$D(A)X=X\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

由后式得

$$X=\begin{pmatrix}a_1&0&c_1&0\\0&b_1&0&d_1\\a_2&0&c_2&0\\0&b_2&0&d_2\end{pmatrix},$$

代入前式，得

$$\begin{pmatrix} -a_1-3a_2 & -\sqrt{3}(b_1+3b_2) & -c_1-3c_2 & -\sqrt{3}(d_1+3d_2) \\ \sqrt{3}(3a_1+a_2) & 5b_1-9b_2 & \sqrt{3}(3c_1+c_2) & 5d_1-9d_2 \\ -9a_1+5a_2 & -\sqrt{3}(b_1+3b_2) & -9c_1+5c_2 & -\sqrt{3}(d_1+3d_2) \\ \sqrt{3}(3a_1+a_2) & -3b_1-b_2 & \sqrt{3}(3c_1+c_2) & -3d_1-d_2 \end{pmatrix}$$

$$= 4\begin{pmatrix} 2a_1 & 0 & -c_1 & -\sqrt{3}c_1 \\ 0 & 2b_1 & \sqrt{3}d_1 & -d_1 \\ 2a_2 & 0 & -c_2 & -\sqrt{3}c_2 \\ 0 & 2b_2 & \sqrt{3}d_2 & -d_2 \end{pmatrix},$$

解得 $a_2=-3a_1$，$b_1=-3b_2$ 和 $c_1=c_2=d_1=d_2$. 选择三个任意常数，得 X 矩阵为

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

用 X 矩阵组合波函数，得属各不可约表示 Γ 的函数基 ϕ_ρ^Γ 为

$$\phi^{A_1}(x,y)=\psi_1(x,y)-3\psi_3(x,y)=x(x^2-3y^2),$$

$$\phi^{A_2}(x,y)=3\psi_2(x,y)-\psi_4(x,y)=y(3x^2-y^2),$$

$$\phi_1^E(x,y)=\psi_1(x,y)+\psi_3(x,y)=x(x^2+y^2),$$

$$\phi_2^E(x,y)=\psi_2(x,y)+\psi_4(x,y)=y(x^2+y^2).$$

12. O群有个不变子群 D_2，它由恒元和绕坐标轴转动 π 角的变换构成. 具体建立它的商群和 D_3 群的同构关系，并由此计算 O 群二维不可约表示的特征标和生成元的表示矩阵.

解　立方体的固有对称群 O 包含三个四次轴，四个三次轴和六个二次轴，阶 $g=24$. 四次轴沿坐标轴方向，生成元分别记作 T_x，T_y 和 T_z. 三次轴正向沿下面四个

方向，生成元分别记作 R_j：

$$R_1:(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)/\sqrt{3},\quad R_2:(\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z)/\sqrt{3},$$

$$R_3:(-\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)/\sqrt{3},\quad R_4:(-\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z)/\sqrt{3}.$$

二次轴沿下面六个方向，生成元分别记作 S_k：

$$S_1:(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y)/\sqrt{2},\quad S_2:(\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y)/\sqrt{2},$$

$$S_3:(\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)/\sqrt{2},\quad S_4:(\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z)/\sqrt{2},$$

$$S_5:(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_z)/\sqrt{2},\quad S_6:(\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_z)/\sqrt{2}.$$

关于子群 T 元素的乘法表已由第二章第 15 题给出，余下元素间的乘积关系可由下面陪集公式算得：

$$S_1E=S_1,\quad S_1T_x^2=T_z,\quad S_1T_y^2=T_z^3,\quad S_1T_z^2=S_2,$$

$$S_1R_1=T_x^3,\quad S_1R_2=S_4,\quad S_1R_3=T_x,\quad S_1R_4=S_3,$$

$$S_1R_1^2=T_y,\quad S_1R_2^2=S_5,\quad S_1R_3^2=T_y^3,\quad S_1R_4^2=S_6;$$

$$ES_1=S_1,\quad T_x^2S_1=T_z^3,\quad T_y^2S_1=T_z,\quad T_z^2S_1=S_2,$$

$$R_1S_1=T_y^3,\quad R_2S_1=S_5,\quad R_3S_1=T_y,\quad R_4S_1=S_6,$$

$$R_1^2S_1=T_x,\quad R_2^2S_1=S_4,\quad R_3^2S_1=T_x^3,\quad R_4^2S_1=S_3.$$

不变子群 D_2 由四个元素 E，T_x^2，T_y^2 和 T_z^2 构成，陪集为 R_1D_2，$R_1^2D_2$，S_1D_2，S_3D_2 和 S_5D_2．容易证明这五个陪集不重复，因为五个元素 R_1，R_1^2，S_1，S_3 和 S_5 中的任意一个元素的逆元与不相同的另一个元素相乘都不在子群内．根据这五个元素的平方在子群或哪个陪集中，就可以确定这些陪集作为商群中元素的阶数，即 R_1D_2 和 $R_1^2D_2$ 是三阶元素，S_1D_2，S_3D_2 和 S_5D_2 是二阶元素，因而商群与 D_3 群同构．可以让 R_1D_2 和 $R_1^2D_2$ 分别对应 D_3 群的三阶元素 D 和 F．让 S_1D_2 与 D_3 群中的二阶元素 A 对应，由于在 D_3 群中 $DA=B$、和在 O 群中 $R_1S_1=T_y^3=S_5T_x^2$，必须让 S_5D_2 与 D_3 群中的 B 对应，余下的 S_3D_2 与 D_3 群中的 C 对应．因为当初在建立 D_3 群的乘法表时，只用到了各元素的阶和乘积关系 $DA=B$，其他乘积关系都可由它们推导出来，所以在这样的对应规律下，元素乘积仍按同一规律一一对应．

D_3 群有一个二维不可约表示，这表示也是 O 群的非真实不可约表示．注意在 O 群该表示中，属同一复元素（不变子群 D_2 或其陪集）的元素的表示矩阵及其特征

标相同,下面只对各复元素中的一个代表元素写出表示矩阵和特征标

$$\chi(E)=2,\ \chi(R_1)=\chi(R_1^2)=-1,$$

$$\chi(S_1)=\chi(S_3)=\chi(S_5)=0,$$

$$D(E)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad D(R_1)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-\sqrt{3}\\\sqrt{3}&-1\end{pmatrix},$$

$$D(R_1^2)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&-1\end{pmatrix},\quad D(S_1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},$$

$$D(S_5)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&\sqrt{3}\\\sqrt{3}&1\end{pmatrix},\qquad D(S_3)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-\sqrt{3}\\-\sqrt{3}&1\end{pmatrix}.$$

13. 群 G 由 12 个元素组成,它的元素乘法表列于下表. 1) 找出群 G 各元素的逆元;2) 指出哪些元素可与群中任一元素乘积对易;3) 列出各元素的阶;4) 找出群 G 各类包含的元素;5) 找出群 G 包含哪些不变子群,列出它们的陪集,并指出它们的商群与什么群同构;6) 找出群 G 不可约表示的特征标表(方法不限). 7) 试讨论群 G 是否与 D_6 群同构, 是否与 T 群同构, 如不同构请简要说明理由.

	E	A	B	C	D	F	I	J	K	L	M	N
E	E	A	B	C	D	F	I	J	K	L	M	N
A	A	B	E	I	L	K	N	D	M	J	F	C
B	B	E	A	N	J	M	C	L	F	D	K	I
C	C	K	L	D	E	B	M	I	N	F	J	A
D	D	N	F	E	C	L	J	M	A	B	I	K
F	F	D	N	K	M	I	E	B	L	C	A	J
I	I	M	J	L	A	E	F	N	C	K	D	B
J	J	I	M	B	N	D	L	K	E	A	C	F
K	K	L	C	M	F	N	A	E	J	I	B	D
L	L	C	K	A	I	J	D	F	B	E	N	M
M	M	J	I	F	K	C	B	A	D	N	E	L
N	N	F	D	J	B	A	K	C	I	M	L	E

解 1) $A^{-1}=B$, $C^{-1}=D$, $F^{-1}=I$, $J^{-1}=K$,而 E,L,M 和 N 是自逆的.

2) 只有恒元 E 可与群中任一元素对易.

3) 恒元 E 一阶,元素 L,M 和 N 二阶,其余元素 A,B,C,D,F,I,J 和 K 都是三阶.

4) 群 G 含四个类,$\{E\}$和$\{L,M,N\}$是自逆类,$\{A,C,F,J\}$和$\{B,D,I,K\}$是相逆类.

5) 群 G 只有一个非平庸的不变子群:$\{E,L,M,N\}$,它的指数是 3,陪集是$\{A,C,F,J\}$和$\{B,D,I,K\}$,商群与 C_3 群同构.

6) 根据群 G 的类数知群 G 有四个不等价不可约表示,又由群 G 的阶数为 12,知群 G 有三个一维表示和一个三维不可约表示,$1^2+1^2+1^2+3^2=12$. 由不变子群的商群定出群 G 的三个一维表示. 元素在三维不可约表示中的特征标可由特征标的正交性定出.

	E	(L,M,N)	(A,C,F,J)	(B,D,I,K)
A	1	1	1	1
E	1	1	$e^{-i2\pi/3}$	$e^{i2\pi/3}$
E′	1	1	$e^{i2\pi/3}$	$e^{-i2\pi/3}$
T	3	−1	0	0

7) 根据群 G 元素的阶数分布和包含的类,可知群 G 与 T 群同构,与 D_6 群不同构.

14. 试计算第二章第 16 题给出的群的特征标表.

解 群 G 有 12 个元素,分属 6 个类,由于 $1^2+1^2+1^2+1^2+2^2+2^2=12$,群 G 有四个一维和两个二维不等价不可约表示. 不变子群$\{E,M,N\}$,陪集为$\{A,K,L\}$,$\{B,C,D\}$和$\{F,I,J\}$,商群同构于四阶循环群 C_4,其中作为复元素,$\{A,K,L\}$是二阶元素. 商群的不可约表示也是群 G 的不可约表示,由商群 C_4 的表示得到群 G 的四个一维不等价不可约表示. 不变子群$\{E, A\}$,陪集为$\{B,F\}$,$\{C,I\}$,$\{D, J\}$, $\{K, M\}$和$\{L,N\}$,商群同构于正三角形对称群 D_3,其中作为复元素,$\{K,M\}$和$\{L,N\}$是三阶元素. D_3 群的二维不可约表示也是群 G 的二维不可约表示. 群 G 的另一个二维不可约表示可用前一个二维不可约表示和一个非自共轭的一维表示直乘得到. 这样就得到了群 G 的特征标表.

群 G 的特征标表

	E	A	BCD	FIJ	KL	MN
χ^1	1	1	1	1	1	1
χ^2	1	1	−1	−1	1	1
χ^3	1	−1	i	−i	−1	1
χ^4	1	−1	−i	i	−1	1
χ^5	2	2	0	0	−1	−1
χ^6	2	−2	0	0	1	−1

由商群 D_3 的二维不可约表示,可计算出群 G 二维不可约表示的表示矩阵.取生成元 K 和 B,它们分别与 D_3 群中元素 D 和 A 对应,有

$$D^5(B) = -\mathrm{i}D^6(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D^5(K) = -D^6(K) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

15. 用投影算符的方法把 T 群正则表示约化，设生成元 R_1 的表示矩阵是对角化的，在群代数中计算分属各不等价不可约表示各行的基 $\psi_{\mu\nu}$，和 T 群生成元在相应表示中的表示矩阵. 计算得的三维表示矩阵和通常用三维空间坐标变换方法算得的表示矩阵不一致，请找出它们间的相似变换.

解 在 T 群中,R_1 是三阶元素,它的本征值可取 ω^μ,其中 $\omega = \exp\{-\mathrm{i}2\pi/3\}$,$\mu = 0,1$ 和 2. 在 R_1 对角化的表象里,各不可约表示的行和列可用 R_1 本征值的幂次 μ 来标记. 先用投影算符计算 R_1 左乘和右乘的共同本征函数 $\Phi^{(\alpha)}_{\mu\nu}$:

$$R_1\Phi^{(\alpha)}_{\mu\nu} = \omega^\mu\Phi^{(\alpha)}_{\mu\nu}, \quad \Phi^{(\alpha)}_{\mu\nu}R_1 = \omega^\nu\Phi^{(\alpha)}_{\mu\nu},$$

$$P_\mu = \{E + \omega^{-\mu}R_1 + \omega^\mu R_1^2\}/3.$$

把投影算符作用在恒元 E 上,所乘因子是为了使公式简洁,

$$\begin{aligned}\Phi^{(1)}_{\mu\nu} = 9P_\mu EP_\nu &= (1 + \omega^{\nu-\mu} + \omega^{\mu-\nu})\{E + R_1\omega^{-\mu} + R_1^2\omega^\mu\} \\ &= 3\delta_{\mu\nu}\{E + R_1\omega^{-\mu} + R_1^2\omega^\mu\}.\end{aligned}$$

另外任选元素 T_z^2,用投影算符作用,应用 T 群的乘法表(见第二章第 15 题),得

$$\begin{aligned}\Phi^{(2)}_{\mu\nu} = 9P_\mu T_z^2 P_\nu &= T_z^2 + \omega^{-\nu} T_z^2 R_1 + \omega^{\nu} T_z^2 R_1^2 \\ &\quad + \omega^{-\mu+\nu} R_1 T_z^2 R_1^2 + \omega^{-\mu} R_1 T_z^2 + \omega^{-\mu-\nu} R_1 T_z^2 R_1 \\ &\quad + \omega^{\mu-\nu} R_1^2 T_z^2 R_1 + \omega^{\mu+\nu} R_1^2 T_z^2 R_1^2 + \omega^{\mu} R_1^2 T_z^2 \\ &= \{T_z^2 + \omega^{-\nu} R_2 + \omega^{\nu} R_4^2\} \\ &\quad + \omega^{\nu-\mu}\{T_x^2 + \omega^{-\nu} R_4 + \omega^{\nu} R_3^2\} \\ &\quad + \omega^{\mu-\nu}\{T_y^2 + \omega^{-\nu} R_3 + \omega^{\nu} R_2^2\}.\end{aligned}$$

在这两个函数展开式中已出现群 T 的全部元素，再把投影算符作用在其他群元素上，不会产生独立的新函数.

其次，选择类算符 $W = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$，它在不可约表示中取常数矩阵，系数为 $4\chi^j(R_1)/m_j$（见第 8 题），即在表示 A，E，E' 和 T 中 W 取值为 $4, 4\omega, 4\omega^2$ 和 0. 现在对确定的下标 μ 和 ν，计算 W 在波函数 $\Phi^{(a)}_{\mu\nu}$ 中的矩阵元和本征状态. 由于函数基的完备性，计算中我们只需要列出 E 和 T_z^2 的项，

$$\begin{aligned} W\Phi^{(1)}_{\mu\mu} &= 3\omega^{\mu}\{E + T_z^2\} + \cdots = \omega^{\mu}\{\Phi^{(1)}_{\mu\mu} + 3\Phi^{(2)}_{\mu\mu}\}, \\ W\Phi^{(2)}_{\mu\nu} &= \{E + T_z^2\}\omega^{\nu}\{1 + \omega^{\nu-\mu} + \omega^{\mu-\nu}\} + \cdots \\ &= \delta_{\mu\nu}\omega^{\mu}\{\Phi^{(1)}_{\mu\mu} + 3\Phi^{(2)}_{\mu\mu}\}. \end{aligned}$$

当 $\mu = \nu$ 时，W 在此函数基中的矩阵形式为

$$\omega^{\mu}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

本征值为 $4\omega^\mu$ 和 0，对应的本征矢量的转置分别为 $(1/3, 1)$ 和 $(1, -1)$，由此组合出分属表示 A，E，E' 和 T 的本征函数.

$$\begin{aligned} \Psi^A &= (1/3)\Phi^{(1)}_{00} + \Phi^{(2)}_{00} = E + R_1 + R_1^2 + T_x^2 + T_y^2 \\ &\quad + T_z^2 + R_4 + R_3 + R_2 + R_3^2 + R_2^2 + R_4^2, \\ \Psi^{E'} &= (1/3)\Phi^{(1)}_{11} + \Phi^{(2)}_{11} = E + T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 \\ &\quad + \omega^2(R_1 + R_4 + R_3 + R_2) + \omega(R_1^2 + R_3^2 + R_2^2 + R_4^2), \\ \Psi^{E} &= (1/3)\Phi^{(1)}_{22} + \Phi^{(2)}_{22} = E + T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 \\ &\quad + \omega(R_1 + R_4 + R_3 + R_2) + \omega^2(R_1^2 + R_3^2 + R_2^2 + R_4^2), \end{aligned}$$

$$\Psi^I_{\mu\mu} = c_{\mu\mu}\{\Phi^{(1)}_{\mu\mu} - \Phi^{(2)}_{\mu\mu}\}.$$

当 $\mu \neq \nu$ 时,分别只有一个基 $\Phi^{(2)}_{\mu\nu}$,它们都属于表示 T:

$$\Psi^T_{\mu\nu} = c_{\mu\nu}\Phi^{(2)}_{\mu\nu}.$$

所有这些基都是作为本征函数引入的,前面可乘一任意常数. 对一维表示,这常数就是归一化因子,对表示矩阵没有影响,可以略去,但对三维表示 T,常数的选择与表示矩阵有关. 为得到幺正表示,取归一化的基,$c_{00}=1/6$,$c_{10}=1/3$ 和 $c_{20}=1/3$,并在基 $\Psi^T_{\mu 0}$ 中确定另一生成元 T_z^2 的表示矩阵,计算中只需列出 E,T_x^2 和 T_z^2 的项,并注意 $T_z^2T_y^2 = T_x^2$.

$$\begin{aligned}
\Psi^T_{00} = &\{3E + 3R_1 + 3R_1^2 - T_x^2 - T_y^2 - T_z^2 - R_4 - R_3 \\
&- R_2 - R_3^2 - R_2^2 - R_4^2\}/6, \\
\Psi^T_{10} = &\{T_z^2 + R_2 + R_4^2 + \omega^2(T_x^2 + R_4 + R_3^2) \\
&+ \omega(T_y^2 + R_3 + R_2^2)\}/3, \\
\Psi^T_{20} = &\{T_z^2 + R_2 + R_4^2 + \omega(T_x^2 + R_4 + R_3^2) \\
&+ \omega^2(T_y^2 + R_3 + R_2^2)\}/3.
\end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned}
T_z^2\Psi^T_{00} &= (1/6)\{-E - T_x^2 + 3T_z^2 + \cdots\} \\
&= \{-\Psi^T_{00} + 2\Psi^T_{10} + 2\Psi^T_{20}\}/3 = \sum_\nu \Psi^T_{\nu 0}\bar{D}^T_{\nu 0}(T_z^2), \\
T_z^2\Psi^T_{10} &= (1/3)\{E + \omega T_x^2 + \cdots\} \\
&= \{2\Psi^T_{00} - \Psi^T_{10} + 2\Psi^T_{20}\}/3 = \sum_\nu \Psi^T_{\nu 0}\bar{D}^T_{\nu 1}(T_z^2), \\
T_z^2\Psi^T_{20} &= (1/3)\{E + \omega^2 T_x^2 + \cdots\} \\
&= \{2\Psi^T_{00} + 2\Psi^T_{10} - \Psi^T_{20}\}/3 = \sum_\nu \Psi^T_{\nu 0}\bar{D}^T_{\nu 2}(T_z^2).
\end{aligned}$$

由此得表示矩阵

$$\bar{D}^T(R_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \quad \bar{D}^T(T_z^2) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

其余函数基的可乘因子 $c_{\mu\nu}$，首先要满足归一化条件，而相位由表示矩阵和下面公式确定：

$$\Psi^T_{\mu\nu} T^2_z = \sum_{\rho} \overline{D}^T_{\nu\rho}(T^2_z)\Psi^T_{\mu\rho}.$$

$$\begin{aligned}
\Psi^T_{00} T^2_z &= (1/6)\{-E - T^2_x + 3T^2_z + \cdots\} \\
&= (1/3)\{-\Psi^T_{00} + 2\Psi^T_{01} + 2\Psi^T_{02}\}, \\
\Psi^T_{10} T^2_z &= (1/3)\{E + \omega T^2_x + \cdots\} \\
&= (1/3)\{-\Psi^T_{10} + 2\Psi^T_{11} + 2\Psi^T_{12}\}, \\
\Psi^T_{20} T^2_z &= (1/3)\{E + \omega^2 T^2_x + \cdots\} \\
&= (1/3)\{-\Psi^T_{20} + 2\Psi^T_{21} + 2\Psi^T_{22}\}.
\end{aligned}$$

对我们选择的函数基的形式，所有相位系数恰好为 1，即 $c_{11} = c_{22} = 1/6$，$c_{01} = c_{02} = c_{12} = c_{21} = 1/3$，于是

$$\begin{aligned}
\Psi^T_{01} = &\{T^2_z + \omega^2 R_2 + \omega R^2_4 + \omega T^2_x + R_4 + \omega^2 R^2_3 \\
&+ \omega^2 T^2_y + \omega R_3 + R^2_2\}/3, \\
\Psi^T_{02} = &\{T^2_z + \omega R_2 + \omega^2 R^2_4 + \omega^2 T^2_x + R_4 + \omega R^2_3 \\
&+ \omega T^2_y + \omega^2 R_3 + R^2_2\}/3, \\
\Psi^T_{11} = &\{3E - T^2_x - T^2_y - T^2_z + \omega^2(3R_1 - R_4 - R_3 - R_2) \\
&+ \omega(3R^2_1 - R^2_3 - R^2_2 - R^2_4)\}/6, \\
\Psi^T_{12} = &\{T^2_z + \omega R_2 + \omega^2 R^2_4 + \omega T^2_x + \omega^2 R_4 + R^2_3 \\
&+ \omega^2 T^2_y + R_3 + \omega R^2_2\}/3, \\
\Psi^T_{21} = &\{T^2_z + \omega^2 R_2 + \omega R^2_4 + \omega^2 T^2_x + \omega R_4 + R^2_3 \\
&+ \omega T^2_y + R_3 + \omega^2 R^2_2\}/3, \\
\Psi^T_{22} = &\{3E - T^2_x - T^2_y - T^2_z + \omega(3R_1 - R_4 - R_3 - R_2) \\
&+ \omega^2(3R^2_1 - R^2_3 - R^2_2 - R^2_4)\}/6.
\end{aligned}$$

通常是用三维空间坐标变换的办法计算 T 群的三维不可约表示 T 的表示矩阵，结果如下：

$$D^{I}(R_1)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad D^{T}(T_z^2)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

可通过相似变换 X 与上面计算的表示矩阵相联系. 对生成元 R_1,有

$$X^{-1}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\omega&0\\0&0&\omega^2\end{pmatrix},$$

算得

$$X=\begin{pmatrix}a&b&c\\a&b\omega^2&c\omega\\a&b\omega&c\omega^2\end{pmatrix},$$

再代入 $D^T(T_z^2)X=X\overline{D}^T(T_z^2)$,

$$\begin{pmatrix}-a&-b&-c\\-a&-b\omega^2&-c\omega\\a&b\omega&c\omega^2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-a+2b+2c&2a-b+2c&2a+2b-c\\-a+2b\omega^2+2c\omega&2a-b\omega^2+2c\omega&2a+2b\omega^2-c\omega\\-a+2b\omega+2c\omega^2&2a-b\omega+2c\omega^2&2a+2b\omega-c\omega^2\end{pmatrix}.$$

解得 $a=\omega b=\omega^2c=\sqrt{1/3}$,

$$X=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&\omega^2&\omega\\1&\omega&\omega^2\\1&1&1\end{pmatrix},\quad X^{-1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&1&1\\\omega&\omega^2&1\\\omega^2&\omega&1\end{pmatrix}.$$

16. 用投影算符的方法把 O 群正则表示约化，设生成元 R_1 的表示矩阵是对角化的，在群代数中计算分属各不等价不可约表示各行的基 $\psi_{\mu\nu}$，和 O 群生成元在相应表示中的表示矩阵. 计算得的三维表示矩阵和用三维空间坐标变

换方法得到的表示矩阵形式不一致，请找出一组等价表示间的相似变换.

解　在 O 群中，R_1 仍是三阶元素，它的本征值可取 ω^{μ}，$\mu=0$，1 和 2，$\omega=\exp\{-i2\pi/3\}$，而且 μ 的取值以 3 为周期，即 $\mu+3$ 和 μ 相同. 在 R_1 对角化的表象里，各不可约表示的行和列仍用 R_1 本征值的幂次 μ 来标记. 先用投影算符计算 R_1 左乘和右乘的共同本征函数 $\Phi_{\mu\nu}^{(a)}$. 把投影算符分别作用在 E 和 T_z^2 上得

$$\Phi_{\mu\nu}^{(1)} = 9P_{\mu}EP_{\nu} = 3\delta_{\mu\nu}\{E + R_1\omega^{-\mu} + R_1^2\omega^{\mu}\},$$

$$\begin{aligned}\Phi_{\mu\nu}^{(2)} &= 9P_{\mu}T_z^2P_{\nu} \\ &= T_z^2 + \omega^{-\nu}R_2 + \omega^{\nu}R_4^2 + \omega^{\nu-\mu}\{T_x^2 + \omega^{-\nu}R_4 + \omega^{\nu}R_3^2\} \\ &\quad + \omega^{\mu-\nu}\{T_y^2 + \omega^{-\nu}R_3 + \omega^{\nu}R_2^2\}.\end{aligned}$$

再应用第二章第 15 题给出的 T 群元素的乘法表和第 12 题给出的陪集乘积关系，分别把投影算符作用在 T_z 和 S_2 上，得

$$\begin{aligned}\Phi_{\mu\nu}^{(3)} = 9P_{\mu}T_zP_{\nu} &= T_z + \omega^{-\nu}T_zR_1 + \omega^{\nu}T_zR_1^2 + \omega^{-\mu+\nu}R_1T_zR_1^2 \\ &\quad + \omega^{-\mu}R_1T_z + \omega^{-\mu-\nu}R_1T_zR_1 + \omega^{\mu-\nu}R_1^2T_zR_1 \\ &\quad + \omega^{\mu+\nu}R_1^2T_zR_1^2 + \omega^{\mu}R_1^2T_z \\ &= T_z + \omega^{-\nu}S_3 + \omega^{\nu}T_y^3 + \omega^{\nu-\mu}\{T_x + \omega^{-\nu}S_5 + \omega^{\nu}T_z^3\} \\ &\quad + \omega^{\mu-\nu}\{T_y + \omega^{-\nu}S_1 + \omega^{\nu}T_x^3\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{\mu\nu}^{(4)} &= 9P_{\mu}S_2P_{\nu} \\ &= S_2 + \omega^{-\nu}S_2R_1 + \omega^{\nu}S_2R_1^2 \\ &\quad + \omega^{-\mu+\nu}R_1S_2R_1^2 + \omega^{-\mu}R_1S_2 + \omega^{-\mu-\nu}R_1S_2R_1 \\ &\quad + \omega^{\mu-\nu}R_1^2S_2R_1 + \omega^{\mu+\nu}R_1^2S_2R_1^2 + \omega^{\mu}R_1^2S_2 \\ &= \{S_2^2 + \omega^{-\nu}S_4 + \omega^{\nu}S_6\}\{1 + \omega^{-\mu-\nu} + \omega^{\mu+\nu}\} \\ &= 3\delta_{\mu(-\nu)}\{S_2 + \omega^{\mu}S_4 + \omega^{-\mu}S_6\}.\end{aligned}$$

其中 $\delta_{\mu(-\nu)}$在$(\mu+\nu)$等于 3 的倍数时等于 1，其余为零. 在这四类函数基的展开式中已包括 O 群的全部元素，因此是完备的.

其次，为了区分各不等价不可约表示，选择类算符 $W=T_x+T_x^3+T_y+T_y^3+T_z+T_z^3$，它在各不可约表示 A_1，A_2，E，T_1 和 T_2 中的取值分别为 6，-6，0，2 和 -2. 现在对确定的下标 μ 和 ν，计算 W 在波函数 $\Phi_{\mu\nu}^{(a)}$ 中的矩阵元和本征

状态．由于函数基的完备性，我们只需要列出 E，T_z^2，T_z 和 S_2 的项．为此先从乘法表中查得如下乘积公式，它们在 W 左乘到波函数 $\Phi_{\mu\nu}^{(\alpha)}$ 上时会用到：

$$T_xT_x^3 = T_x^3T_x = T_yT_y^3 = T_y^3T_y = T_zT_z^3 = T_z^3T_z = E,$$

$$T_zE = T_z^3T_z^2 = T_xR_2^2 = T_x^3R_4^2 = T_yR_3 = T_y^3R_1 = T_z,$$

$$T_zT_z = T_z^3T_z^3 = T_xS_3 = T_x^3S_4 = T_yS_6 = T_y^3S_5 = T_z^2,$$

$$T_zT_y^2 = T_z^3T_x^2 = T_xR_4^2 = T_x^3R_2^2 = T_yR_4 = T_y^3R_2 = S_2.$$

于是有

$$W\Phi_{\mu\mu}^{(1)} = 3T_z\{1+\omega^{-\mu}\} + \cdots = 3\omega^{\mu}(3\delta_{\mu0}-1)\Phi_{\mu\mu}^{(3)},$$

$$\begin{aligned} W\Phi_{\mu\nu}^{(2)} = {} & T_z\{1+\omega^{\mu}+\omega^{\nu}+\omega^{\mu+\nu}\} \\ & + S_2\{\omega^{\nu-\mu}+\omega^{\mu-\nu}+\omega^{-\mu}+\omega^{-\nu}+\omega^{\mu}+\omega^{\nu}\} + \cdots \\ = {} & \omega^{-\mu-\nu}(1-9\delta_{\mu0}\delta_{\nu0}-3\delta_{\mu0}-3\delta_{\nu0})\Phi_{\mu\nu}^{(3)} \\ & + \delta_{\mu(-\nu)}(3\delta_{\mu0}-1)\Phi_{\mu\nu}^{(4)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W\Phi_{\mu\nu}^{(3)} = {} & E\{\omega^{\mu}+\omega^{\nu-\mu}+\omega^{\nu}+\omega^{\mu-\nu}+\omega^{-\nu-\mu}+1\} \\ & + T_z^2\{1+\omega^{-\nu-\mu}+\omega^{-\nu}+\omega^{-\mu}\} + \cdots \\ = {} & \delta_{\mu\nu}(3\delta_{\mu0}-1)\omega^{-\mu}\Phi_{\mu\mu}^{(1)} + \omega^{\mu+\nu}(1+9\delta_{\mu0}\delta_{\nu0} \\ & -3\delta_{\mu0}-3\delta_{\nu0})\Phi_{\mu\nu}^{(2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W\Phi_{\mu\nu}^{(4)} = {} & 3\delta_{\mu(-\nu)}T_z^2\{\omega^{\mu}+\omega^{-\mu}\} + \cdots \\ = {} & 3\delta_{\mu(-\nu)}(3\delta_{\mu0}-1)\Phi_{\mu\nu}^{(2)}. \end{aligned}$$

当 $\mu=\nu=0$ 时，有四个基，$\Phi_{00}^{(1)}$，$\Phi_{00}^{(2)}$，$\Phi_{00}^{(3)}$ 和 $\Phi_{00}^{(4)}$，W 在这组基中的矩阵形式及其本征矢量为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

本征值分别为 6，−6，2 和 −2，相应的本征函数分属表示 A_1，A_2，T_1 和 T_2：

$$
\begin{aligned}
\Psi_{00}^{A_1} &= \Phi_{00}^{(1)}/3 + \Phi_{00}^{(2)} + \Phi_{00}^{(3)} + \Phi_{00}^{(4)}/3 \\
&= E + R_1 + R_1^2 + T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 + R_2 + R_2^2 \\
&\quad + R_3 + R_3^2 + R_4 + R_4^2 + T_x + T_x^3 + T_y + T_y^3 \\
&\quad + T_z + T_z^3 + S_1 + S_3 + S_5 + S_2 + S_4 + S_6, \\
\Psi_{00}^{A_2} &= \Phi_{00}^{(1)}/3 + \Phi_{00}^{(2)} - \Phi_{00}^{(3)} - \Phi_{00}^{(4)}/3 \\
&= E + R_1 + R_1^2 + T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 + R_2 + R_2^2 \\
&\quad + R_3 + R_3^2 + R_4 + R_4^2 - T_x - T_x^3 - T_y - T_y^3 \\
&\quad - T_z - T_z^3 - S_1 - S_3 - S_5 - S_2 - S_4 - S_6, \\
\Psi_{00}^{T_1} &= b_{00}\{\Phi_{00}^{(1)} - \Phi_{00}^{(2)} + \Phi_{00}^{(3)} - \Phi_{00}^{(4)}\} \\
&= b_{00}\{3E + 3R_1 + 3R_1^2 - T_x^2 - T_y^2 - T_z^2 - R_2 - R_2^2 \\
&\quad - R_3 - R_3^2 - R_4 - R_4^2 + T_x + T_x^3 + T_y + T_y^3 \\
&\quad + T_z + T_z^3 + S_1 + S_3 + S_5 - 3S_2 - 3S_4 - 3S_6\}, \\
\Psi_{00}^{T_2} &= c_{00}\{\Phi_{00}^{(1)} - \Phi_{00}^{(2)} - \Phi_{00}^{(3)} + \Phi_{00}^{(4)}\} \\
&= c_{00}\{3E + 3R_1 + 3R_1^2 - T_x^2 - T_y^2 - T_z^2 - R_2 - R_2^2 \\
&\quad - R_3 - R_3^2 - R_4 - R_4^2 - T_x - T_x^3 - T_y - T_y^3 \\
&\quad - T_z - T_z^3 - S_1 - S_3 - S_5 + 3S_2 + 3S_4 + 3S_6\}.
\end{aligned}
$$

每个波函数前面都可乘一任意常数．对一维表示，这常数就是归一化因子，对表示矩阵没有影响，可以略去，但对二维或三维表示，常数的选择与表示矩阵有关，因此暂时保留此常数．

当 $\mu=\nu\neq 0$ 时，有三个基，$\Phi_{\mu\mu}^{(1)}$，$\Phi_{\mu\mu}^{(2)}$ 和 $\Phi_{\mu\mu}^{(3)}$，W 在这组基中的矩阵形式及其本征矢量为

$$
\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\omega^{-\mu} \\ 0 & 0 & \omega^{-\mu} \\ -3\omega^{\mu} & \omega^{\mu} & 0 \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2\omega^{\mu} \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2\omega^{\mu} \end{pmatrix},
$$

本征值为 0，2 和 −2，相应的本征函数分属表示 E，T_1 和 T_2：

$$
\begin{aligned}
\Psi^{E}_{\mu\mu} &= a_{\mu\mu}\{\Phi^{(1)}_{\mu\mu}/3 + \Phi^{(2)}_{\mu\mu}\} \\
&= a_{\mu\mu}\{E + T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 + \omega^{-\mu}(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) \\
&\quad + \omega^{\mu}(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2)\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Psi^{T_1}_{\mu\mu} &= b_{\mu\mu}\{\Phi^{(1)}_{\mu\mu} - \Phi^{(2)}_{\mu\mu} - 2\omega^{\mu}\Phi^{(3)}_{\mu\mu}\} \\
&= b_{\mu\mu}\{3E - T_x^2 - T_y^2 - T_z^2 - 2S_1 - 2S_3 - 2S_5 \\
&\quad + \omega^{-\mu}(3R_1 - R_2 - R_3 - R_4 - 2T_x^3 - 2T_y^3 - 2T_z^3) \\
&\quad + \omega^{\mu}(3R_1^2 - R_2^2 - R_3^2 - R_4^2 - 2T_x - 2T_y - 2T_z)\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Psi^{T_2}_{\mu\mu} &= c_{\mu\mu}\{\Phi^{(1)}_{\mu\mu} - \Phi^{(2)}_{\mu\mu} + 2\omega^{\mu}\Phi^{(3)}_{\mu\mu}\} \\
&= c_{\mu\mu}\{3E - T_x^2 - T_y^2 - T_z^2 - 2S_1 + 2S_3 + 2S_5 \\
&\quad + \omega^{-\mu}(3R_1 - R_2 - R_3 - R_4 + 2T_x^3 + 2T_y^3 + 2T_z^3) \\
&\quad + \omega^{\mu}(3R_1^2 - R_2^2 - R_3^2 - R_4^2 + 2T_x + 2T_y + 2T_z)\}.
\end{aligned}
$$

当 $\mu+\nu=3$ 时，有三个基，$\Phi^{(2)}_{\mu\nu}$，$\Phi^{(3)}_{\mu\nu}$ 和 $\Phi^{(4)}_{\mu\nu}$，W 在这组基中的矩阵形式及其本征矢量为

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},
$$

本征值分别为 0，2 和 −2，相应的本征函数分属表示 E，T_1 和 T_2：

$$
\begin{aligned}
\Psi^{E}_{\mu\nu} &= a_{\mu\nu}\{\Phi^{(3)}_{\mu\nu} + \Phi^{(4)}_{\mu\nu}/3\} \\
&= a_{\mu\nu}\{T_z + T_z^3 + S_1 + S_2 + \omega^{-\mu}(T_y + T_y^3 + S_5 + S_6) \\
&\quad + \omega^{\mu}(T_x + T_x^3 + S_3 + S_4)\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Psi^{T_1}_{\mu\nu} &= b_{\mu\nu}\{2\Phi^{(2)}_{\mu\nu} + \Phi^{(3)}_{\mu\nu} - \Phi^{(4)}_{\mu\nu}\} \\
&= b_{\mu\nu}\{2T_z^2 + 2R_3 + 2R_3^2 + T_z + T_z^3 + S_1 - 3S_2 \\
&\quad + \omega^{-\mu}(2T_y^2 + 2R_4 + 2R_4^2 + T_y + T_y^3 + S_5 - 3S_6) \\
&\quad + \omega^{\mu}(2T_x^2 + 2R_2 + 2R_2^2 + T_x + T_x^3 + S_3 - 3S_4)\},
\end{aligned}
$$

$$
\Psi^{T_2}_{\mu\nu} = c_{\mu\nu}\{2\Phi^{(2)}_{\mu\nu} - \Phi^{(3)}_{\mu\nu} + \Phi^{(4)}_{\mu\nu}\}
$$

$$
\begin{aligned}
&= c_{\mu\nu}\{2T_z^2 + 2R_3 + 2R_3^2 - T_z - T_z^3 - S_1 + 3S_2 \\
&\quad + \omega^{-\mu}(2T_y^2 + 2R_4 + 2R_4^2 - T_y - T_y^3 - S_5 + 3S_6) \\
&\quad + \omega^{\mu}(2T_x^2 + 2R_2 + 2R_2^2 - T_x - T_x^3 - S_3 + 3S_4)\}.
\end{aligned}
$$

当 $\mu=0$ 和 $\nu\neq 0$ 时，有两个基，$\Phi_{0\nu}^{(2)}$ 和 $\Phi_{0\nu}^{(3)}$，W 在这组基中的矩阵形式及其本征矢量为

$$
\begin{pmatrix} 0 & -2\omega^{\nu} \\ -2\omega^{-\nu} & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega^{-\nu} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{-\nu} \end{pmatrix},
$$

本征值分别为 2 和 -2，相应的本征函数分属表示 T_1 和 T_2：

$$
\begin{aligned}
\Psi_{0\nu}^{T_1} &= b_{0\nu}\{\Phi_{0\nu}^{(2)} - \omega^{-\nu}\Phi_{0\nu}^{(3)}\} \\
&= b_{0\nu}\{T_z^2 + R_4 + R_2^2 - T_x - T_y^3 - S_1 \\
&\quad + \omega^{-\nu}(T_y^2 + R_2 + R_3^2 - T_z - T_x^3 - S_5) \\
&\quad + \omega^{\nu}(T_x^2 + R_3 + R_4^2 - T_y - T_z^3 - S_3)\}, \\
\Psi_{0\nu}^{T_2} &= c_{0\nu}\{\Phi_{0\nu}^{(2)} + \omega^{-\nu}\Phi_{0\nu}^{(3)}\} \\
&= c_{0\nu}\{T_z^2 + R_4 + R_2^2 + T_x + T_y^3 + S_1 \\
&\quad + \omega^{-\nu}(T_y^2 + R_2 + R_3^2 - T_z + T_x^3 + S_5) \\
&\quad + \omega^{\nu}(T_x^2 + R_3 + R_4^2 + T_y + T_z^3 + S_3)\}.
\end{aligned}
$$

当 $\nu=0$ 和 $\mu\neq 0$ 时，有两个基，$\Phi_{\mu 0}^{(2)}$ 和 $\Phi_{\mu 0}^{(3)}$，W 在这组基中的矩阵形式及其本征矢量为

$$
\begin{pmatrix} 0 & -2\omega^{\mu} \\ -2\omega^{-\mu} & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega^{-\mu} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{-\mu} \end{pmatrix},
$$

本征值分别为 2 和 -2，相应的本征函数分属表示 T_1 和 T_2：

$$
\begin{aligned}
\Psi_{\mu 0}^{T_1} &= b_{\mu 0}\{\Phi_{\mu 0}^{(2)} - \omega^{-\mu}\Phi_{\mu 0}^{(3)}\} \\
&= b_{\mu 0}\{T_z^2 + R_2 + R_4^2 - T_y - S_1 - T_x^3 \\
&\quad + \omega^{-\mu}(T_x^2 + R_4 + R_3^2 - T_z - S_3 - T_y^3) \\
&\quad + \omega^{\mu}(T_y^2 + R_3 + R_2^2 - T_x - S_5 - T_z^3)\},
\end{aligned}
$$

$$\Psi^{T_2}_{\mu 0} = c_{\mu 0}\{\Phi^{(2)}_{\mu 0} + \omega^{-\mu}\Phi^{(3)}_{\mu 0}\}$$

$$= c_{\mu 0}\{T_z^2 + R_2 + R_4^2 + T_y + S_1 + T_x^3$$

$$+ \omega^{-\mu}(T_x^2 + R_4 - R_3^2 + T_z + S_3 + T_y^3)$$

$$+ \omega^{\mu}(T_y^2 + R_3 + R_2^2 + T_x + S_5 + T_z^3)\}.$$

现在计算生成元在表示 E 中的表示矩阵. 生成元 R_1 的表示矩阵已经知道，我们要计算另一生成元 T_z 的表示矩阵. 为得到幺正表示，取归一化的基，$a_{11} = a_{21} = \sqrt{1/12}$,

$$\Psi^E_{11} = \sqrt{1/12}\{E + T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 + \omega^2(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)$$

$$+ \omega(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2)\},$$

$$\Psi^E_{21} = \sqrt{1/12}\{T_z + T_z^3 + S_1 + S_2 + \omega(T_y + T_y^3 + S_5 + S_6)$$

$$+ \omega^2(T_x + T_x^3 + S_3 + S_4)\}.$$

计算中只需列出 E 和 T_z 的项:

$$T_z\Psi^E_{11} = \sqrt{1/12}\{T_z + \cdots\} = \Psi^E_{21},$$

$$T_z\Psi^E_{21} = \sqrt{1/12}\{E + \cdots\} = \Psi^E_{11}.$$

由此得表示矩阵

$$\bar{D}^E(R_1) = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \qquad \bar{D}^E(T_z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

按照此表示矩阵确定其余可乘因子 $a_{12} = a_{22} = \sqrt{1/12}$:

$$\Psi^{\Gamma}_{\mu\nu} T_z = \sum_{\rho} \bar{D}^E_{\nu\rho}(T_z)\Psi^E_{\mu\rho},$$

$$\Psi^E_{12} = \sqrt{1/12}\{T_z + T_z^3 + S_1 + S_2 + \omega^2(T_y + T_y^3 + S_5 + S_6)$$

$$+ \omega(T_x + T_x^3 + S_3 + S_4)\},$$

$$\Psi^E_{22} = \sqrt{1/12}\{E + T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 + \omega(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)$$

$$+ \omega^2(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2)\}.$$

用不变子群 D_2 的商群表示的方法得到的表示矩阵为

$$D^E(R_1)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix},\quad D^E(T_z)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

设它们通过相似变换 X 与 $\bar{D}^E$ 的形式相联系. 由 $X^{-1}D^E(R_1)X=\bar{D}^E(R_1)$, 得

$$X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ \mathrm{i}x_1 & -\mathrm{i}x_2\end{pmatrix}.$$

再代入 $D^E(T_z)X=X\bar{D}^E(T_z)$,

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ -\mathrm{i}x_1 & \mathrm{i}x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2 & x_1\\ -\mathrm{i}x_2 & \mathrm{i}x_1\end{pmatrix}.$$

解得 $x_1=x_2$, 归一化后得

$$X=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \mathrm{i} & -\mathrm{i}\end{pmatrix},\quad X^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -\mathrm{i}\\ 1 & \mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

现在计算生成元在表示 T_1 中的表示矩阵. 为得到幺正表示, 取归一化的基, $b_{00}=\sqrt{1/72}$和 $b_{10}=b_{20}=\sqrt{1/18}$,

$$\begin{aligned}\Psi_{00}^{T_1}=\sqrt{1/72}\{&3E+3R_1+3R_1^2-T_x^2-T_y^2-T_z^2-R_2-R_2^2\\&-R_3-R_3^2-R_4-R_4^2+T_x+T_x^3+T_y+T_y^3\\&+T_z+T_z^3+S_1+S_3+S_5-3S_2-3S_4-3S_6\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{10}^{T_1}=\sqrt{1/18}\{&T_z^2+R_2+R_4^2-T_y-T_y^3-S_1\\&+\omega^2(T_x^2+R_4+R_3^2-T_z-T_y^3-S_3)\\&+\omega(T_y^2+R_3+R_2^2-T_x-T_z^3-S_5)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{20}^{T_1}=\sqrt{1/18}\{&T_z^2+R_2+R_4^2-T_y-T_x^3-S_1\\&+\omega(T_x^2+R_4+R_3^2-T_z-T_y^3-S_3)\\&+\omega^2(T_y^2+R_3+R_2^2-T_x-T_z^3-S_5)\}.\end{aligned}$$

计算中只需列出 E, T_z^2 和 T_x^2 的项. 注意 $T_zS_2=S_1T_z=T_x^2$.

$$T_z\Psi_{00}^{T_1}=\sqrt{1/72}\{E+T_z^2-3T_x^2+\cdots\}$$

$$= (1/3)\{\Psi^{T_1}_{00} - 2\omega\Psi^{T_1}_{10} - 2\omega^2\Psi^{T_1}_{20}\},$$

$$T_z\Psi^{T_1}_{10} = \sqrt{1/18}\{-\omega E - \omega^2 T_z^2 + \cdots\}$$

$$= (1/3)\{-2\omega\Psi^{T_1}_{00} - 2\omega^2\Psi^{T_1}_{10} + \Psi^{T_1}_{20}\},$$

$$T_z\Psi^{T_1}_{20} = \sqrt{1/18}\{-\omega^2 E - \omega T_z^2 + \cdots\}$$

$$= (1/3)\{-2\omega^2\Psi^{T_1}_{00} + \Psi^{T_1}_{10} - 2\omega\Psi^{T_1}_{20}\}.$$

由此得表示矩阵

$$\bar{D}^{T_1}(R_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix},$$

$$\bar{D}^{T_1}(T_z) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2\omega & -2\omega^2 \\ -2\omega & -2\omega^2 & 1 \\ -2\omega^2 & 1 & -2\omega \end{pmatrix}.$$

此表示矩阵是对称矩阵．很容易用下式确定其余可乘因子．这些可乘因子首先要满足函数基的归一化条件，而相位由表示矩阵的形式和如下公式确定：

$$\Psi^{T_1}_{\mu\nu}T_z = \sum_{\rho}\bar{D}^{T_1}_{\nu\rho}(T_z)\Psi^{T_1}_{\mu\rho}.$$

$$\Psi^{T_1}_{00}T_z = \sqrt{1/72}\{E + T_z^2 + T_x^2 + \cdots\}$$

$$= \frac{1}{3}\{\Psi^{T_1}_{00} - 2\omega\Psi^{T_1}_{01} - 2\omega^2\Psi^{T_1}_{02}\},$$

$$\Psi^{T_1}_{10}T_z = \sqrt{1/18}\{-\omega E - \omega^2 T_z^2 - T_x^2 + \cdots\}$$

$$= \frac{1}{3}\{\Psi^{T_1}_{10} - 2\omega\Psi^{T_1}_{11} - 2\omega^2\Psi^{T_1}_{12}\},$$

$$\Psi^{T_1}_{20}T_z = \sqrt{1/18}\{-\omega^2 E - \omega T_z^2 - T_x^2 + \cdots\}$$

$$= \frac{1}{3}\{\Psi^{T_1}_{20} - 2\omega\Psi^{T_1}_{21} - 2\omega^2\Psi^{T_1}_{22}\},$$

由此得

$$\Psi^{T_1}_{01} = \sqrt{1/18}\{T_z^2 + R_4 + R_2^2 - T_x - T_y^3 - S_1$$

$$
\begin{aligned}
&+\omega^2(T_y^2+R_2+R_3^2-T_z-T_x^3-S_5)\\
&+\omega(T_x^2+R_3+R_4^2-T_y-T_z^3-S_3)\},\\
\Psi^{T_1}_{02}=\sqrt{1/18}\{&T_z^2+R_4+R_2^2-T_x-T_y^3-S_1\\
&+\omega(T_y^2+R_2+R_3^2-T_z-T_x^3-S_5)\\
&+\omega^2(T_x^2+R_3+R_4^2-T_y-T_z^3-S_3)\},\\
\Psi^{T_1}_{11}=\sqrt{1/72}\{&3E-T_x^2-T_y^2-T_z^2-2S_1-2S_3-2S_5\\
&+\omega^2(3R_1-R_2-R_3-R_4-2T_x^3-2T_y^3-2T_z^3)\\
&+\omega(3R_1^2-R_2^2-R_3^2-R_4^2-2T_x-2T_y-2T_z)\},\\
\Psi^{T_1}_{12}=\sqrt{1/72}\{&2T_z^2+2R_3+2R_3^2+T_z+T_z^3+S_1-3S_2\\
&+\omega^2(2T_y^2+2R_4+2R_4^2+T_y+T_y^3+S_5-3S_6)\\
&+\omega(2T_x^2+2R_2+2R_2^2+T_x+T_x^3+S_3-3S_4)\},\\
\Psi^{T_1}_{21}=\sqrt{1/72}\{&2T_z^2+2R_3+2R_3^2+T_z+T_z^3+S_1-3S_2\\
&+\omega(2T_y^2+2R_4+2R_4^2+T_y+T_y^3+S_5-3S_6)\\
&+\omega^2(2T_x^2+2R_2+2R_2^2+T_x+T_x^3+S_3-3S_4)\},\\
\Psi^{T_1}_{22}=\sqrt{1/72}\{&3E-T_x^2-T_y^2-T_z^2-2S_1-2S_3-2S_5\\
&+\omega(3R_1-R_2-R_3-R_4-2T_x^3-2T_y^3-2T_z^3)\\
&+\omega^2(3R_1^2-R_2^2-R_3^2-R_4^2-2T_x-2T_y-2T_z)\}.
\end{aligned}
$$

用三维空间坐标变换的方法得到的表示矩阵为

$$
D^{T_1}(R_1)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad D^{T_1}(T_z)=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},
$$

设它们通过相似变换 Y 与 $\bar{D}^{T_1}$ 的形式相联系. 由 $Y^{-1}D^{T_1}(R_1)Y=\bar{D}^{T_1}(R_1)$, 得

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1 & y_2\omega^2 & y_3\omega \\ y_1 & y_2\omega & y_3\omega^2 \end{pmatrix}.$$

再代入 $D^{T_3}(T_z)Y = Y\bar{D}^{T_1}(T_z)$，其中第一列是

$$-y_1 = (y_1 - 2y_2\omega - 2y_3\omega^2)/3,$$

$$y_1 = (y_1 - 2y_2 - 2y_3)/3,$$

$$y_1 = (y_1 - 2y_2\omega^2 - 2y_3\omega)/3,$$

解得 $y_1 = y_2\omega = y_3\omega^2$，归一化后，得

$$Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{pmatrix}.$$

对 T_2 表示，如果选择系数 $c_{\mu\nu} = b_{\mu\nu}$，函数基 $\Psi^{T_2}_{\mu\nu}$ 的展开式，与 $\Psi^{T_1}_{\mu\nu}$ 相比较，与子群 T 相联系的项系数相同，与陪集相联系的项系数相差负号，因此表示矩阵 $D^{T_2}(R)$ 正是 $D^{T_1}(R)$ 和 $D^{A_2}(R)$ 的直乘.

三、分导表示和诱导表示

★　设群 G 的阶为 g，子群 $H = \{T_1 = E, T_2, \cdots, T_h\}$ 是群 G 的子群，阶为 h，指数为 $n = g/h$，左陪集记作 R_rH，$2 \leqslant r \leqslant n$. 补上 $R_1 = E$，则群 G 任意元素可表为 R_rT_t. 设 $D^j(G)$ 是群 G 的一个 m_j 维不可约表示，把表示中与子群 H 元素有关的矩阵 $D^j(T_t)$ 挑出来，构成子群 H 的一个表示，称为群 G 表示 $D^j(G)$ 关于子群 H 的分导表示，记作 $D^j(H)$. 分导表示一般是可约表示，可按子群的不可约表示 $\bar{D}^k(H)$ 分解

$$X^{-1}D^j(T_t)X = \bigoplus_k a_{jk}\bar{D}^k(T_t), \qquad m_j = \sum_k a_{jk}\bar{m}_k,$$

$$a_{jk} = \frac{1}{h}\sum_{T_t \in H}\bar{\chi}^k(T_t)^*\chi^j(T_t) = \frac{1}{h}\sum_\beta \bar{n}(\beta)(\bar{\chi}^k_\beta)^*\chi^j_\beta. \qquad (3.9)$$

其中 $\bar{m}_k$ 是表示 $\bar{D}^k(H)$ 的维数.

★　仍采用上面的符号. 设 $\bar{D}^k(H)$ 表示空间的基为 ψ_μ，

$$P_{T_t}\psi_\mu = \sum_\nu \psi_\nu \bar{D}^k_{\nu\mu}(T_t).$$

定义 $\psi_{r\mu}=P_{R_r}\psi_\mu$，其中 $\psi_{1\mu}=\psi_\mu$，由此得到的由 $n\bar{m}_k$ 个基 $\psi_{r\mu}$ 架设的空间对群 G 保持不变，可以用下法计算群 G 的一个 $n\bar{m}_k$ 维表示 $\Delta^k(G)$. 对群 G 任意元素 S，逐个取 r，计算 SR_r，它必可表为 R_uT_t 形式，其中 u 和 t 完全由 S 和 r 决定. 由于

$$P_S\psi_{r\mu} = P_{SR_r}\psi_\mu = P_{R_u}P_{T_t}\psi_\mu = \sum_\nu \psi_{u\nu}\bar{D}^k_{\nu\mu}(T_t),$$

得

$$\Delta^k_{u\nu,r\mu}(S) = \bar{D}^k_{\nu\mu}(T_t). \tag{3.10}$$

这表示 $\Delta^k(G)$称为子群 H 表示$\bar{D}^k(H)$关于群 G 的诱导表示. 诱导表示一般是可约表示，可按群 G 的不可约表示 $D^j(G)$分解

$$Y^{-1}\Delta^k(S)Y = \bigoplus_j b_{jk}D^j(S), \qquad (g/h)\bar{m}_k = \sum_j b_{jk}m_j,$$

$$b_{jk} = \frac{1}{g}\sum_{S\in G}\chi^j(S)^*\chi^k(S) = \frac{1}{g}\sum_\alpha n(\alpha)(\chi^j_\alpha)^*\chi^k_\alpha. \tag{3.11}$$

计算元素 S 在诱导表示中的特征标 $\chi^k(S)$. 设元素 S 在群 G 中所属的类为 C_α，它含 $n(\alpha)$个互相共轭的元素，这些元素可能有些在子群 H 中，有些不在子群中. 在子群中的元素则构成子群 H 的若干类，记作 $\bar{C}_\beta$，其中 β 可取若干个值，若与 S 共轭的元素都不属于子群 H，则不存在 β. 设类 $\bar{C}_\beta$ 包含 $\bar{n}(\beta)$个元素，在子群不可约表示 $\bar{D}^k(H)$中的特征标记作 $\bar{\chi}^k_\beta$.

由(3.10)式知，只有当 $r=u$ 时，即 $SR_r=R_rT_t$ 时才会出现表示矩阵 $\Delta^k(S)$ 的对角元，从而对特征标 $\chi^k(S)=\chi^k_\alpha$ 有贡献，就是说，只有当类 C_α 中包含属子群 H 的元素时才会有不等于零的特征标 $\chi^k(S)$. 设满足 $SR_r=R_rT_t$ 的不相同的 R_r 个数为 K_β，其中 T_t 依赖于 S 和 R_r，属子群 H 的类 $\bar{C}_\beta$，则 $\chi^k_\alpha=\sum_\beta K_\beta\bar{\chi}^k_\beta$.

根据第二章第 10 题，群 G 中满足 $SR=RT_t$ 的元素 R 个数为 $m(\alpha)=g/n(\alpha)$，这样的元素 R 一般可以表示为 R_rT_x 的形式，故有 $SR_r=R_r(T_xT_tT_x^{-1})$，而 $\bar{\chi}^k(T_xT_tT_x^{-1})=\bar{\chi}^k(T_t)$. 另一方面，在子群 H 中满足 $T_yT_tT_y^{-1}=T_t$ 的元素 T_y 的数目为 $\bar{m}(\beta)=h/\bar{n}(\beta)$. 若 R_rT_x 满足 $S(R_rT_x)=(R_rT_x)T_t$，则 $R_rT_xT_y$ 也满足此式，它们对特征标 $\chi^k(S)$的贡献只是一个 $\bar{\chi}^k_\beta$，因而 $K_\beta=m(\alpha)/\bar{m}(\beta)$，

$$\chi^k_\alpha = \frac{g}{hn(\alpha)}\sum_\beta \bar{n}(\beta)\bar{\chi}^k_\beta, \tag{3.12}$$

其中子群的类 $\overline{C}_\beta$ 中元素 T_t 都属群 G 的类 C_α．不同的类 C_α 对应的类 $\overline{C}_\beta$ 显然不同，对类 α 求和也就包含了对子群的所有类 $\overline{C}_\beta$ 求和．因为 $\chi^j(S)=\chi^j(R^{-1}SR)$，由(3.12)式很容易证明(3.9)式和(3.11)式中的两个重数 a_{jk} 和 b_{jk} 相等：

$$b_{jk}=\frac{1}{g}\sum_{\alpha}n(\alpha)(\chi_\alpha^j)^*\chi_\alpha^k=\frac{1}{h}\sum_{\beta}\overline{n}(\beta)(\chi_\beta)^*\overline{\chi}_\beta^k=a_{jk}. \tag{3.13}$$

(3.13)式称为费罗宾尼斯(Frobenius)定理．

17. 用诱导表示的方法计算 D_{2n+1} 群的所有不等价不可约表示．

解 D_{2n+1} 群包含一个$(2n+1)$次轴，称为主轴，生成元记作 C_{2n+1}，垂直主轴平面有等价的$(2n+1)$个二次轴，代表元素记作 $C_{2'}$．因此 D_{2n+1} 群的阶 $g=4n+2$，类数 $g_c=n+2$，D_{2n+1} 群有两个一维和 n 个二维不等价不可约表示．

D_{2n+1} 群有一个指数为二的不变子群 C_{2n+1}，陪集由所有垂直主轴的二次轴转动组成，商群是二阶群，它给出 D_{2n+1} 群的两个一维不等价不可约表示，分别记作 A 和 B：

$$D^A(C_{2n+1})=D^B(C_{2n+1})=D^A(C_{2'})=1,\qquad D^B(C_{2'})=-1.$$

不变子群 C_{2n+1} 是阿贝尔群，有$(2n+1)$个一维不等价不可约表示，基分别记作 ψ^j，$0\leqslant j\leqslant 2n$，满足

$$C_{2n+1}\psi^j=e^{-i2j\pi/(2n+1)}\psi^j.$$

对应地定义另一个基 $\phi^j=C_{2'}\psi^j$，有

$$C_{2'}\psi^j=\phi^j,\qquad C_{2'}\phi^j=\psi^j,$$

$$C_{2n+1}\phi^j=e^{i2j\pi/(2n+1)}\phi^j,$$

其中用到公式 $C_{2n+1}C_{2'}=C_{2'}C_{2n+1}^{-1}$．取 $1\leqslant j\leqslant n$，得 D_{2n+1} 群 n 个二维不等价不可约表示，记作 E_j，

$$D^{E_j}(C_{2n+1})=\begin{pmatrix}e^{-i2j\pi/(2n+1)} & 0\\ 0 & e^{i2j\pi/(2n+1)}\end{pmatrix},$$

$$D^{E_j}(C_{2'})=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

其他 j 得到的表示，或者是等价表示，或者是可约表示．

18. 用诱导表示的方法计算 D_{2n} 群的所有不等价不可约表示.

解 D_{2n} 群包含一个 $(2n)$ 次轴，称为主轴，生成元记作 C_{2n}，垂直主轴平面有 $(2n)$ 个二次轴，分成分别等价的两组，代表元素分别记作 $C_{2'}$ 和 $C_{2''}=C_{2n}C_{2'}=C_{2'}C_{2n}^{-1}$. 因此 D_{2n} 群的阶 $g=4n$、类数 $g_c=n+3$，D_{2n} 群有四个一维和 $(n-1)$ 个二维不等价不可约表示.

D_{2n} 群有三个指数为二的不变子群，一个是主轴元素构成的 C_{2n} 群，陪集由所有垂直主轴的二次轴转动组成，商群是二阶群，给出 D_{2n} 群的两个一维不等价不可约表示，记作 A_1 和 A_2：

$$D^{A_1}(C_{2n})=D^{A_2}(C_{2n})=D^{A_1}(C_{2'})=1,\qquad D^{A_2}(C_{2'})=-1.$$

由绕主轴转动 (π/n) 角偶数倍的转动构成子群 C_n，C_n 加上垂直主轴平面的一组二次轴转动，分别得到 D_{2n} 群的两个指数为二的不变子群，它们的商群的反对称表示得到 D_{2n} 群的另两个一维不等价不可约表示，分别记作 B_1 和 B_2：

$$D^{B_1}(C_{2n})=D^{B_2}(C_{2n})=D^{B_2}(C_{2'})=-1,\quad D^{B_1}(C_{2'})=1.$$

不变子群 C_{2n} 是阿贝尔群，有 $(2n)$ 个一维不等价不可约表示，基分别记作 ψ^j，$0\leqslant j\leqslant 2n-1$，满足

$$C_{2n}\psi^j=e^{-ij\pi/n}\psi^j.$$

对应地定义另一个基 $\phi^j=C_{2'}\psi^j$，有

$$C_{2'}\psi^j=\phi^j,\qquad C_{2'}\phi^j=\psi^j,\qquad C_{2n}\phi^j=e^{ij\pi/n}\phi^j.$$

取 $1\leqslant j\leqslant n-1$，得 D_{2n} 群 $(n-1)$ 个二维不等价不可约表示，记作 E_j，

$$D^{E_j}(C_{2n})=\begin{pmatrix}e^{-ij\pi/n} & 0\\ 0 & e^{ij\pi/n}\end{pmatrix},\quad D^{E_j}(C_{2'})=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

其他 j 得到的表示，或者是等价表示，或者是可约表示.

19. 试计算立方体固有对称群 O 所有不等价不可约表示.

解 用两个方法计算，一个是利用不变子群的商群性质来计算，另一个是利用子群表示的诱导表示方法.

立方体对称群 O 有五个类，24 个元素，生成元取绕 z 轴转动 π 角的元素 C_4 和绕 $e_1+e_2+e_3$ 方向转动 $2\pi/3$ 角的元素 C_3. $C_3C_4=C_2$ 是绕 x 和 z 轴正向的分角平分线方向转动 π 角的元素. 这里为简化符号，省略了 C_2 和 C_3 上该带的撇. 类也用其中一个代表元素的符号标记，恒元单独构成类 E、绕三个四次轴转动

$\pm\pi/2$角的元素构成类 C_4，含 6 个元素，转动 π 角的元素构成类 C_4^2，含 3 个元素，四个三次轴的转动元素构成类 C_3，含 8 个元素，六个二次轴的转动元素构成类 C_2，含 6 个元素. O 群有五个不等价不可约表示，维数分别是 1, 1, 2, 3 和 3. 因为所有类都是自逆类，O 群的所有不可约表示都是自共轭表示，特征标都是实数. 取 O 群不变子群 D_2，它由 E 和 C_4^2 两个类构成，商群同构于 D_3 群，它决定了 O 群的一维和二维不可约表示，生成元的表示矩阵为

$$D^A(C_4) = D^A(C_3) = D^B(C_3) = 1, \qquad D^B(C_4) = -1,$$

$$D^E(C_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D^E(C_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

一个三维不可约表示 T_1 可由三维空间坐标变换来确定：

$$D^{T_1}(C_4) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^{T_1}(C_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

另一个三维不可约表示 T_2 等于 T_1 表示与一维反对称表示 B 的直乘. 这样就完全确定了 O 群所有不等价不可约表示及其特征标，列于特征标表中.

再用子群表示关于 O 群的诱导表示方法重新计算. 取子群 D_4，它由沿 z 轴的四次轴和 xy 平面的四个二次轴构成，两个相邻的二次轴转动用符号 S 和 S' 标记，其中 S 是绕 x 轴的转动，S' 是绕 x 和 y 轴正向的角平分线方向的转动. 子群的特征标表如下.

O 群的特征标表

	C_E	$3C_4^2$	$6C_4$	$8C_3$	$6C_2$
A	1	1	1	1	1
B	1	1	1	1	-1
E	2	2	0	-1	0
T_1	3	1	1	0	-1
T_2	3	-1	-1	0	1

D_4 群的特征标表

	E	$2C_4$	C_4^2	$2S$	$2S'$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	1	1
B_2	1	-1	1	-1	1
E	2	0	-2	0	0

由(3.12)式计算 D_4 群表示 B_1 关于 O 群的诱导表示的特征标

$$\chi^{B_1}(E) = \frac{24 \times 1}{8} = 3, \quad \chi^{B_1}(C_4) = \frac{24 \times 2 \times (-1)}{8 \times 6} = -1,$$

$$\chi^{B_1}(C_4^2) = \frac{24}{8\times 3}\{1\times 1 + 2\times 1\} = 3,$$

$$\chi^{B_1}(C_2) = \frac{24\times 2\times(-1)}{8\times 6} = -1,\quad \chi^{B_1}(C_3) = 0,$$

$$1\times 3^2 + 3\times 3^2 + 6\times(-1)^2 + 6\times(-1)^2 + 0 = 48.$$

因为特征标与恒等表示的特征标正交，所以这表示是一个一维表示 B 和一个二维表示 E 的直和. 取 B_1 表示的基为 ϕ_1，定义基 $\phi_2 = C_3\phi_1$，$\phi_3 = C_3^2\phi_1$，再注意 $C_4C_3 = C_3^2C_4^3$ 是绕 y 和 z 轴正向角平分线方向转动 π 角的元素，$C_4C_3^2 = C_3S'$ 是绕 y 轴转动 $3\pi/2$ 角的元素，得

$$C_3\phi_1 = \phi_2,\quad C_3\phi_2 = \phi_3,\quad C_3\phi_3 = \phi_1,$$

$$C_4\phi_1 = -\phi_1,\quad C_4\phi_2 = -\phi_3,\quad C_4\phi_3 = -\phi_2.$$

$$D(C_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\quad D(C_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

作相似变换 X，正好得到表示 B 和表示 E 的直和：

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -\sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix},\quad X^{-1}D(C_4)X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$X^{-1}D(C_3)X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

对 D_4 群表示 A_2 关于 O 群的诱导表示，有

$$\chi^{A_2}(E) = \frac{24\times 1}{8} = 3,\quad \chi^{A_2}(C_4) = \frac{24\times 2\times 1}{8\times 6} = 1,$$

$$\chi^{A_2}(C_4^2) = \frac{24}{8\times 3}\{1\times 1 + 2\times(-1)\} = -1,$$

$$\chi^{A_2}(C_2) = \frac{24\times 2\times(-1)}{8\times 6} = -1,\quad \chi^{A_2}(C_3) = 0,$$

$$1 \times 3^2 + 3 \times (-1)^2 + 6 \times 1^2 + 6 \times (-1)^2 + 0 = 24.$$

这是不可约表示 T_1. 取 A_2 表示的基为 ψ_1，定义基 $\psi_2 = C_3\psi_1$，$\psi_3 = C_3^2\psi_1$，利用 $C_4C_3 = C_3^2C_4^3$ 和 $C_4C_3^2 = C_3S'$，得

$$C_3\psi_1 = \psi_2, \quad C_3\psi_2 = \psi_3, \quad C_3\psi_3 = \psi_1,$$

$$C_4\psi_1 = \psi_1, \quad C_4\psi_2 = \psi_3, \quad C_4\psi_3 = -\psi_2.$$

$$D^{T_1}(C_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{T_1}(C_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

得到的表示矩阵和前面所得到的只相差一个简单相似变换(1,2,3 循环).

对 D_4 群表示 B_2 关于 O 群的诱导表示，有

$$\chi^{B_2}(E) = \frac{24 \times 1}{8} = 3, \quad \chi^{B_2}(C_4) = \frac{24 \times 2 \times (-1)}{8 \times 6} = -1,$$

$$\chi^{B_2}(C_4^2) = \frac{24}{8 \times 3}\{1 \times 1 + 2 \times (-1)\} = -1,$$

$$\chi^{B_2}(C_2) = \frac{24 \times 2 \times 1}{8 \times 6} = 1, \quad \chi^{B_2}(C_3) = 0,$$

$$1 \times 3^2 + 3 \times (-1)^2 + 6 \times (-1)^2 + 6 \times 1^2 + 0 = 24.$$

这是不可约表示 T_2. 与前面一样计算，由于只是 C_4 和 C_2 的特征标改号，表示 T_2 正是 T_1 和反对称表示 B 的直乘.

20. 用诱导表示的方法计算正二十面体固有对称群 I 不可约表示的特征标表.

解　正二十面体对称群 I 包含 6 个五次轴，10 个三次轴和 15 个二次轴，共 60 个元素. 次数相同的轴都互相等价，且为双向轴，因而 I 群包含五类，记作 E，C_5，C_5^2，C_3 和 C_2，分别包含元素数目为 1，12，12，20 和 15. 由 $1^2+3^2+3^2+4^2+5^2=60$ 知 I 群的五个不等价不可约表示的维数为 1，3，3，4 和 5，分别记作 A，T_1，T_2，G 和 H. 表示 A 为恒等表示.

I 群不含不变子群，两个较大的子群为 T 和 D_5，它们的特征标表如下($\omega = e^{-i2\pi/3}$，$\eta = e^{-i2\pi/5}$，$p = \eta + \eta^{-1} = (\sqrt{5}-1)/2$)：

T 群的特征标表

	E	$3C_2$	$4C_3$	$4C_3^2$
A	1	1	1	1
E	1	1	ω	ω^2
E'	1	1	ω^2	ω
T	3	−1	0	0

D_5 群的特征标表

	E	$2C_5$	$2C_5^2$	$5C_2'$
A_1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	−1
E_1	2	p	$-p^{-1}$	0
E_2	2	$-p^{-1}$	p	0

对 T 群恒等表示 A 的诱导表示，有

$$\chi^A(E) = 5, \qquad \chi^A(C_5) = \chi^A(C_5^2) = 0,$$

$$\chi^A(C_2) = \frac{60 \times 3 \times 1}{12 \times 15} = 1,$$

$$\chi^A(C_3) = \frac{60}{12 \times 20}(4 \times 1 + 4 \times 1) = 2,$$

$$1 \times 5^2 + 0 + 0 + 15 \times 1^2 + 20 \times 2^2 = 120.$$

因为特征标没有负的，与恒等表示不正交，所以直和中包含一个恒等表示，特征标相减后得 I 群的四维不可约表示 G 的特征标：

$$\chi^G(E) = 4, \quad \chi^G(C_5) = \chi^G(C_5^2) = -1,$$

$$\chi^G(C_2) = 0, \quad \chi^G(C_3) = 1.$$

对 T 群表示 E 的诱导表示，有

$$\chi^E(E) = 5, \qquad \chi^E(C_5) = \chi^E(C_5^2) = 0,$$

$$\chi^E(C_2) = \frac{60 \times 3}{12 \times 15} = 1,$$

$$\chi^E(C_3) = \frac{60}{12 \times 20}(4 \times \omega + 4 \times \omega^2) = -1,$$

$$1 \times 5^2 + 0 + 0 + 15 \times 1^2 + 20 \times (-1)^2 = 60.$$

这是五维不可约表示 H 的特征标. 由 T 群不可约表示的诱导表示不可能区分 C_5 和 C_5^2 两个类.

对 D_5 群表示 E_1 的诱导表示，有

$$\chi^{E_1}(E) = \frac{60 \times 2}{10 \times 1} = 12, \qquad \chi^{E_1}(C_5) = \frac{60 \times 2 \times p}{10 \times 12} = p.$$

$$\chi^{E_1}(C_5^2) = \frac{60\times 2\times(-p^{-1})}{10\times 12} = -p^{-1},\ \chi^{E_1}(C_2) = \chi^{E_1}(C_3) = 0,$$

$$p = (\sqrt{5}-1)/2,\qquad p^{-1} = (\sqrt{5}+1)/2.$$

$$1\times 12^2 + 12\times p^2 + 12\times(-p^{-1})^2 = 180.$$

这表示是三个不可约表示的直和．因为特征标与表示 G 和 H 的特征标都不正交，所以直和中各包含一个 G 和 H 表示，特征标相减后得 I 群的三维不可约表示 T_1 的特征标：

$$\chi^{T_1}(E) = 3,\qquad \chi^{T_1}(C_5) = p^{-1},\qquad \chi^{T_1}(C_5^2) = -p,$$

$$\chi^{T_1}(C_2) = -1,\qquad \chi^{T_1}(C_3) = 0.$$

对 D_5 群表示 E_2 的诱导表示，计算中只是把 C_5 和 C_5^2 两类的特征标换一下，得 T_2 表示的特征标．最后把计算结果列于下表．

I 群不可约表示的特征标表

	E	$12C_5$	$12C_5^2$	$15C_2$	$20C_3$
A	1	1	1	1	1
T_1	3	p^{-1}	$-p$	-1	0
T_2	3	$-p$	p^{-1}	-1	0
G	4	-1	-1	0	1
H	5	0	0	1	-1

21. 分别计算 I 群各不可约表示关于子群 C_5、D_5 和 T 的分导表示，按子群不可约表示约化所得的表示种类和个数．

解 I 群不可约表示特征标表已在 20 题算出，D_5 群和 T 群的特征标表也在 20 题中列出．C_5 群是循环群，特征标容易写出．计算中重要的是确定子群元素在 I 群中所属的类，从而在 I 群的特征标表中查得相应的特征标值，然后利用公式(3.3)计算 I 群各不可约表示关于子群 C_5，D_5 和 T 的分导表示的约化．这里略去计算过程，只列出结果．

表中用到下面符号：

$$\eta = \exp\{-i2\pi/5\},\qquad p = \eta + \eta^4,$$

$$-p^{-1} = \eta^2 + \eta^3,\qquad \omega = \exp\{-i2\pi/3\}.$$

I 群表示关于子群 C_5 分导表示的约化

	E	C_5	C_5^2	C_5^3	C_5^4	关于子群 C_5 分导表示的约化
A_1	1	1	1	1	1	
A_2	1	η	η^2	η^3	η^4	
A_3	1	η^2	η^4	η	η^3	
A_4	1	η^3	η	η^4	η^2	
A_5	1	η^4	η^3	η^2	η	
A	1	1	1	1	1	A_1
T_1	3	p^{-1}	$-p$	$-p$	p^{-1}	$A_1\oplus A_2\oplus A_5$
T_2	3	$-p$	p^{-1}	p^{-1}	p	$A_1\oplus A_3\oplus A_4$
G	4	-1	-1	-1	-1	$A_2\oplus A_3\oplus A_4\oplus A_5$
H	5	0	0	0	0	$A_1\oplus A_2\oplus A_3\oplus A_4\oplus A_5$

I 群表示关于子群 D_5 分导表示的约化

	E	$2C_5$	$2C_5^2$	$5C_2'$	关于子群 D_5 分导表示的约化
A_1	1	1	1	1	
A_2	1	1	1	-1	
E_1	2	p	$-p^{-1}$	0	
E_2	2	p^{-1}	p	0	
A	1	1	1	1	A_1
T_1	3	p^{-1}	$-p$	-1	$A_2\oplus E_1$
T_2	3	$-p$	p^{-1}	-1	$A_2\oplus E_2$
G	4	-1	-1	0	$E_1\oplus E_2$
H	5	0	0	1	$A_1\oplus E_1\oplus E_2$

I 群表示关于子群 T 分导表示的约化

	E	$3C_2$	$4C_3'$	$4C_3'^2$	关于子群 T 分导表示的约化
A_1	1	1	1	1	
E	1	1	ω	ω^2	
E'	1	1	ω^2	ω	
T	3	-1	0	0	
A	1	1	1	1	A_1
T_1	3	-1	0	0	T
T_2	3	-1	0	0	T
G	4	0	1	1	$A_1\oplus T$
H	5	1	-1	-1	$E\oplus E'\oplus T$

22. 计算 I 型非固有点群 I_h 正则表示关于子群 C_{5i}、D_{5d} 和 T_h 的分导表示，按子群不可约表示约化所得的表示种类和个数.

解　I_h 群是 I 型非固有点群，它是 I 群和二阶反演群 $V_2=\{E,\ \sigma\}$ 的直乘. 由于空间反演 σ 可与 I_h 群中所有元素对易，且平方等于恒元，它在不可约表示中的表示矩阵是常数矩阵，常数等于 ±1. I_h 群的不等价不可约表示是群 I 和群 V_2 各不等价不可约表示的直乘. 根据 $D(\sigma)=1$ 和 -1，把 I_h 群的不可约表示分成 Γ_g 和 Γ_u. 其中 Γ 是群 I 的不等价不可约表示，它等于 A，T_1，T_2，G 和 H，g 和 u 是德文 gerade 和 ungerade 的缩写.

C_{5i}、D_{5d} 和 T_h 群也是 I 型非固有点群，它们的不等价不可约表示也分别是固有点群 C_5，D_5 或 T 的不可约表示和 V_2 群不可约表示的直乘，同样按照空间反演 σ 在表示中的取值而分为 γ_g 和 γ_u 表示. 其中 γ 是子群的不可约表示，因此 I_h 群各不可约表示关于子群 C_{5i}，D_{5d} 和 T_h 的分导表示的分解与上题给出的结果是相同的，只是各表示要区分下标是 g 还是 u，而正则表示是各不等价不可约表示的直和，各表示的重数等于表示的维数. 因此把这些表示的分解式乘上重数相加起来，就得到正则表示的分解式.

我们也可用特征标方法直接计算正则表示的分解. 在正则表示中，只有恒元的特征标等于群的阶数. 其他元素的特征标都等于零. 由于包含反演的元素的特征标都为零，在 I_h 群的正则表示分解式中表示 Γ_g 和 Γ_u 的重数一定是相同的. 因此我们只需要计算 I 群的正则表示，作为子群 C_5，D_5 和 T 的分导表示的分解，然后把每个表示 γ 扩充成 γ_g 和 γ_u 即可. 各子群的特征标已在上题中列出，I 群正则表示的特征标，恒元是 60，其他元素是零. 按照表示分解的特征标公式 (3.6) 容易计算此分解式. 下面只给出 I_h 群正则表示关于子群的分导表示的约化结果.

对 C_{5i} 群，

$$D=12\{A_{1g}\oplus A_{1u}\oplus A_{2g}\oplus A_{2u}\oplus A_{3g}\oplus A_{3u}\oplus A_{4g}\oplus A_{4u}\oplus A_{5g}\oplus A_{5u}\}.$$

对 D_{5d} 群，

$$D=6\{A_{1g}\oplus A_{1u}\oplus A_{2g}\oplus A_{2u}\oplus 2E_{1g}\oplus 2E_{1u}\oplus 2E_{2g}\oplus 2E_{2u}\}.$$

对 T_h 群，

$$D=5\{A_{1g}\oplus A_{1u}\oplus E_g\oplus E_u\oplus E'_g\oplus E'_u\oplus 3T_g\oplus 3T_u\}.$$

展开式中括号里的级数正是子群正则表示约化的级数.

23. 正二十面体对称群 I 的元素都可表为子群 C_5 和子群 T 元素的乘积 $T_0^a R_6^b S_1^c S_{12}^d$，其中 T_0 是绕 z 轴转动 $2\pi/5$ 角的元素，R_6 是绕 $\hat{n}$ 方向转动 $2\pi/3$角的元素，S_1 和 S_{12}分别是绕 $\hat{m}$ 方向和 y 轴转动 π 角的元素，其中 $\hat{n}$ 方向的极角为 θ_3，方位角为 $\pi/5$，$\hat{m}$方向的极角为 θ_4，方位角为零，$\tan\theta_3 = 3-\sqrt{5}$，$\tan\theta_4 = (\sqrt{5}-1)/2$. 通常取 T_0 和 S_1 作为 I 群的生成元，T_0 的表示矩阵是对角化的，试由生成元的表示矩阵计算 R_6 和 S_{12}的表示矩阵.

$$R_6 = S_1 T_0^2 S_1 T_0^{-1}, \qquad S_{12} = T_0 S_1 T_0^3 R_6,$$

$$D^{T_1}(T_0) = \mathrm{diag}\{\eta, 1, \eta^{-1}\},$$

$$D^{G}(T_0) = \mathrm{diag}\{\eta^2, \eta, \eta^{-1}, \eta^{-2}\},$$

$$D^{T_2}(T_0) = \mathrm{diag}\{\eta^2, 1, \eta^{-2}\},$$

$$D^{H}(T_0) = \mathrm{diag}\{\eta^2, \eta, 1, \eta^{-1}, \eta^{-2}\},$$

$$D^{T_1}(S_1) = \frac{-1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} p^{-1} & \sqrt{2} & p \\ \sqrt{2} & -1 & -\sqrt{2} \\ p & -\sqrt{2} & p^{-1} \end{pmatrix},$$

$$D^{T_2}(S_1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -p & \sqrt{2} & p^{-1} \\ \sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \\ p^{-1} & \sqrt{2} & -p \end{pmatrix},$$

$$D^{G}(S_1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 & -p & -p^{-1} & 1 \\ -p & 1 & -1 & -p^{-1} \\ -p^{-1} & -1 & 1 & -p \\ 1 & -p^{-1} & -p & -1 \end{pmatrix},$$

$$D^{H}(S_1) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} p^{-2} & 2p^{-1} & \sqrt{6} & 2p & p^2 \\ 2p^{-1} & p^2 & -\sqrt{6} & -p^{-2} & -2p \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & -1 & \sqrt{6} & \sqrt{6} \\ 2p & -p^{-2} & \sqrt{6} & p^2 & -2p^{-1} \\ p^2 & -2p & \sqrt{6} & -2p^{-1} & p^{-2} \end{pmatrix}.$$

解　计算中要充分利用 T_0 的表示矩阵是对角矩阵这一特性，把 R_6 和 S_{12} 都表为两个矩阵的乘积，相乘时要把矩阵元素都表为 η 的多项式，并利用公式

$$\sum_{a=0}^{4}\eta^a = 0, \quad \eta^{a+5n} = \eta^a,$$

$$1+2\eta+2\eta^4 = -1-2\eta^2-2\eta^3 = \sqrt{5}.$$

恒等表示不必计算，其他表示的计算结果如下：

$$D^{T_1}(R_6) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -\eta^2-\eta^4 & \sqrt{2}\eta^2 & \eta^3+\eta^4 \\ \sqrt{2}\eta & -1 & -\sqrt{2}\eta^4 \\ \eta+\eta^2 & -\sqrt{2}\eta^3 & -\eta-\eta^3 \end{pmatrix},$$

$$D^{T_1}(S_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D^{T_2}(R_6) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \eta^3+\eta^4 & -\sqrt{2}\eta^4 & \eta+\eta^3 \\ -\sqrt{2}\eta^2 & 1 & -\sqrt{2}\eta^3 \\ \eta^2+\eta^4 & -\sqrt{2}\eta & \eta+\eta^2 \end{pmatrix},$$

$$D^{T_2}(S_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D^{G}(R_6) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \eta & \eta^2+\eta^3 & -\eta^2-\eta^4 & -\eta^2 \\ \eta+\eta^2 & -\eta^3 & \eta & -\eta-\eta^4 \\ -\eta-\eta^4 & \eta^4 & -\eta^2 & \eta^3+\eta^4 \\ -\eta^3 & -\eta-\eta^3 & \eta^2+\eta^3 & \eta^4 \end{pmatrix},$$

$$D^{G}(S_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$D^H(R_6)$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1+\eta-\eta^2 & -2\eta-2\eta^4 & \sqrt{6}\eta^4 & 2+2\eta & -1+\eta^2-\eta^4 \\ -2-2\eta^3 & -1-\eta+\eta^3 & -\sqrt{6}\eta^2 & 1-\eta+\eta^2 & -2\eta^2-2\eta^3 \\ \sqrt{6}\eta^2 & -\sqrt{6}\eta & -1 & \sqrt{6}\eta^4 & \sqrt{6}\eta^3 \\ 2\eta^2+2\eta^3 & 1+\eta^3-\eta^4 & \sqrt{6}\eta^3 & -1+\eta^2-\eta^4 & 2+2\eta^2 \\ -1-\eta+\eta^3 & -2-2\eta^4 & \sqrt{6}\eta & 2\eta+2\eta^4 & -1-\eta^3+\eta^4 \end{pmatrix},$$

$$D^H(S_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

四、克莱布施-戈登系数

★ 如果一个系统由两个子系统组成，每个子系统的波函数已经组合成按对称变换群 G 不可约表示变换的函数

$$P_R\psi^j_\mu(1) = \sum_\rho \psi^j_\rho(1)D^j_{\rho\mu}(R),$$
$$P_R\psi^k_\nu(2) = \sum_\sigma \psi^k_\sigma(2)D^k_{\sigma\nu}(R), \tag{3.14}$$

则总系统的波函数可表成两子系统波函数的乘积，按直乘表示变换

$$\Psi^{jk}_{\mu\nu}(1,2) = \psi^j_\mu(1)\psi^k_\nu(2),$$
$$P_R\Psi^{jk}_{\mu\nu}(1,2) = \sum_{\rho\sigma}\psi^j_\rho(1)\psi^k_\sigma(2)D^j_{\rho\mu}(R)D^k_{\sigma\nu}(R), \tag{3.15}$$
$$\{D^j(R)\times D^k(R)\}_{\rho\sigma,\mu\nu} = D^j_{\rho\mu}(R)D^k_{\sigma\nu}(R),$$

直乘表示的特征标等于两表示特征标的乘积.

两不可约表示的直乘一般是一个可约表示，它可以用本章第二节所介绍的方法(见(3.5)至(3.7)式)，通过相似变换约化成不可约表示的直和：

$$(C^{jk})^{-1}\{D^j(R)\times D^k(R)\}C^{jk} = \sum_J a_J D^J(R). \tag{3.16}$$

等式右面的级数称为克莱布施-戈登级数，相似变换矩阵 C^{jk} 的矩阵元素称为克莱布施-戈登系数．首先计算在约化中各表示的重数 a_J．把(3.16)式写成特征标形式，利用特征标的正交关系(3.3)就可计算 a_J：

$$\chi^j(R)\chi^k(R) = \sum_J a_J \chi^J(R),$$

$$a_J = \frac{1}{g}\sum_{R\in G}[\chi^j(R)\chi^k(R)]^* \chi^J(R). \tag{3.17}$$

然后代回(3.16)式计算 C^{jk} 矩阵，具体方法已在第二节详细介绍了．C^{jk} 矩阵的矩阵元素 $C^{jk}_{\mu\nu JMr}$ 把波函数 $\Psi^{jk}_{\mu\nu}(1,2)$ 组合成分属群 G 不可约表示的函数 $\Phi^J_{Mr}(1,2)$，当 $a_J>1$ 时，需用参数 r 来区分这 a_J 个不可约表示 $D^J(R)$：

$$\Phi^J_{Mr}(1,2) = \sum_{\mu\nu} \psi^j_\mu(1)\psi^k_\nu(2)C^{jk}_{\mu\nu JMr},$$

$$P_R\Phi^J_{Mr}(1,2) = \sum_{M'} \Phi^J_{M'r}(1,2)D^J_{M'M}(R). \tag{3.18}$$

(3.18)式常用狄拉克符号表出，$\psi^j_\mu(1)\psi^k_\nu(2)$ 表成 $|j,\mu\rangle|k,\nu\rangle$，有时还省略指标 j 和 k，$\Phi^J_{Mr}(1,2)$ 表成 $\| J,(r),M\rangle$：

$$\| J,(r),M\rangle = \sum_{\mu\nu} |j,\mu\rangle|k,\nu\rangle C^{jk}_{\mu\nu JMr}. \tag{3.19}$$

如果生成元 A 的表示矩阵是对角化的，把 P_A 作用在(3.19)式两边，可以根据本征值确定若干克莱布施-戈登系数 $C^{jk}_{\mu\nu JMr}$，再用其他生成元作用确定其余系数．当直乘表示维数较高时这方法比较好算．

24.　群 G 的元素乘法表如下：

左＼右	E	A	B	C	F	K	M	N
E	E	A	B	C	F	K	M	N
A	A	E	M	K	N	C	B	F
B	B	N	E	M	K	F	C	A
C	C	K	N	E	M	A	F	B
F	F	M	K	N	E	B	A	C
K	K	C	F	A	B	E	N	M
M	M	F	A	B	C	N	K	E
N	N	B	C	F	A	M	E	K

1) 试写出群 G 不可约表示特征标表(方法不限)．

2) 取生成元为 A 和 B，它们在二维不可约表示 D 中的表示矩阵分别为

$$D(A)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad D(B)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

已知下列两组函数基 ψ_μ 和 ϕ_ν 在群 G 变换中都按此二维不可约表示变换：

$$P_R\psi_\mu=\sum_{\mu'}\psi_{\mu'}D_{\mu'\mu}(R),\quad P_R\phi_\nu=\sum_{\nu'}\phi_{\nu'}D_{\nu'\nu}(R).$$

试把乘积函数 $\psi_\mu\phi_\nu$ 组合成按群 G 各不可约表示变换的函数基（请注明每个基所属的表示及其行）.

解 群 G 由八个元素组成，其中恒元 E 是一阶的，A，B，C，F 和 K 是二阶的，M 和 N 是四阶的，E 和 K 可与群 G 任一元素对易．群 G 包含五个类，$\{E\}$，$\{K\}$，$\{A, C\}$，$\{B, F\}$ 和 $\{M, N\}$，它们都是自逆类．因为 $1^1+1^2+1^2+1^2+2^2=8$，所以群 G 有四个一维和一个二维不等价不可约表示，这些表示都是自共轭表示．

群 G 有四个不变子群．不变子群 $\{E, K\}$ 的陪集是 $\{A, C\}$，$\{B, F\}$ 和 $\{M, N\}$，商群同构于 D_2 群．还有三个指数为二的不变子群，$\{E, A, K, C\}$，$\{E, B, K, F\}$ 和 $\{E, M, K, N\}$．根据这些商群的性质，可以确定群 G 的四个一维表示，再由特征标正交性定出二维表示的特征标．群 G 的特征标表如下．二维表示自直乘表示的特征标也列于表中．

	E	K	(A,C)	(B,F)	(M,N)
χ^1	1	1	1	1	1
χ^2	1	1	1	−1	−1
χ^3	1	1	−1	1	−1
χ^4	1	1	−1	−1	1
χ^5	2	−2	0	0	0
χ	4	4	0	0	0

通过特征标公式计算，可得此直乘表示约化公式：

$$X^{-1}[D^5(R)\times D^5(R)]X^{-1}$$
$$=D^1(R)\oplus D^2(R)\oplus D^3(R)\oplus D^4(R).$$

用 A 和 B 的矩阵形式代入上式，得

$$X^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},$$

$$X^{-1}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},$$

根据变换前矩阵本征值为 ±1 的本征矢量形式就可定出 X 矩阵：

本征值　1　−1　　1　−1

$$A:\quad\begin{pmatrix}a\\0\\0\\b\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0\\c\\d\\0\end{pmatrix}\qquad B:\quad\begin{pmatrix}r\\s\\s\\r\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}p\\q\\-q\\-p\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\\1&-1&0&0\end{pmatrix}.$$

由此得分属四个一维不可约表示的函数基为

$$\Psi^{(1)}=\psi_1\phi_1+\psi_2\phi_2,\qquad \Psi^{(2)}=\psi_1\phi_1-\psi_2\phi_2$$

$$\Psi^{(3)}=\psi_1\phi_2+\psi_2\phi_1,\qquad \Psi^{(4)}=\psi_1\phi_2-\psi_2\phi_1.$$

25. 计算 T 群三维不可约表示 D^T 自直乘约化的相似变换矩阵 X：

$$X^{-1}[D^T(R)\times D^T(R)]X=\sum_j a_j D^j(R).$$

解 本题用两种方法来计算，一种是矩阵相似变换的方法，另一种是状态展开的方法. 这两种方法在本质上是一样的，但当矩阵维数较高时，前一种方法书写起来不太方便. 我们希望通过这一习题的解答，让读者理解两种方法的联系，并能

习惯于用第二种方法来计算可约表示的约化问题.

先用第一种方法来计算. 取 T 群生成元 T_z^2 和 R_1，它们在三维表示 T 中的表示矩阵为

$$D^T(T_z^2)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad D^T(R_1)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

我们把 D^T 的自直乘表示记作 $D(R)$，

$$X^{-1}D(R)X\equiv X^{-1}\{D^T(R)\times D^T(R)\}X=\sum_j a_jD^j(R),$$

由特征标公式很容易计算各表示在直乘表示中的重数 a_j：

$$a_A=(12)^{-1}\{1\times 9\times 1+3\times 1\times 1\}=1,$$

$$a_E=(12)^{-1}\{1\times 9\times 1+3\times 1\times 1\}=1,$$

$$a_{E'}=(12)^{-1}\{1\times 9\times 1+3\times 1\times 1\}=1,$$

$$a_T=(12)^{-1}\{1\times 9\times 3+3\times 1\times(-1)\}=2.$$

即

$$X^{-1}D(R)X$$
$$=D^A(R)\oplus D^E(R)\oplus D^{E'}(R)\oplus D^T(R)\oplus D^T(R).$$

先看 T_z^2 元素在相似变换前后的矩阵形式，它们都是对角矩阵：

$$D(T_z^2)=\mathrm{diag}\{1,1,-1,1,1,-1,-1,-1,1\}$$

$$X^{-1}D(T_z^2)X=\mathrm{diag}\{1,1,1,-1,-1,1,-1,-1,1\}.$$

可见 X 矩阵的第 1，2，3，6 和 9 列矢量中，第 3，6，7 和 8 分量为零，而第 4，5，7 和 8 列矢量中，第 1，2，4，5 和 9 分量为零. 再看 $D^T(R_1)$表示矩阵，它对三维空间矢量的作用是把第一个分量变到第二个分量，把第二个分量变到第三个分量，和把第三个分量变到第一个分量，即三个分量依次循环变换. 在直乘空间，如果用两个指标来描写矩阵的行(列)，则同样把第 11 分量变到第 22 个分量，依此类推. 翻译到用 1 至 9 指标来描写矩阵的行(列)，则有

$$11\to 22\to 33\to 11,\qquad 12\to 23\to 31\to 12,$$

$$1\to 5\to 9\to 1,\qquad 2\to 6\to 7\to 2,$$

$$13 \to 21 \to 32 \to 13,$$

$$3 \to 4 \to 8 \to 3.$$

变换后的矩阵为

$$X^{-1}D(R_1)X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\omega = \exp\{-i2\pi/3\}$. 既然 X 矩阵的前三列的第 3 和 6 分量为零，它们又都是 $D(R_1)$ 的本征矢量，由上面的循环性质知，它们的第 2，7，4 和 8 分量也必须为零，即只能有第 1，5 和 9 分量可能不为零. 考虑到本征值的具体数值，可定出 X 矩阵前三列的非零分量如下

$$X_{11} = X_{51} = X_{91} = X_{12} = X_{13} = 1,$$

$$X_{92} = X_{53} = \omega, \quad X_{52} = X_{93} = \omega^2.$$

由于 X 矩阵的幺正性质，它的第 6 和 9 列矩阵只有第 2 和 4 分量可能不为零. 又由于在直乘表示的约化中，两个 T 表示可以作任意线性组合，最简单的选择是，在第 6 和 9 列矩阵中，只有 $X_{26} = X_{49} = 1$，其余都为零. 代入关于 $D(R_1)$ 的相似变换关系，得

$$D(R_1)X_{\cdot 6} = X_{\cdot 4}, \qquad D(R_1)X_{\cdot 4} = X_{\cdot 5},$$

$$D(R_1)X_{\cdot 9} = X_{\cdot 7}, \qquad D(R_1)X_{\cdot 7} = X_{\cdot 8},$$

解得

$$X_{64} = X_{75} = X_{87} = X_{38} = 1,$$

其余分量都为零. 最后得 X 矩阵为

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \omega & \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

应该把 X 矩阵代入相似变换公式进行验算.

现在用第二种方法来计算. 用狄拉克符号来表达变换前后表示空间的基. 变换前的表示空间是两个子空间的直乘，基记作 $|T,\mu\rangle|T,\nu\rangle$. 以后熟练了这方法后，此基中的两个 T 可以省略. 根据群 O 生成元在表示 T 中的表示矩阵，得

$$T_z^2|T,1\rangle = -|T,1\rangle,\quad T_z^2|T,2\rangle = -|T,2\rangle,$$

$$T_z^2|T,3\rangle = |T,3\rangle,\quad R_1|T,1\rangle = |T,2\rangle,$$

$$R_1|T,2\rangle = |T,3\rangle,\quad R_1|T,3\rangle = |T,1\rangle.$$

变换后的表示空间是五个子空间的直和，基都是生成元 T_z^2 的本征矢量，分别记作 $\|A\rangle$，$\|E\rangle$，$\|E'\rangle$，$\|T,(1),\rho\rangle$和 $\|T,(2),\rho\rangle$，ρ 取 1，2，3. 它们满足

$$T_z^2\|A\rangle = \|A\rangle,\qquad T_z^2\|E\rangle = \|E\rangle,$$

$$T_z^2\|E'\rangle = \|E'\rangle,\qquad T_z^2\|T,(r),1\rangle = -\|T,(r),1\rangle,$$

$$T_z^2\|T,(r),2\rangle = -\|T,(r),2\rangle,$$

$$T_z^2\|T,(r),3\rangle = \|T,(r),3\rangle.$$

其中 $r=1$ 或 2. 在 T_z^2 作用下不变的基可展开为

$$c_1|T,1\rangle|T,1\rangle + c_2|T,1\rangle|T,2\rangle + c_3|T,2\rangle|T,1\rangle$$

$$+ c_4|T,2\rangle|T,2\rangle + c_5|T,3\rangle|T,3\rangle,$$

而在 T_z^2 作用下改符号的基可展开为

$$d_1|T,1\rangle|T,3\rangle + d_2|T,2\rangle|T,3\rangle$$

$$+d_3|T,3\rangle|T,1\rangle+d_4|T,3\rangle|T,2\rangle.$$

把 R_1 作用在基 $\|A\rangle$ 上，得

$$\begin{aligned}R_1\|A\rangle=&\ c_1^A|T,2\rangle|T,2\rangle+c_2^A|T,2\rangle|T,3\rangle\\&+c_3^A|T,3\rangle|T,2\rangle+c_4^A|T,3\rangle|T,3\rangle\\&+c_5^A|T,1\rangle|T,1\rangle\\=\ \|A\rangle=&\ c_1^A|T,1\rangle|T,1\rangle+c_2^A|T,1\rangle|T,2\rangle\\&+c_3^A|T,2\rangle|T,1\rangle+c_4^A|T,2\rangle|T,2\rangle\\&+c_5^A|T,3\rangle|T,3\rangle.\end{aligned}$$

比较得 $c_2^A=c_3^A=0$，和 $c_1^A=c_4^A=c_5^A$．取 $c_1^A=\sqrt{1/3}$，得归一化的基

$$\|A\rangle=\sqrt{1/3}\{|T,1\rangle|T,1\rangle+|T,2\rangle|T,2\rangle+|T,3\rangle|T,3\rangle\}.$$

把 R_1 作用在基 $\|E\rangle$ 上，得

$$\begin{aligned}R_1\|E\rangle=&\ c_1^E|T,2\rangle|T,2\rangle+c_2^E|T,2\rangle|T,3\rangle\\&+c_3^E|T,3\rangle|T,2\rangle+c_4^E|T,3\rangle|T,3\rangle\\&+c_5^E|T,1\rangle|T,1\rangle\\=\ \omega\|E\rangle=&\ c_1^E\omega|T,1\rangle|T,1\rangle+c_2^E\omega|T,1\rangle|T,2\rangle\\&+c_3^E\omega|T,2\rangle|T,1\rangle+c_4^E\omega|T,2\rangle|T,2\rangle\\&+c_5^E\omega|T,3\rangle|T,3\rangle.\end{aligned}$$

比较得 $c_2^E=c_3^E=0$，和 $c_1^E=c_4^E\omega=c_5^E\omega^2$．取 $c_1^E=\sqrt{1/3}$，得归一化的基

$$\begin{aligned}\|E\rangle=&\sqrt{1/3}\{|T,1\rangle|T,1\rangle+\omega^2|T,2\rangle|T,2\rangle\\&+\omega|T,3\rangle|T,3\rangle\}.\end{aligned}$$

同理得

$$\begin{aligned}\|E'\rangle=&\sqrt{1/3}\{|T,1\rangle|T,1\rangle+\omega|T,2\rangle|T,2\rangle\\&+\omega^2|T,3\rangle|T,3\rangle\}.\end{aligned}$$

把 R_1 作用在基 $\|T,(r),3\rangle$ 上，得

$$
\begin{aligned}
R_1 \| T,(r),3\rangle &= c_1^{T(r)}|T,2\rangle|T,2\rangle + c_2^{T(r)}|T,2\rangle|T,3\rangle \\
&\quad + c_3^{T(r)}|T,3\rangle|T,2\rangle + c_4^{T(r)}|T,3\rangle|T,3\rangle \\
&\quad + c_5^{T(r)}|T,1\rangle|T,1\rangle \\
&= \| T,(r),1\rangle = d_1^{T(r)}|T,1\rangle|T,3\rangle + d_2^{T(r)}|T,2\rangle|T,3\rangle \\
&\quad + d_3^{T(r)}|T,3\rangle|T,1\rangle + d_4^{T(r)}|T,3\rangle|T,2\rangle.
\end{aligned}
$$

比较得 $c_1^{T(r)} = c_4^{T(r)} = c_5^{T(r)} = 0$. 可取

$$
\| T,(1),3\rangle = |T,1\rangle|T,2\rangle, \qquad \| T,(2),3\rangle = |T,2\rangle|T,1\rangle,
$$

用 R_1 作用，算得

$$
\begin{aligned}
\| T,(1),1\rangle &= R_1 \| T,(1),3\rangle = |T,2\rangle|T,3\rangle, \\
\| T,(1),2\rangle &= R_1 \| T,(1),1\rangle = |T,3\rangle|T,1\rangle, \\
\| T,(2),1\rangle &= R_1 \| T,(2),3\rangle = |T,3\rangle|T,2\rangle, \\
\| T,(2),2\rangle &= R_1 \| T,(2),1\rangle = |T,1\rangle|T,3\rangle,
\end{aligned}
$$

这些结果与用第一种方法算得的 X 矩阵是符合的.

26. 试计算 O 群各不可约表示的直乘表示约化的克莱布施-戈登级数和克莱布施-戈登系数.

解 第 19 题已计算了 O 群生成元 C_4 和 C_3 在五个不等价不可约表示 A, B, E, T_1 和 T_2 中的表示矩阵，现取相似变换把 C_3 的表示矩阵对角化，结果如下：

$$
D^A(C_4) = D^A(C_3) = D^B(C_3) = 1, \qquad D^B(C_4) = -1,
$$

$$
D^E(C_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D^E(C_3) = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix},
$$

$$
D^{T_1}(C_4) = -D^{T_2}(C_4) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2\omega^{-1} & 2\omega & -1 \\ 2\omega & 1 & -2\omega^{-1} \\ -1 & -2\omega^{-1} & -2\omega \end{pmatrix},
$$

$$
D^{T_1}(C_3) = D^{T_2}(C_3) = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix},
$$

其中 $\omega=\exp\{-i2\pi/3\}$. 因为 C_3 表示矩阵是对角化的，对角元是 ω^m，而在每个不可约表示中这幂次 m 又不重复，所以可以用这幂次 m 来标记各不可约表示的行和列，A 和 B 是一维表示，略去行列指标 0，表示 E 的行列指标是 1 和 -1，表示 T_1 和 T_2 的行列指标是 1，0 和 -1. 注意幂次 m 的取值可相差 3 的倍数.

恒等表示 A 与任一表示直乘仍是该表示. 反对称表示 B 与其他表示直乘也容易计算：

$$D^B\times D^B=D^A,\qquad D^B\times D^E=\sigma_3^{-1}D^E\sigma_3,$$

$$D^B\times D^{T_1}=D^{T_2},\qquad D^B\times D^{T_2}=D^{T_1},$$

其中 σ_3 是泡里矩阵. T_2 表示在与其他表示直乘时，可以先提出一个 B 表示，从而化成 T_1 表示与其他表示的直乘. 下面在表中列出用特征标法计算得的直乘表示分解结果，并计算克莱布施-戈登系数.

O 群表示的直乘表示约化

	C_E	$3C_4^2$	$6C_4$	$8C_3$	$6C_2$	直乘表示的约化
A	1	1	1	1	1	
B	1	1	-1	1	-1	
E	2	2	0	-1	0	
T_1	3	-1	1	0	-1	
T_2	3	-1	-1	0	1	
$E\times E$	4	4	0	1	0	$A\oplus B\oplus E$
$E\times T_1\simeq E\times T_2$	6	-2	0	0	0	$T_1\oplus T_2$
$T_1\times T_1\simeq T_2\times T_2$	9	1	1	0	1	$A\oplus E\oplus T_1\oplus T_2$
$T_1\times T_2$	9	1	1	0	-1	$B\oplus E\oplus T_2\oplus T_1$

(1) $E\times E\simeq A\oplus B\oplus E$.

由于生成元 C_3 的表示矩阵都是对角化的，它们的对角元也就是在 C_3 作用下的本征值. 由此得

$$\|A\rangle=a_1|E,1\rangle|E,-1\rangle+a_2|E,-1\rangle|E,1\rangle,$$

$$\|B\rangle=b_1|E,1\rangle|E,-1\rangle+b_2|E,-1\rangle|E,1\rangle,$$

$$\|E,1\rangle=c_1|E,-1\rangle|E,-1\rangle,$$

$$\|E,-1\rangle=c_2|E,1\rangle|E,1\rangle.$$

再用 C_4 作用，得

$$\|A\rangle = C_4\|A\rangle = a_1|E,-1\rangle|E,1\rangle + a_2|E,1\rangle|E,-1\rangle,$$

$$-\|B\rangle = C_4\|B\rangle = b_1|E,-1\rangle|E,1\rangle + b_2|E,1\rangle|E,-1\rangle,$$

$$\|E,-1\rangle = C_4\|E,1\rangle = c_1|E,1\rangle|E,1\rangle.$$

定出 $a_1 = a_2$，$b_1 = -b_2$，和 $c_1 = c_2$．归一化后得

$$\|A\rangle = 2^{-1/2}\{|E,1\rangle|E,-1\rangle + |E,-1\rangle|E,1\rangle\},$$

$$\|B\rangle = 2^{-1/2}\{|E,1\rangle|E,-1\rangle - |E,-1\rangle|E,1\rangle\},$$

$$\|E,1\rangle = |E,-1\rangle|E,-1\rangle, \quad \|E,-1\rangle = |E,1\rangle|E,1\rangle.$$

(2) $E\times T_1 \simeq E\oplus T_2$.

根据 C_3 的本征值得

$$\|T_1,1\rangle = a_1|E,1\rangle|T_1,0\rangle + a_2|E,-1\rangle|T_1,-1\rangle,$$

$$\|T_1,0\rangle = b_1|E,1\rangle|T_1,-1\rangle + b_2|E,-1\rangle|T_1,1\rangle,$$

$$\|T_1,-1\rangle = c_1|E,1\rangle|T_1,1\rangle + c_2|E,-1\rangle|T_1,0\rangle.$$

再用 C_4 作用，得

$$C_4\|T_1,1\rangle = \frac{a_1}{3}|E,-1\rangle\{2\omega|T_1,1\rangle + |T_1,0\rangle - 2\omega^2|T_1,-1\rangle\}$$

$$+\frac{a_2}{3}|E,1\rangle\{-|T_1,1\rangle - 2\omega^2|T_1,0\rangle - 2\omega|T_1,-1\rangle\},$$

$$= \frac{1}{3}\{-2\omega^2\|T_1,1\rangle + 2\omega\|T_1,0\rangle - \|T_1,-1\rangle\}.$$

解得 $a_1 = b_2 = -c_2 = a_2 = c_1 = -b_1$，归一化后得

$$\|T_1,1\rangle = 2^{-1/2}\{|E,1\rangle|T_1,0\rangle + |E,-1\rangle|T_1,-1\rangle\},$$

$$\|T_1,0\rangle = 2^{-1/2}\{-|E,1\rangle|T_1,-1\rangle + |E,-1\rangle|T_1,1\rangle\},$$

$$\|T_1,-1\rangle = 2^{-1/2}\{|E,1\rangle|T_1,1\rangle - |E,-1\rangle|T_1,0\rangle\}.$$

对 T_2 表示，状态的展开式相同，但在 C_4 作用下反号，因而得 $a_1 = -b_2 = c_2 = -a_2 = c_1 = -b_1$，归一化后得

$$\|T_2,1\rangle = 2^{-1/2}\{|E,1\rangle|T_1,0\rangle - |E,-1\rangle|T_1,-1\rangle\},$$

$$\|T_2,0\rangle = -2^{-1/2}\{|E,1\rangle|T_1,-1\rangle + |E,-1\rangle|T_1,1\rangle\},$$

$$\|T_2,-1\rangle = 2^{-1/2}\{|E,1\rangle|T_1,1\rangle + |E,-1\rangle|T_1,0\rangle\}.$$

对 $E\times T_2$ 的克莱布施-戈登系数，只要把上面结果中所有 T_1 和 T_2 交换，即

$$\| T_2,1\rangle=2^{-1/2}\{|E,1\rangle|T_2,0\rangle+|E,-1\rangle|T_2,-1\rangle\},$$

$$\| T_2,0\rangle=2^{-1/2}\{-|E,1\rangle|T_2,-1\rangle+|E,-1\rangle|T_2,1\rangle\},$$

$$\| T_2,-1\rangle=2^{-1/2}\{|E,1\rangle|T_2,1\rangle-|E,-1\rangle|T_2,0\rangle\},$$

$$\| T_1,1\rangle=2^{-1/2}\{|E,1\rangle|T_2,0\rangle-|E,-1\rangle|T_2,-1\rangle\},$$

$$\| T_1,0\rangle=-2^{-1/2}\{|E,1\rangle|T_2,-1\rangle+|E,-1\rangle|T_2,1\rangle\},$$

$$\| T_1,-1\rangle=2^{-1/2}\{|E,1\rangle|T_2,1\rangle+|E,-1\rangle|T_2,0\rangle\}.$$

(3) $T_1\times T_1\simeq T_2\times T_2\simeq A\oplus E\oplus T_1\oplus T_2$.

根据 C_3 的本征值得

$$\| A\rangle=a_1|T_1,1\rangle|T_1,-1\rangle+a_2|T_1,0\rangle|T_1,0\rangle$$
$$+a_3|T_1,-1\rangle|T_1,1\rangle,$$

$$\| E,1\rangle=b_1|T_1,1\rangle|T_1,0\rangle+b_2|T_1,0\rangle|T_1,1\rangle$$
$$+b_3|T_1,-1\rangle|T_1,-1\rangle,$$

$$\| E,-1\rangle=b_4|T_1,1\rangle|T_1,1\rangle+b_5|T_1,0\rangle|T_1,-1\rangle$$
$$+b_6|T_1,-1\rangle|T_1,0\rangle,$$

$$\| T_1,1\rangle=c_1|T_1,1\rangle|T_1,0\rangle+c_2|T_1,0\rangle|T_1,1\rangle$$
$$+c_3|T_1,-1\rangle|T_1,-1\rangle,$$

$$\| T_1,0\rangle=c_4|T_1,1\rangle|T_1,-1\rangle+c_5|T_1,0\rangle|T_1,0\rangle$$
$$+c_6|T_1,-1\rangle|T_1,1\rangle,$$

$$\| T_1,-1\rangle=c_7|T_1,1\rangle|T_1,1\rangle+c_8|T_1,0\rangle|T_1,-1\rangle$$
$$+c_9|T_1,-1\rangle|T_1,0\rangle,$$

再用 C_4 作用，得

$$\| A\rangle=C_4\ |A\rangle$$
$$=\frac{1}{9}\{(2\omega^2a_1+4\omega^2a_2+2\omega^2a_3)|T_1,1\rangle|T_1,1\rangle$$
$$+(4\omega a_1+2\omega a_2-2\omega a_3)|T_1,1\rangle|T_1,0\rangle$$

$$+(4a_1-4a_2+a_3)|T_1,1\rangle|T_1,-1\rangle\}+\cdots,$$

$$|E,-1\rangle = C_4|E,1\rangle$$

$$=\frac{1}{9}\{(-4b_1-4b_2+b_3)|T_1,1\rangle|T_1,1\rangle$$

$$+(-2\omega^2 b_1+4\omega^2 b_2+2\omega^2 b_3)|T_1,1\rangle|T_1,0\rangle$$

$$+(4\omega b_1-2\omega b_2+2\omega b_3)|T_1,1\rangle|T_1,-1\rangle$$

$$+(-4b_1-b_2+4b_3)|T_1,0\rangle|T_1,-1\rangle$$

$$+(-b_1-4b_2+4b_3)|T_1,-1\rangle|T_1,0\rangle\}+\cdots.$$

解得 $a_1=-a_2=a_3$，$b_1=b_2=-b_3=-b_4=-b_5=-b_6$，归一化后得

$$|A\rangle=3^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|T_1,-1\rangle-|T_1,0\rangle|T_1,0\rangle$$

$$+|T_1,-1\rangle|T_1,1\rangle\},$$

$$|E,1\rangle=3^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|T_1,0\rangle+|T_1,0\rangle|T_1,1\rangle$$

$$-|T_1,-1\rangle|T_1,-1\rangle\},$$

$$|E,-1\rangle=-3^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|T_1,1\rangle+|T_1,0\rangle|T_1,-1\rangle$$

$$+|T_1,-1\rangle|T_1,0\rangle\}.$$

T_1 表示的态必须与上面的态正交.

$$|T_1,1\rangle=c_1|T_1,1\rangle|T_1,0\rangle+c_2|T_1,0\rangle|T_1,1\rangle$$

$$+(c_1+c_2)|T_1,-1\rangle|T_1,-1\rangle,$$

$$|T_1,0\rangle=c_4|T_1,1\rangle|T_1,-1\rangle+(c_4+c_6)|T_1,0\rangle|T_1,0\rangle$$

$$+c_6|T_1,-1\rangle|T_1,1\rangle,$$

$$|T_1,-1\rangle=c_7|T_1,1\rangle|T_1,1\rangle+c_8|T_1,0\rangle|T_1,-1\rangle$$

$$-(c_7+c_8)|T_1,-1\rangle|T_1,0\rangle.$$

再用 C_4 作用，得

$$\begin{aligned}
C_4\|T_1,1\rangle = \frac{1}{9}\{&[-4c_1-4c_2+(c_1+c_2)]|T_1,1\rangle|T_1,1\rangle \\
&+[-2\omega^2c_1+4\omega^2c_2+2\omega^2(c_1+c_2)]|T_1,1\rangle|T_1,0\rangle \\
&+[4\omega c_1-2\omega c_2+2\omega(c_1+c_2)]|T_1,1\rangle|T_1,-1\rangle \\
&+[4\omega^2c_1-2\omega^2c_2+2\omega^2(c_1+c_2)]|T_1,0\rangle|T_1,1\rangle \\
&+[2\omega c_1+2\omega c_2+4\omega(c_1+c_2)]|T_1,0\rangle|T_1,0\rangle \\
&+[-4c_1-c_2+4(c_1+c_2)]|T_1,0\rangle|T_1,-1\rangle \\
&+[-2\omega c_1+4\omega c_2+2\omega(c_1+c_2)]|T_1,-1\rangle|T_1,1\rangle \\
&+[-c_1-4c_2+4(c_1+c_2)]|T_1,-1\rangle|T_1,0\rangle \\
&+[2\omega^2c_1+2\omega^2c_2+4\omega^2(c_1+c_2)]|T_1,-1\rangle|T_1,-1\rangle\} \\
=\frac{1}{3}\{&-2\omega^2\|T_1,1\rangle+2\omega\|T_1,0\rangle-\|T_1,-1\rangle\}.
\end{aligned}$$

解得 $c_1=-c_2=c_4=-c_6=-c_8$，$c_7=0$ 归一化后得

$$\begin{aligned}
\|T_1,1\rangle &= 2^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|T_1,0\rangle-|T_1,0\rangle|T_1,1\rangle\}, \\
\|T_1,0\rangle &= 2^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|T_1,-1\rangle-|T_1,-1\rangle|T_1,1\rangle\}, \\
\|T_1,-1\rangle &= 2^{-1/2}\{-|T_1,0\rangle|T_1,-1\rangle+|T_1,-1\rangle|T_1,0\rangle\}.
\end{aligned}$$

由状态的正交性得

$$\begin{aligned}
\|T_2,1\rangle = d_1\{&|T_1,1\rangle|T_1,0\rangle+|T_1,0\rangle|T_1,1\rangle \\
&+2|T_1,-1\rangle|T_1,-1\rangle\}, \\
\|T_2,0\rangle = d_2\{&|T_1,1\rangle|T_1,-1\rangle+2|T_1,0\rangle|T_1,0\rangle \\
&+|T_1,-1\rangle|T_1,1\rangle\}, \\
\|T_2,-1\rangle = d_3\{&2|T_1,1\rangle|T_1,1\rangle-|T_1,0\rangle|T_1,-1\rangle \\
&-|T_1,-1\rangle|T_1,0\rangle\}.
\end{aligned}$$

用 C_4 作用得

$$C_4\|T_2,1\rangle=\frac{d_1}{9}\{-6|T_1,1\rangle|T_1,1\rangle+6\omega^2|T_1,1\rangle|T_1,0\rangle$$

$$+6\omega|T_1,1\rangle|T_1,-1\rangle+6\omega^2|T_1,0\rangle|T_1,1\rangle$$

$$+12\omega|T_1,0\rangle|T_1,0\rangle+3|T_1,0\rangle|T_1,-1\rangle$$

$$+6\omega|T_1,-1\rangle|T_1,1\rangle+3|T_1,-1\rangle|T_1,0\rangle$$

$$+12\omega^2|T_1,-1\rangle|T_1,-1\rangle\}$$

$$=\frac{1}{3}\{2\omega^2\,\|T_1,1\rangle-2\omega\,\|T_1,0\rangle+\|T_1,-1\rangle\}.$$

解得 $d_1=-d_2=-d_3$. 归一化后得

$$\|T_2,1\rangle=-6^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|T_1,0\rangle+|T_1,0\rangle|T_1,1\rangle$$
$$+2|T_1,-1\rangle|T_1,-1\rangle\},$$

$$\|T_2,0\rangle=6^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|T_1,-1\rangle+2|T_1,0\rangle|T_1,0\rangle$$
$$+|T_1,-1\rangle|T_1,1\rangle\},$$

$$\|T_2,-1\rangle=6^{-1/2}\{2|T_1,1\rangle|T_1,1\rangle-|T_1,0\rangle|T_1,-1\rangle$$
$$-|T_1,-1\rangle|T_1,0\rangle\}.$$

对 $T_2\times T_2$ 情况，只是展开式中 $|T_1,\mu\rangle|T_1,\nu\rangle$ 换成 $|T_2,\mu\rangle|T_2,\nu\rangle$，其他完全相同.

(4) $T_1\times T_2\simeq B\oplus E\oplus T_2\oplus T_1$.

情况 (3) 乘反对称表示 B 就得到情况(4). 请注意表示 B 和 E 直乘时出现的相似变换 σ_3. 计算结果如下：

$$\|B\rangle=3^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|T_2,-1\rangle-|T_1,0\rangle|T_2,0\rangle$$
$$+|T_1,-1\rangle|T_2,1\rangle\},$$

$$\|E,1\rangle=3^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|T_2,0\rangle+|T_1,0\rangle|T_2,1\rangle$$
$$-|T_1,-1\rangle|T_2,-1\rangle\},$$

$$\|E,-1\rangle=3^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|T_2,1\rangle+|T_1,0\rangle|T_2,-1\rangle$$
$$+|T_1,-1\rangle|T_2,0\rangle\}.$$

$$\|T_2,1\rangle=2^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|T_2,0\rangle-|T_1,0\rangle|T_2,1\rangle\},$$

$$\|T_2,0\rangle=2^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|T_2,-1\rangle-|T_1,-1\rangle|T_2,1\rangle\},$$

$$\| T_2, -1\rangle = 2^{-1/2}\{-|T_1,0\rangle|T_2,-1\rangle + |T_1,-1\rangle|T_2,0\rangle\}.$$

$$\| T_1,1\rangle = -6^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|T_2,0\rangle + |T_1,0\rangle|T_2,1\rangle + 2|T_1,-1\rangle|T_2,-1\rangle\},$$

$$\| T_1,0\rangle = 6^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|T_2,-1\rangle + 2|T_1,0\rangle|T_2,0\rangle + |T_1,-1\rangle|T_2,1\rangle\},$$

$$\| T_1,-1\rangle = 6^{-1/2}\{2|T_1,1\rangle|T_2,1\rangle - |T_1,0\rangle|T_2,-1\rangle - |T_1,-1\rangle|T_2,0\rangle\}.$$

27. 试根据 20 题给出的 I 群特征标表，计算下列直乘表示约化的克莱布施-戈登级数和克莱布施-戈登系数：

(1) $D^{T_1}\times D^{T_1}$；(2) $D^{T_1}\times D^{T_2}$；(3) $D^{T_2}\times D^{T_2}$；

(4) $D^{T_1}\times D^{G}$；(5) $D^{T_2}\times D^{G}$；(6) $D^{T_1}\times D^{H}$；

(7) $D^{T_2}\times D^{H}$；(8) $D^{G}\times D^{G}$；(9) $D^{G}\times D^{H}$；

(10) $D^{H}\times D^{H}$.

解　本题只列出计算结果，略去计算过程. 20 题已给出 I 群的特征标表. 注意直乘表示的特征标等于两表示特征标的乘积. 23 题已给出 I 群生成元 T_0 和 S_1 在各不可约表示中的表示矩阵. 因为 T_0 表示矩阵是对角化的，对角元是幂 η^m，$\eta=\exp\{-i2\pi/5\}$，而在每个不可约表示中这幂次 m 又不重复，所以可以用这幂次 m 来标记各不可约表示的行和列，表示 A 的行列指标是 0，表示 T_1 是 1，0 和 −1，表示 T_2 是 2，0 和 −2，表示 G 是 2，1，−1 和 −2，表示 H 是 2，1，0，−1 和 −2. 注意幂次 m 可相差 5 的倍数.

I 群表示的直乘表示分解

	E	$12C_5$	$12C_5^2$	$15C_2$	$20C_3$	直乘表示的分解
A	1	1	1	1	1	
T_1	3	p^{-1}	$-p$	−1	0	
T_2	3	$-p$	p^{-1}	−1	0	
G	4	−1	−1	0	1	
H	5	0	0	1	−1	
$T_1\times T_1$	9	p^{-2}	p^2	1	0	$A\oplus T_1\oplus H$
$T_1\times T_2$	9	−1	−1	1	0	$G\oplus H$

续表

	E	$12C_5$	$12C_5^2$	$15C_2$	$20C_3$	直乘表示的分解
$T_2\times T_2$	9	p^2	p^{-2}	1	0	$A\oplus T_2\oplus H$
$T_1\times G$	12	$-p^{-1}$	p	0	0	$T_2\oplus G\oplus H$
$T_2\times G$	12	p	$-p^{-1}$	0	0	$T_1\oplus G\oplus H$
$T_1\times H$	15	0	0	-1	0	$T_1\oplus T_2\oplus G\oplus H$
$T_2\times H$	15	0	0	-1	0	$T_1\oplus T_2\oplus G\oplus H$
$G\times G$	16	1	[illegible]	0	1	$A\oplus T_1\oplus T_2\oplus G\oplus H$
$G\times H$	20	0	0	0	-1	$T_1\oplus T_2\oplus G\oplus 2H$
$H\times H$	25	0	0	1	1	$A\oplus T_1\oplus T_2\oplus 2G\oplus 2H$

(1) $D^{T_1}\times D^{T_1}\simeq D^A\oplus D^{T_1}\oplus D^H$.

$\|A,0\rangle=3^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|T_1,-1\rangle-|T_1,0\rangle|T_1,0\rangle+|T_1,-1\rangle|T_1,1\rangle\}$,

$\|T_1,1\rangle=2^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|T_1,0\rangle-|T_1,0\rangle|T_1,1\rangle\}$,

$\|T_1,0\rangle=2^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|T_1,-1\rangle-|T_1,-1\rangle|T_1,1\rangle\}$,

$\|T_1,-1\rangle=2^{-1/2}\{|T_1,0\rangle|T_1,-1\rangle-|T_1,-1\rangle|T_1,0\rangle\}$,

$\|H,2\rangle=|T_1,1\rangle|T_1,1\rangle$,

$\|H,1\rangle=2^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|T_1,0\rangle+|T_1,0\rangle|T_1,1\rangle\}$,

$\|H,0\rangle=6^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|T_1,-1\rangle+2|T_1,0\rangle|T_1,0\rangle+|T_1,-1\rangle|T_1,1\rangle\}$,

$\|H,-1\rangle=2^{-1/2}\{|T_1,0\rangle|T_1,-1\rangle+|T_1,-1\rangle|T_1,0\rangle\}$,

$\|H,-2\rangle=|T_1,-1\rangle|T_1,-1\rangle$.

(2) $D^{T_1}\times D^{T_2}\simeq D^G\oplus D^H$.

$\|G,2\rangle=3^{-1/2}\{\sqrt{2}|T_1,0\rangle|T_2,2\rangle-|T_1,-1\rangle|T_2,-2\rangle\}$,

$\|G,1\rangle=3^{-1/2}\{\sqrt{2}|T_1,1\rangle|T_2,0\rangle-|T_1,-1\rangle|T_2,2\rangle\}$,

$\|G,-1\rangle=3^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|T_2,-2\rangle-\sqrt{2}|T_1,-1\rangle|T_2,0\rangle\}$,

$\|G,-2\rangle=3^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|T_2,2\rangle+\sqrt{2}|T_1,0\rangle|T_2,-2\rangle\}$,

$\|H,2\rangle=3^{-1/2}\{|T_1,0\rangle|T_2,2\rangle+\sqrt{2}|T_1,-1\rangle|T_2,-2\rangle\}$,

$\|H,1\rangle=3^{-1/2}\{-|T_1,1\rangle|T_2,0\rangle-\sqrt{2}|T_1,-1\rangle|T_2,2\rangle\}$,

$\|H,0\rangle=|T_1,0\rangle|T_2,0\rangle$,

$$|H,-1\rangle=3^{-1/2}\{-\sqrt{2}|T_1,1\rangle|T_2,-2\rangle-|T_1,-1\rangle|T_2,0\rangle\},$$

$$|H,-2\rangle=3^{-1/2}\{-\sqrt{2}|T_1,1\rangle|T_2,2\rangle+|T_1,0\rangle|T_2,-2\rangle\}.$$

(3) $D^{T_2}\times D^{T_2}\simeq D^A\oplus D^{T_2}\oplus D^H$.

$$|A,0\rangle=3^{-1/2}\{|T_2,2\rangle|T_2,-2\rangle+|T_2,0\rangle|T_2,0\rangle+|T_2,-2\rangle|T_2,2\rangle\},$$

$$|T_2,2\rangle=2^{-1/2}\{|T_2,2\rangle|T_2,0\rangle-|T_2,0\rangle|T_2,2\rangle\},$$

$$|T_2,0\rangle=2^{-1/2}\{-|T_2,2\rangle|T_2,-2\rangle+|T_2,-2\rangle|T_2,2\rangle\},$$

$$|T_2,-2\rangle=2^{-1/2}\{|T_2,0\rangle|T_2,-2\rangle-|T_2,-2\rangle|T_2,0\rangle\},$$

$$|H,2\rangle=2^{-1/2}\{|T_2,2\rangle|T_2,0\rangle+|T_2,0\rangle|T_2,2\rangle\},$$

$$|H,1\rangle=|T_2,-2\rangle|T_2,-2\rangle,$$

$$|H,0\rangle=6^{-1/2}\{|T_2,2\rangle|T_2,-2\rangle-2|T_2,0\rangle|T_2,0\rangle+|T_2,-2\rangle|T_2,2\rangle\},$$

$$|H,-1\rangle=-|T_2,2\rangle|T_2,2\rangle,$$

$$|H,-2\rangle=2^{-1/2}\{|T_2,0\rangle|T_2,-2\rangle+|T_2,-2\rangle|T_2,0\rangle\}.$$

(4) $D^{T_1}\times D^G\simeq D^{T_2}\oplus D^G\oplus D^H$.

$$|T_2,2\rangle=2^{-1}\{|T_1,1\rangle|G,1\rangle+\sqrt{2}|T_1,0\rangle|G,2\rangle-|T_1,-1\rangle|G,-2\rangle\},$$

$$|T_2,0\rangle=2^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|G,-1\rangle-|T_1,-1\rangle|G,1\rangle\},$$

$$|T_2,-2\rangle=2^{-1}\{|T_1,1\rangle|G,2\rangle-\sqrt{2}|T_1,0\rangle|G,-2\rangle$$
$$-|T_1,-1\rangle|G,-1\rangle\},$$

$$|G,2\rangle=3^{-1/2}\{\sqrt{2}|T_1,1\rangle|G,1\rangle-|T_1,0\rangle|G,2\rangle\},$$

$$|G,1\rangle=3^{-1/2}\{|T_1,0\rangle|G,1\rangle-\sqrt{2}|T_1,-1\rangle|G,2\rangle\},$$

$$|G,-1\rangle=3^{-1/2}\{-\sqrt{2}|T_1,1\rangle|G,-2\rangle-|T_1,0\rangle|G,-1\rangle\},$$

$$|G,-2\rangle=3^{-1/2}\{|T_1,0\rangle|G,-2\rangle+\sqrt{2}|T_1,-1\rangle|G,-1\rangle\},$$

$$|H,2\rangle=12^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|G,1\rangle+\sqrt{2}|T_1,0\rangle|G,2\rangle+3|T_1,-1\rangle|G,-2\rangle\},$$

$$|H,1\rangle=3^{-1/2}\{-\sqrt{2}|T_1,0\rangle|G,1\rangle-|T_1,-1\rangle|G,2\rangle\},$$

$$|H,0\rangle=2^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|G,-1\rangle+|T_1,-1\rangle|G,1\rangle\},$$

$$|H,-1\rangle=3^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|G,-2\rangle-\sqrt{2}|T_1,0\rangle|G,-1\rangle\},$$

$$|H,-2\rangle=12^{-1/2}\{3|T_1,1\rangle|G,2\rangle-\sqrt{2}|T_1,0\rangle|G,-2\rangle$$

$+|T_1,-1\rangle|G,-1\rangle\}.$

(5) $D^{T_2}\times D^G\simeq D^{T_1}\oplus D^G\oplus D^H.$

$\|T_1,1\rangle=2^{-1}\{|T_2,2\rangle|G,2\rangle+\sqrt{2}|T_2,0\rangle|G,1\rangle+|T_2,-1\rangle|G,2\rangle\},$

$\|T_1,0\rangle=2^{-1/2}\{|T_2,2\rangle|G,-2\rangle+|T_2,-2\rangle|G,2\rangle\},$

$\|T_1,-1\rangle=2^{-1}\{-|T_2,2\rangle|G,2\rangle-\sqrt{2}|T_2,0\rangle|G,-1\rangle$

$-|T_2,-2\rangle|G,1\rangle\},$

$\|G,2\rangle=3^{-1/2}\{|T_2,0\rangle|G,2\rangle+\sqrt{2}|T_2,-2\rangle|G,-1\rangle\},$

$\|G,1\rangle=3^{-1/2}\{|T_2,0\rangle|G,1\rangle-\sqrt{2}|T_2,-2\rangle|G,-2\rangle\},$

$\|G,-1\rangle=3^{-1/2}\{\sqrt{2}|T_2,2\rangle|G,2\rangle-|T_2,0\rangle|G,-1\rangle\},$

$\|G,-2\rangle=3^{-1/2}\{-\sqrt{2}|T_2,2\rangle|G,1\rangle-|T_2,0\rangle|G,-2\rangle\},$

$\|H,2\rangle=3^{-1/2}\{\sqrt{2}|T_2,0\rangle|G,2\rangle-|T_2,-2\rangle|G,-1\rangle\},$

$\|H,1\rangle=12^{-1/2}\{-3|T_2,2\rangle|G,-1\rangle+\sqrt{2}|T_2,0\rangle|G,1\rangle$

$+|T_2,-2\rangle|G,-2\rangle\},$

$\|H,0\rangle=2^{-1/2}\{|T_2,2\rangle|G,-2\rangle-|T_2,-2\rangle|G,2\rangle\},$

$\|H,-1\rangle=12^{-1/2}\{|T_2,2\rangle|G,2\rangle+\sqrt{2}|T_2,0\rangle|G,-1\rangle$

$-3|T_2,-2\rangle|G,1\rangle\},$

$\|H,-2\rangle=3^{-1/2}\{|T_2,2\rangle|G,1\rangle-\sqrt{2}|T_2,0\rangle|G,-2\rangle\}.$

(6) $D^{T_1}\times D^H\simeq D^{T_1}\oplus D^{T_2}\oplus D^G\oplus D^H.$

$\|T_1,1\rangle=10^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|H,0\rangle-\sqrt{3}|T_1,0\rangle|H,1\rangle+\sqrt{6}|T_1,-1\rangle|H,2\rangle\},$

$\|T_1,0\rangle=10^{-1/2}\{\sqrt{3}|T_1,1\rangle|H,-1\rangle-2|T_1,0\rangle|H,0\rangle$

$+\sqrt{3}|T_1,-1\rangle|H,1\rangle\},$

$\|T_1,-1\rangle=10^{-1/2}\{\sqrt{6}|T_1,1\rangle|H,-2\rangle-\sqrt{3}|T_1,0\rangle|H,-1\rangle$

$+|T_1,-1\rangle|H,0\rangle\},$

$\|T_2,2\rangle=5^{-1/2}\{\sqrt{2}|T_1,1\rangle|H,1\rangle+|T_1,0\rangle|H,2\rangle+\sqrt{2}|T_1,-1\rangle|H,-2\rangle\},$

$\|T_2,0\rangle=5^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|H,-1\rangle+\sqrt{3}|T_1,0\rangle|H,0\rangle+|T_1,-1\rangle|H,1\rangle\},$

$$\|T_2,-2\rangle=5^{-1/2}\{-\sqrt{2}|T_1,1\rangle|H,2\rangle+|T_1,0\rangle|H,-2\rangle$$
$$+\sqrt{2}|T_1,-1\rangle|H,-1\rangle\},$$

$$\|G,2\rangle=15^{-1/2}\{-2|T_1,1\rangle|H,1\rangle-\sqrt{2}|T_1,0\rangle|H,2\rangle$$
$$+3|T_1,-1\rangle|H,-2\rangle\},$$

$$\|G,1\rangle=15^{-1/2}\{\sqrt{6}|T_1,1\rangle|H,0\rangle+\sqrt{8}|T_1,0\rangle|H,1\rangle+|T_1,-1\rangle|H,2\rangle\},$$

$$\|G,-1\rangle=15^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|H,-2\rangle+\sqrt{8}|T_1,0\rangle|H,-1\rangle$$
$$+\sqrt{6}|T_1,-1\rangle|H,0\rangle\},$$

$$\|G,-2\rangle=15^{-1/2}\{3|T_1,1\rangle|H,2\rangle+\sqrt{2}|T_1,0\rangle|H,-2\rangle$$
$$+2|T_1,-1\rangle|H,-1\rangle\},$$

$$\|H,2\rangle=3^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|H,1\rangle-\sqrt{2}|T_1,0\rangle|H,2\rangle\},$$

$$\|H,1\rangle=6^{-1/2}\{\sqrt{3}|T_1,1\rangle|H,0\rangle-|T_1,0\rangle|H,1\rangle-\sqrt{2}|T_1,-1\rangle|H,2\rangle\},$$

$$\|H,0\rangle=2^{-1/2}\{|T_1,1\rangle|H,-1\rangle-|T_1,-1\rangle|H,1\rangle\},$$

$$\|H,-1\rangle=6^{-1/2}\{\sqrt{2}|T_1,1\rangle|H,-2\rangle+|T_1,0\rangle|H,-1\rangle$$
$$-\sqrt{3}|T_1,-1\rangle|H,0\rangle\},$$

$$\|H,-2\rangle=3^{-1/2}\{\sqrt{2}|T_1,0\rangle|H,-2\rangle-|T_1,-1\rangle|H,-1\rangle\}.$$

(7) $D^{T_2}\times D^{H}\simeq D^{T_1}\oplus D^{T_2}\oplus D^{G}\oplus D^{H}$.

$$\|T_1,1\rangle=5^{-1/2}\{-\sqrt{2}|T_2,2\rangle|H,-1\rangle-|T_2,0\rangle|H,1\rangle$$
$$-\sqrt{2}|T_2,-1\rangle|H,2\rangle\},$$

$$\|T_1,0\rangle=5^{-1/2}\{|T_2,2\rangle|H,-2\rangle+\sqrt{3}|T_2,0\rangle|H,0\rangle+|T_2,-2\rangle|H,2\rangle\},$$

$$\|T_1,-1\rangle=5^{-1/2}\{\sqrt{2}|T_2,2\rangle|H,2\rangle-|T_2,0\rangle|H,-1\rangle$$
$$-\sqrt{2}|T_2,-2\rangle|H,1\rangle\},$$

$$\|T_2,2\rangle=10^{-1/2}\{|T_2,2\rangle|H,0\rangle+\sqrt{3}|T_2,0\rangle|H,2\rangle$$
$$-\sqrt{6}|T_2,-2\rangle|H,-1\rangle\},$$

$$\|T_2,0\rangle=10^{-1/2}\{\sqrt{3}|T_2,2\rangle|H,-2\rangle-2|T_2,0\rangle|H,0\rangle$$
$$+\sqrt{3}|T_2,-2\rangle|H,2\rangle\},$$

$$\| T_2,-2\rangle = 10^{-1/2}\{\sqrt{6}|T_2,2\rangle|H,1\rangle + \sqrt{3}|T_2,0\rangle|H,-2\rangle$$
$$+ |T_2,-2\rangle|H,0\rangle\},$$

$$\| G,2\rangle = 15^{-1/2}\{\sqrt{6}|T_2,2\rangle|H,0\rangle - \sqrt{8}|T_2,0\rangle|H,2\rangle - |T_2,-2\rangle|H,-1\rangle\},$$

$$\| G,1\rangle = 15^{-1/2}\{3|T_2,2\rangle|H,-1\rangle - \sqrt{2}|T_2,0\rangle|H,1\rangle$$
$$-2|T_2,-2\rangle|H,-2\rangle\},$$

$$\| G,-1\rangle = 15^{-1/2}\{2|T_2,2\rangle|H,2\rangle - \sqrt{2}|T_2,0\rangle|H,-1\rangle$$
$$+3|T_2,-2\rangle|H,1\rangle\},$$

$$\| G,-2\rangle = 15^{-1/2}\{-|T_2,2\rangle|H,1\rangle + \sqrt{8}|T_2,0\rangle|H,-2\rangle$$
$$-\sqrt{6}|T_2,-2\rangle|H,0\rangle\},$$

$$\| H,2\rangle = 6^{-1/2}\{\sqrt{3}|T_2,2\rangle|H,0\rangle + |T_2,0\rangle|H,2\rangle + \sqrt{2}|T_2,-2\rangle|H,-1\rangle\},$$

$$\| H,1\rangle = 3^{-1/2}\{-\sqrt{2}|T_2,0\rangle|H,1\rangle + |T_2,-2\rangle|H,-2\rangle\},$$

$$\| H,0\rangle = 2^{-1/2}\{-|T_2,2\rangle|H,-2\rangle + |T_2,-2\rangle|H,2\rangle\},$$

$$\| H,-1\rangle = 3^{-1/2}\{|T_2,2\rangle|H,2\rangle + \sqrt{2}|T_2,0\rangle|H,-1\rangle\},$$

$$\| H,-2\rangle = 6^{-1/2}\{\sqrt{2}|T_2,2\rangle|H,1\rangle - |T_2,0\rangle|H,-2\rangle - \sqrt{3}|T_2,-2\rangle|H,0\rangle\}.$$

(8) $D^G \times D^G \simeq D^{A_1} \oplus D^{T_1} \oplus D^{T_2} \oplus D^G \oplus D^H$.

$$\| A,0\rangle = 2^{-1}\{|G,2\rangle|G,-2\rangle + |G,1\rangle|G,-1\rangle + |G,-1\rangle|G,1\rangle$$
$$-|G,-2\rangle|G,2\rangle\},$$

$$\| T_1,1\rangle = 2^{-1/2}\{|G,2\rangle|G,-1\rangle - |G,-1\rangle|G,2\rangle\},$$

$$\| T_1,0\rangle = 2^{-1}\{-|G,2\rangle|G,-2\rangle + |G,1\rangle|G,-1\rangle$$
$$-|G,-1\rangle|G,1\rangle + |G,-2\rangle|G,2\rangle\},$$

$$\| T_1,-1\rangle = 2^{-1/2}\{-|G,1\rangle|G,-2\rangle + |G,-2\rangle|G,1\rangle\},$$

$$\| T_2,2\rangle = 2^{-1/2}\{-|G,-1\rangle|G,-2\rangle + |G,-2\rangle|G,-1\rangle\},$$

$$\| T_2,0\rangle = 2^{-1}\{-|G,2\rangle|G,-2\rangle - |G,1\rangle|G,-1\rangle$$
$$+|G,-1\rangle|G,1\rangle + |G,-2\rangle|G,2\rangle\},$$

$$\| T_2,-2\rangle = 2^{-1/2}\{-|G,2\rangle|G,1\rangle + |G,1\rangle|G,2\rangle\},$$

$$\| G,2\rangle = 3^{-1/2}\{|G,1\rangle|G,1\rangle - |G,-1\rangle|G,-2\rangle - |G,-2\rangle|G,-1\rangle\},$$

$$\| G,1\rangle = 3^{-1/2}\{|G,2\rangle|G,-1\rangle + |G,-1\rangle|G,2\rangle - |G,-2\rangle|G,-2\rangle\},$$

$$|G,-1\rangle = 3^{-1/2}\{-|G,2\rangle|G,2\rangle + |G,1\rangle|G,-2\rangle + |G,-2\rangle|G,1\rangle\},$$

$$|G,-2\rangle = 3^{-1/2}\{-|G,2\rangle|G,1\rangle - |G,1\rangle|G,2\rangle + |G,-1\rangle|G,-1\rangle\},$$

$$|H,2\rangle = 6^{-1/2}\{2|G,1\rangle|G,1\rangle + |G,-1\rangle|G,-2\rangle + |G,-2\rangle|G,-1\rangle\},$$

$$|H,1\rangle = 6^{-1/2}\{|G,2\rangle|G,-1\rangle + |G,-1\rangle|G,2\rangle + 2|G,-2\rangle|G,-2\rangle\},$$

$$|H,0\rangle = 2^{-1}\{|G,2\rangle|G,-2\rangle - |G,1\rangle|G,-1\rangle - |G,-1\rangle|G,1\rangle + |G,-2\rangle|G,2\rangle\},$$

$$|H,-1\rangle = 6^{-1/2}\{-2|G,2\rangle|G,2\rangle - |G,1\rangle|G,-2\rangle - |G,-2\rangle|G,1\rangle\},$$

$$|H,-2\rangle = 6^{-1/2}\{|G,2\rangle|G,1\rangle + |G,1\rangle|G,2\rangle + 2|G,-1\rangle|G,-1\rangle\}.$$

(9) $D^G \times D^H \simeq D^{T_1} \oplus D^{T_2} \oplus D^G \oplus 2D^H$.

$$|T_1,1\rangle = 20^{-1/2}\{2|G,2\rangle|H,-1\rangle + \sqrt{6}|G,1\rangle|H,0\rangle + |G,-1\rangle|H,2\rangle + 3|G,-2\rangle|H,-2\rangle\},$$

$$|T_1,0\rangle = 10^{-1/2}\{-|G,2\rangle|H,-2\rangle - 2|G,1\rangle|H,-1\rangle - 2|G,-1\rangle|H,1\rangle + |G,-2\rangle|H,2\rangle\},$$

$$|T_1,-1\rangle = 20^{-1/2}\{3|G,2\rangle|H,2\rangle + |G,1\rangle|H,-2\rangle + \sqrt{6}|G,-1\rangle|H,0\rangle - 2|G,-2\rangle|H,1\rangle\},$$

$$|T_2,2\rangle = 20^{-1/2}\{\sqrt{6}|G,2\rangle|H,0\rangle - 3|G,1\rangle|H,1\rangle + 2|G,-1\rangle|H,-2\rangle + |G,-2\rangle|H,-1\rangle\},$$

$$|T_2,0\rangle = 10^{-1/2}\{-2|G,2\rangle|H,-2\rangle + |G,1\rangle|H,-1\rangle + |G,-1\rangle|H,1\rangle + 2|G,-2\rangle|H,2\rangle\},$$

$$|T_2,-2\rangle = 20^{-1/2}\{|G,2\rangle|H,1\rangle - 2|G,1\rangle|H,2\rangle - 3|G,-1\rangle|H,-1\rangle - \sqrt{6}|G,-2\rangle|H,0\rangle\},$$

$$|G,2\rangle = 15^{-1/2}\{\sqrt{3}|G,2\rangle|H,0\rangle + \sqrt{2}|G,1\rangle|H,1\rangle + \sqrt{2}|G,-1\rangle|H,-2\rangle - \sqrt{8}|G,-2\rangle|H,-1\rangle\},$$

$$|G,1\rangle = 15^{-1/2}\{-\sqrt{2}|G,2\rangle|H,-1\rangle - \sqrt{3}|G,1\rangle|H,0\rangle + \sqrt{8}|G,-1\rangle|H,2\rangle + \sqrt{2}|G,-2\rangle|H,-2\rangle\},$$

$$|G,-1\rangle = 15^{-1/2}\{\sqrt{2}|G,2\rangle|H,2\rangle + \sqrt{8}|G,1\rangle|H,-2\rangle - \sqrt{3}|G,-1\rangle|H,0\rangle + \sqrt{2}|G,-2\rangle|H,1\rangle\},$$

$$\| G,-2\rangle = 15^{-1/2}\{\sqrt{8}|G,2\rangle|H,1\rangle + \sqrt{2}|G,1\rangle|H,2\rangle$$
$$-\sqrt{2}|G,-1\rangle|H,-1\rangle + \sqrt{3}|G,-2\rangle|H,0\rangle\},$$

$$\| H,(1),2\rangle = 3^{-1/2}\{-|G,1\rangle|H,1\rangle - |G,-1\rangle|H,-2\rangle$$
$$-|G,-2\rangle|H,-1\rangle\},$$

$$\| H,(1),1\rangle = 12^{-1/2}\{-2|G,2\rangle|H,-1\rangle + \sqrt{6}|G,1\rangle|H,0\rangle$$
$$+|G,-1\rangle|H,2\rangle - |G,-2\rangle|H,-2\rangle\},$$

$$\| H,(1),0\rangle = 2^{-1/2}\{|G,2\rangle|H,-2\rangle + |G,-2\rangle|H,2\rangle\},$$

$$\| H,(1),-1\rangle = 12^{-1/2}\{|G,2\rangle|H,2\rangle - |G,1\rangle|H,-2\rangle$$
$$-\sqrt{6}|G,-1\rangle|H,0\rangle - 2|G,-2\rangle|H,1\rangle\},$$

$$\| H,(1),-2\rangle = 3^{-1/2}\{|G,2\rangle|H,1\rangle - |G,1\rangle|H,2\rangle + |G,-1\rangle|H,-1\rangle\},$$

$$\| H,(2),2\rangle = 12^{-1/2}\{-\sqrt{6}|G,2\rangle|H,0\rangle - |G,1\rangle|H,1\rangle$$
$$+2|G,-1\rangle|H,-2\rangle - |G,-2\rangle|H,-1\rangle\},$$

$$\| H,(2),1\rangle = 3^{-1/2}\{|G,2\rangle|H,-1\rangle$$
$$+|G,-1\rangle|H,2\rangle - |G,-2\rangle|H,-2\rangle\},$$

$$\| H,(2),0\rangle = 2^{-1/2}\{|G,1\rangle|H,-1\rangle - |G,-1\rangle|H,1\rangle\},$$

$$\| H,(2),-1\rangle = 3^{-1/2}\{|G,2\rangle|H,2\rangle - |G,1\rangle|H,-2\rangle + |G,-2\rangle|H,1\rangle\},$$

$$\| H,(2),-2\rangle = 12^{-1/2}\{|G,2\rangle|H,1\rangle + 2|G,1\rangle|H,2\rangle$$
$$+|G,-1\rangle|H,-1\rangle - \sqrt{6}|G,-2\rangle|H,0\rangle\}.$$

(10) $D^H \times D^H \simeq D^A \oplus D^{T_1} \oplus D^{T_2} \oplus 2D^G \oplus 2D^H$.

$$\| A,0\rangle = 5^{-1/2}\{|H,2\rangle|H,-2\rangle - |H,1\rangle|H,-1\rangle + |H,0\rangle|H,0\rangle$$
$$-|H,-1\rangle|H,1\rangle + |H,-2\rangle|H,2\rangle\},$$

$$\| T_1,1\rangle = 10^{-1/2}\{\sqrt{2}|H,2\rangle|H,-1\rangle - \sqrt{3}|H,1\rangle|H,0\rangle$$
$$+\sqrt{3}|H,0\rangle|H,1\rangle - \sqrt{2}|H,-1\rangle|H,2\rangle\},$$

$$\| T_1,0\rangle = 10^{-1/2}\{2|H,2\rangle|H,-2\rangle - |H,1\rangle|H,-1\rangle$$
$$+|H,-1\rangle|H,1\rangle - 2|H,-2\rangle|H,2\rangle\},$$

$$\| T_1,-1\rangle = 10^{-1/2}\{\sqrt{2}|H,1\rangle|H,-2\rangle - \sqrt{3}|H,0\rangle|H,-1\rangle$$
$$+\sqrt{3}|H,-1\rangle|H,0\rangle - \sqrt{2}|H,-2\rangle|H,1\rangle\},$$

$$\| T_2,2\rangle = 20^{-1/2}\{\sqrt{6}\,|H,2\rangle|H,0\rangle - \sqrt{6}\,|H,0\rangle|H,2\rangle$$
$$+2|H,-1\rangle|H,-2\rangle - 2|H,-2\rangle|H,-1\rangle\},$$

$$\| T_2,0\rangle = 10^{-1/2}\{|H,2\rangle|H,-2\rangle + 2|H,1\rangle|H,-1\rangle$$
$$-2|H,-1\rangle|H,1\rangle - |H,-2\rangle|H,2\rangle\},$$

$$\| T_2,-2\rangle = 20^{-1/2}\{-2|H,2\rangle|H,1\rangle + 2|H,1\rangle|H,2\rangle$$
$$+\sqrt{6}\,|H,0\rangle|H,-2\rangle - \sqrt{6}\,|H,-2\rangle|H,0\rangle\},$$

$$\| G,(1),2\rangle = 10^{-1/2}\{-\sqrt{2}\,|H,2\rangle|H,0\rangle + \sqrt{2}\,|H,0\rangle|H,2\rangle$$
$$+\sqrt{3}\,|H,-1\rangle|H,-2\rangle - \sqrt{3}\,|H,-2\rangle|H,-1\rangle\},$$

$$\| G,(1),1\rangle = 10^{-1/2}\{\sqrt{3}\,|H,2\rangle|H,-1\rangle + \sqrt{2}\,|H,1\rangle|H,0\rangle$$
$$-\sqrt{2}\,|H,0\rangle|H,1\rangle - \sqrt{3}\,|H,-1\rangle|H,2\rangle\},$$

$$\| G,(1),-1\rangle = 10^{-1/2}\{\sqrt{3}\,|H,1\rangle|H,-2\rangle + \sqrt{2}\,|H,0\rangle|H,-1\rangle$$
$$-\sqrt{2}\,|H,-1\rangle|H,0\rangle - \sqrt{3}\,|H,-2\rangle|H,1\rangle\},$$

$$\| G,(1),-2\rangle = 10^{-1/2}\{\sqrt{3}\,|H,2\rangle|H,1\rangle - \sqrt{3}\,|H,1\rangle|H,2\rangle$$
$$+\sqrt{2}\,|H,0\rangle|H,-2\rangle - \sqrt{2}\,|H,-2\rangle|H,0\rangle\},$$

$$\| G,(2),2\rangle = 30^{-1/2}\{\sqrt{6}\,|H,2\rangle|H,0\rangle + 4|H,1\rangle|H,1\rangle$$
$$+\sqrt{6}\,|H,0\rangle|H,2\rangle - |H,-1\rangle|H,-2\rangle - |H,-2\rangle|H,-1\rangle\},$$

$$\| G,(2),1\rangle = 30^{-1/2}\{|H,2\rangle|H,-1\rangle + \sqrt{6}\,|H,1\rangle|H,0\rangle + \sqrt{6}\,|H,0\rangle|H,1\rangle$$
$$+|H,-1\rangle|H,2\rangle - 4|H,-2\rangle|H,-2\rangle\},$$

$$\| G,(2),-1\rangle = 30^{-1/2}\{-4|H,2\rangle|H,2\rangle - |H,1\rangle|H,-2\rangle$$
$$-\sqrt{6}\,|H,0\rangle|H,-1\rangle - \sqrt{6}\,|H,-1\rangle|H,0\rangle$$
$$-|H,-2\rangle|H,1\rangle\},$$

$$\| G,(2),-2\rangle = 30^{-1/2}\{|H,2\rangle|H,1\rangle + |H,1\rangle|H,2\rangle$$
$$+\sqrt{6}\,|H,0\rangle|H,-2\rangle + 4|H,-1\rangle|H,-1\rangle$$
$$+\sqrt{6}\,|H,-2\rangle|H,0\rangle\},$$

$$\| H,(1),2\rangle = 7^{-1/2}\{\sqrt{2}\,|H,2\rangle|H,0\rangle - \sqrt{3}\,|H,1\rangle|H,1\rangle$$
$$+\sqrt{2}\,|H,0\rangle|H,2\rangle\},$$

$$\| H,(1),1\rangle = 14^{-1/2}\{\sqrt{6}|H,2\rangle|H,-1\rangle - |H,1\rangle|H,0\rangle - |H,0\rangle|H,1\rangle + \sqrt{6}|H,-1\rangle|H,2\rangle\},$$

$$\| H,(1),0\rangle = 14^{-1/2}\{2|H,2\rangle|H,-2\rangle + |H,1\rangle|H,-1\rangle - 2|H,0\rangle|H,0\rangle + |H,-1\rangle|H,1\rangle + 2|H,-2\rangle|H,2\rangle\},$$

$$\| H,(1),-1\rangle = 14^{-1/2}\{\sqrt{6}|H,1\rangle|H,-2\rangle - |H,0\rangle|H,-1\rangle - |H,-1\rangle|H,0\rangle + \sqrt{6}|H,-2\rangle|H,1\rangle\},$$

$$\| H,(1),-2\rangle = 7^{-1/2}\{\sqrt{2}|H,0\rangle|H,-2\rangle - \sqrt{3}|H,-1\rangle|H,-1\rangle + \sqrt{2}|H,-2\rangle|H,0\rangle\},$$

$$\| H,(2),2\rangle = 210^{-1/2}\{\sqrt{3}|H,2\rangle|H,0\rangle + \sqrt{8}|H,1\rangle|H,1\rangle + \sqrt{3}|H,0\rangle|H,2\rangle + \sqrt{98}|H,-1\rangle|H,-2\rangle + \sqrt{98}|H,-2\rangle|H,-1\rangle\},$$

$$\| H,(2),1\rangle = 105^{-1/2}\{-2|H,2\rangle|H,-1\rangle - \sqrt{24}|H,1\rangle|H,0\rangle - \sqrt{24}|H,0\rangle|H,1\rangle - 2|H,-1\rangle|H,2\rangle - 7|H,-2\rangle|H,-2\rangle\},$$

$$\| H,(2),0\rangle = 70^{-1/2}\{|H,2\rangle|H,-2\rangle + 4|H,1\rangle|H,-1\rangle + 6|H,0\rangle|H,0\rangle + 4|H,-1\rangle|H,1\rangle + |H,-2\rangle|H,2\rangle\},$$

$$\| H,(2),-1\rangle = 105^{-1/2}\{7|H,2\rangle|H,2\rangle - 2|H,1\rangle|H,-2\rangle - \sqrt{24}|H,0\rangle|H,-1\rangle - \sqrt{24}|H,-1\rangle|H,0\rangle - 2|H,-2\rangle|H,1\rangle\},$$

$$\| H,(2),-2\rangle = 210^{-1/2}\{-\sqrt{98}|H,2\rangle|H,1\rangle - \sqrt{98}|H,1\rangle|H,2\rangle + \sqrt{3}|H,0\rangle|H,-2\rangle + \sqrt{8}|H,-1\rangle|H,-1\rangle + \sqrt{3}|H,-2\rangle|H,0\rangle\}.$$

第四章　三维转动群

一、三维转动群的一般性质

★　三维转动群又称三维幺模实正交矩阵群，它由所有行列式为+1的三维实正交矩阵的集合构成，记作SO(3)群．SO(3)群描写物理系统空间各向同性的对称性质，它又是最简单的紧致单纯李群，因此从物理和数学角度看，它都十分重要．SO(3)群的元素$R(\hat{n},\omega)$描写实三维空间中的矢量绕$\hat{n}$方向转动ω角的转动变换，满足

$$
\begin{aligned}
R(\hat{n},\omega+2\pi)&=R(\hat{n},\omega)=R(-\hat{n},2\pi-\omega),\\
R(\hat{n},\pi)&=R(-\hat{n},\pi).
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

当$\hat{n}$沿坐标轴方向时，转动矩阵可写成指数矩阵的形式

$$
R(\boldsymbol{e}_1,\omega)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\omega&-\sin\omega\\0&\sin\omega&\cos\omega\end{pmatrix}=\exp\{-\mathrm{i}\omega T_1\},
$$

$$
R(\boldsymbol{e}_2,\omega)=\begin{pmatrix}\cos\omega&0&\sin\omega\\0&1&0\\-\sin\omega&0&\cos\omega\end{pmatrix}=\exp\{-\mathrm{i}\omega T_2\},
$$

$$
R(\boldsymbol{e}_3,\omega)=\begin{pmatrix}\cos\omega&-\sin\omega&0\\\sin\omega&\cos\omega&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\exp\{-\mathrm{i}\omega T_3\},
$$

其中

$$
T_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix},\quad T_2=\begin{pmatrix}0&0&\mathrm{i}\\0&0&0\\-\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix},\quad T_3=\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}&0\\\mathrm{i}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.
\tag{4.2}
$$

它们满足角动量算符典型的对易关系

$$[T_1, T_2] = \mathrm{i}T_3, \qquad 1,2,3 \text{ 循环}. \tag{4.3}$$

★ 转动 $S(\varphi,\theta)$

$$S(\varphi,\theta) = R(\boldsymbol{e}_3,\ \varphi)R(\boldsymbol{e}_2,\ \theta) \tag{4.4}$$

把 $\boldsymbol{e}_3$ 转到 $\hat{n}(\theta,\varphi)$方向，因此

$$R(\hat{n},\ \omega) = S(\varphi,\theta)R(\boldsymbol{e}_3,\ \omega)S(\varphi,\theta)^{-1} = \exp\{-\mathrm{i}\omega\hat{n}\cdot\boldsymbol{T}\},$$

$$ST_3S^{-1} = \hat{n}\cdot\boldsymbol{T}, \qquad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{e}_1T_1 + \boldsymbol{e}_2T_2 + \boldsymbol{e}_3T_3, \tag{4.5}$$

$R(\hat{n},\ \omega)$是绕 $\hat{n}$方向转动 ω 角的元素，它可用矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 来描写，其中 $\boldsymbol{\omega}$ 是沿 $\hat{n}$ 方向长度为 ω 的矢量，$\hat{n}$方向的极角为 θ，方位角为 φ. 因此，SO(3)群的群参数可取矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的球坐标(ω, θ, φ)，或其直角坐标($\omega_1,\omega_2,\omega_3$). 群参数的变化区域是半径为 π 的球体. 在球面上，直径两端的点描写同一个元素. SO(3)群的群空间是一个双连通的闭区域，SO(3)群是紧致的简单李群. 采用这组参数时，SO(3)群自身表示的生成元就是(4.2)式给出的矩阵 T_a.(4.5)式指出，转动相同角度 ω 的元素集合构成 SO(3)群的类.

★ 二维幺模幺正矩阵的集合构成 SU(2)群，它的元素可一般地表为

$$u(\hat{n},\ \omega) = \mathbf{1}\cos(\omega/2) - \mathrm{i}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n})\sin(\omega/2). \tag{4.6}$$

它满足

$$\begin{gathered} u(\hat{n},\omega_1)\ u(\hat{n},\omega_2) = u(\hat{n},\omega_1+\omega_2), \\ u(\hat{n},4\pi) = \mathbf{1}, \quad u(\hat{n},2\pi) = -\mathbf{1}, \\ u(\hat{n},\omega) = u(-\hat{n},4\pi-\omega) = -u(-\hat{n},2\pi-\omega). \end{gathered} \tag{4.7}$$

可见 SU(2)群的元素 $u(\hat{n},\ \omega)$也可用矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 描写，但现在 $\boldsymbol{\omega}$ 的变化区域是半径为 2π 的球体，在球面上的点都代表同一个元素 $-\mathbf{1}$，SU(2)群的群空间是一个单连通的闭区域，SU(2)群是紧致的简单李群. 采用参数 $\boldsymbol{\omega}$ 时，SU(2)群自身表示的生成元是 $\sigma_a/2$. 相同 ω 的 $u(\hat{n},\ \omega)$矩阵集合构成 SU(2)群的类. SO(3)群元素 $R(\hat{n},\ \omega)$和 SU(2)群元素 $\pm u(\hat{n},\ \omega)$通过下面公式建立起一二对应的同态关系，

$$u(\hat{n},\ \omega)\sigma_a u(\hat{n},\ \omega)^{-1} = \sum_{b=1}^{3}\sigma_b R_{ba}(\hat{n},\ \omega). \tag{4.8}$$

因此，SU(2)群是 SO(3)群的覆盖群.

1. 用数学归纳法证明辅助公式

$$e^{\alpha}\beta e^{-\alpha} = \beta + \frac{1}{1!}[\alpha,\beta] + \frac{1}{2!}[\alpha,[\alpha,\beta]] + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\overbrace{[\alpha,[\alpha,\cdots[\alpha}^{n},\beta]\cdots]],$$

其中 α 和 β 是同维矩阵. 再利用此辅助公式证明(4.8)式，并根据 $u(\hat{n},\omega)$ 和 $R(\hat{n},\omega)$ 的这一对应关系，证明

$$\mathrm{SO}(3) \sim \mathrm{SU}(2).$$

证

$$e^{\alpha}\beta e^{-\alpha} = \left\{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\alpha^{m}\right\}\beta\left\{\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{r}}{r!}\alpha^{r}\right\}$$
$$= \beta + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}n!}{m!(n-m)!}\alpha^{m}\beta\alpha^{n-m}\right\}.$$

我们用数学归纳法来证明，花括号中的量可表为 n 重对易关系

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}n!}{m!(n-m)!}\alpha^{m}\beta\alpha^{n-m} = \overbrace{[\alpha,[\alpha,\cdots[\alpha}^{n},\beta]\cdots]].$$

上式对 $n=1$ 显然成立. 现在设上式对 $n-1$ 成立，要证对 n 也成立.

$$\overbrace{[\alpha,[\alpha,\cdots[\alpha}^{n},\beta]\cdots]]$$
$$= \alpha\overbrace{[\alpha,[\alpha,\cdots[\alpha}^{n-1},\beta]\cdots]] - \overbrace{[\alpha,[\alpha,\cdots[\alpha}^{n-1},\beta]\cdots]]\alpha$$
$$= \alpha\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{n-m}(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!}\alpha^{m-1}\beta\alpha^{n-m}$$
$$-\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-m-1}(n-1)!}{(m)!(n-m-1)!}\alpha^{m}\beta\alpha^{n-m-1}\alpha$$
$$= \alpha^{n}\beta + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n-m}(n-1)!}{(m)!(n-m)!}[m+(n-m)] + (-1)^{n}\beta\alpha^{n}$$
$$= \sum_{m=0}^{n}\frac{(-1)^{n-m}n!}{m!(n-m)!}\alpha^{m}\beta\alpha^{n-m}.$$

证完. 进一步，因为 $(T_{c})_{ba} = \mathrm{i}\epsilon_{cab}$，

$$2^{-1}[\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n},\sigma_{a}] = \mathrm{i}\sum_{bc}n_{c}\epsilon_{cab}\sigma_{b} = \sum_{b=1}^{3}\sigma_{b}(\hat{n}\cdot T)_{ba},$$

$$2^{-2}[\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n},[\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n},\sigma_a]]=\sum_{b=1}^{3}\sigma_b[(\hat{n}\cdot T)^2]_{ba}.$$

取 n 次对易关系后得

$$2^{-n}\overbrace{[\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n},[\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n},\cdots[\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n},\sigma_a]\cdots]]}^{n}=\sum_{b=1}^{3}\sigma_b[(\hat{n}\cdot T)^n]_{ba}.$$

利用辅助公式和

$$u(\hat{n},\omega)=\exp\{-\mathrm{i}\omega\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n}/2\},\qquad R(\hat{n},\omega)=\exp(-\mathrm{i}\omega\hat{n}\cdot T),$$

得

$$u(\hat{n},\omega)\sigma_a u(\hat{n},\omega)^{-1}=\sigma_a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}\omega)^n}{n!}\sum_{b=1}^{3}\sigma_b[(\hat{n}\cdot T)^n]_{ba}$$

$$=\sum_{b=1}^{3}\sigma_b R_{ba}(\hat{n},\omega).$$

任意一个二维幺模幺正矩阵 $u(\hat{n},\omega)\in SU(2)$，由此式惟一地确定一个三维幺模实正交矩阵 $R(\hat{n},\omega)\in SO(3)$，反之，如果两个二维幺模幺正矩阵都由此式确定同一个三维幺模实正交矩阵，则它们只能相差一个能与三个 σ_a 矩阵都对易的幺模幺正矩阵，而这样的矩阵只能是常数矩阵，幺模条件确定常数为 ±1，因而此式给出一个三维幺模实正交矩阵 $R(\hat{n},\omega)$ 和两个互差负号的二维幺模幺正矩阵 $\pm u(\hat{n},\omega)$ 间的一二对应关系，此对应关系显然对元素乘积保持不变，从而得 SO(3)群与 SU(2)群同态关系：SO(3) ~ SU(2).

2. 把上式的 $R(\hat{n},\omega)=\exp(-\mathrm{i}\omega\hat{n}\cdot\boldsymbol{T})$ 展开成有限项矩阵之和.

提示： $(\hat{n}\cdot\boldsymbol{T})^3=\hat{n}\cdot\boldsymbol{T}$.

解 根据

$$\hat{n}\cdot\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}n_3 & \mathrm{i}n_2\\ \mathrm{i}n_3 & 0 & \mathrm{i}n_1\\ -\mathrm{i}n_2 & \mathrm{i}n_1 & 0\end{pmatrix},$$

$$(\hat{n}\cdot\boldsymbol{T})^2=\begin{pmatrix}1-n_1n_1 & -n_1n_2 & -n_1n_3\\ -n_2n_1 & 1-n_2n_2 & -n_2n_3\\ -n_3n_1 & -n_3n_2 & 1-n_3n_3\end{pmatrix},$$

$$(\hat{n}\cdot\boldsymbol{T})^3=\hat{n}\cdot\boldsymbol{T},$$

得

$$
\begin{aligned}
R(\hat{n},\omega) &= \exp(-\mathrm{i}\omega\hat{n}\cdot\boldsymbol{T}) \\
&= \mathbf{1}-\mathrm{i}\omega\hat{n}\cdot\boldsymbol{T}-\frac{1}{2!}\omega^2(\hat{n}\cdot\boldsymbol{T})^2+\mathrm{i}\omega^3(\hat{n}\cdot\boldsymbol{T})^3+\cdots \\
&= \mathbf{1}-(\hat{n}\cdot\boldsymbol{T})^2+(\hat{n}\cdot\boldsymbol{T})^2\left\{1-\frac{1}{2!}\omega^2+\frac{1}{4!}\omega^4+\cdots\right\} \\
&\quad -\mathrm{i}(\hat{n}\cdot\boldsymbol{T})\left\{\omega-\frac{1}{3!}\omega^3+\frac{1}{5!}\omega^5+\cdots\right\} \\
&= \mathbf{1}-(\hat{n}\cdot\boldsymbol{T})^2+(\hat{n}\cdot\boldsymbol{T})^2\cos\omega-\mathrm{i}(\hat{n}\cdot\boldsymbol{T})\sin\omega .
\end{aligned}
$$

另一个计算方法是利用相似变换关系

$$\hat{n}\cdot\boldsymbol{T}=ST_3S^{-1},\quad S=R(\boldsymbol{e}_3,\varphi)R(\boldsymbol{e}_2,\theta),$$

其中 θ 和 φ 是 $\hat{n}(\theta,\varphi)$ 方向的极角和方位角，S 是把 x_3 轴转到 $\hat{n}$ 方向的转动变换，而把 $R(\boldsymbol{e}_3,\omega)$ 的指数形式展开可得

$$R(\boldsymbol{e}_3,\omega)=\exp(-\mathrm{i}\omega T_3)=\mathbf{1}-T_3^2+T_3^2\cos\omega-\mathrm{i}T_3\sin\omega,$$

由此得

$$
\begin{aligned}
R(\hat{n},\omega) &= \exp(-\mathrm{i}\omega\hat{n}\cdot\boldsymbol{T})=S\exp(-\mathrm{i}\omega T_3)S^{-1} \\
&= SR(\boldsymbol{e}_3,\omega)S^{-1} \\
&= \mathbf{1}-ST_3^2S^{-1}+ST_3^2S^{-1}\cos\omega-\mathrm{i}\,ST_3S^{-1}\sin\omega \\
&= \mathbf{1}-(\hat{n}\cdot\boldsymbol{T})^2+(\hat{n}\cdot\boldsymbol{T})^2\cos\omega-\mathrm{i}(\hat{n}\cdot\boldsymbol{T})\sin\omega .
\end{aligned}
$$

二、三维转动群的不等价不可约表示

★　三维空间的任意转动都可表为绕坐标轴向的三次转动的乘积

$$
R(\alpha,\beta,\gamma)=R(\boldsymbol{e}_3,\alpha)R(\boldsymbol{e}_2,\beta)R(\boldsymbol{e}_3,\gamma)
$$

$$
=\begin{pmatrix}
c_\alpha c_\beta c_\gamma-s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha c_\beta s_\gamma-s_\alpha c_\gamma & c_\alpha s_\beta \\
s_\alpha c_\beta c_\gamma+c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha c_\beta s_\gamma+c_\alpha c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\
-s_\beta c_\gamma & s_\beta s_\gamma & c_\beta
\end{pmatrix}, \tag{4.9}
$$

其中 $c_\alpha=\cos\alpha$，$s_\alpha=\sin\alpha$ 等. 这样的三个角度 α，β 和 γ 称为欧拉角. 通常有两种

方法计算欧拉角. 一是根据 R 矩阵形式来计算. 把 R 矩阵的第三列看成一个单位矢量，它的极角是 β，方位角是 α. 把 R 矩阵的第三行看成一个单位矢量，它的极角是 β，方位角是$(\pi-\gamma)$. 二是根据 R 转动前后坐标系的相对位置来计算欧拉角. 设 R 把 K 坐标系转到 K' 坐标系，则在 K 坐标系中，K' 系 z' 轴的极角是 β，方位角是 α，在 K' 坐标系中，K 系 z 轴的极角是 β，方位角是$(\pi-\gamma)$.

在 SO(3)群中欧拉角的变化范围是

$$-\pi\leqslant\alpha\leqslant\pi,\qquad 0\leqslant\beta\leqslant\pi,\qquad -\pi\leqslant\gamma\leqslant\pi.$$

在 $\beta=0$ 或 π 时，α 和 γ 中只有一个参数是独立的. 对 SU(2)群，γ 角的变化范围扩大一倍.

★ SU(2)群的不等价不可约表示用半整数 j 标记

$$\begin{aligned}D^j_{\nu\mu}(\alpha,\beta,\gamma)&=\{D^j(\boldsymbol{e}_3,\alpha)D^j(\boldsymbol{e}_2,\beta)D^j(\boldsymbol{e}_3,\gamma)\}_{\nu\mu}\\&=e^{-i\nu\alpha}d^j_{\nu\mu}(\beta)e^{-i\mu\gamma},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d^j_{\nu\mu}(\omega)&\equiv D^j_{\nu\mu}(\boldsymbol{e}_2,\omega)\\&=\sum_n\frac{(-1)^n\{(j+\nu)!(j-\nu)!(j+\mu)!(j-\mu)!\}^{1/2}}{(j+\nu-n)!(j-\mu-n)!n!(n-\nu+\mu)!}\\&\quad\cdot\{\cos(\omega/2)\}^{2j+\nu-\mu-2n}\{\sin(\omega/2)\}^{2n-\nu+\mu},\\&\quad n\text{ 取 }\max\begin{Bmatrix}0\\\nu-\mu\end{Bmatrix},\cdots,\min\begin{Bmatrix}j+\nu\\j-\mu\end{Bmatrix}.\end{aligned}\tag{4.10}$$

$d^j(\omega)$矩阵满足如下对称性质：

$$\begin{aligned}d^j_{\nu\mu}(\omega)&=(-1)^{\mu-\nu}d^j_{\nu\mu}(-\omega)=(-1)^{\nu-\mu}d^j_{\mu\nu}(\omega)=(-1)^{\mu-\nu}d^j_{-\nu\,-\mu}(\omega)\\&=d^j_{-\mu\,-\nu}(\omega)=d^j_{\mu\nu}(-\omega),\\d^j_{\nu\mu}(\pi)&=(-1)^{j-\mu}\delta_{\nu(-\mu)},\qquad d^j_{\nu\mu}(2\pi)=(-1)^{2j}\delta_{\nu\mu},\\d^j_{\nu\mu}(\pi-\omega)&=(-1)^{j-\mu}d^j_{-\nu\mu}(\omega)=(-1)^{j+\nu}d^j_{\nu-\mu}(\omega).\end{aligned}\tag{4.11}$$

元素 $u(\hat{n},\omega)$在表示 D^j 中的特征标是

$$\chi^j(\omega)=\sum_{\mu=-j}^{j}e^{-i\mu\omega}=\sum_{\mu=-j}^{j}e^{i\mu\omega}=\frac{\sin\{(j+1/2)\omega\}}{\sin(\omega/2)}.\tag{4.12}$$

★ D^j 是$(2j+1)$维幺正表示，j 取非负半整数，$D^0(u)=1$ 是恒等表示，$D^{1/2}(u)=u$ 是 SU(2)群的自身表示. $D^1(u)$表示等价于 SO(3)群的自身表示：

$$M^{-1}R(\alpha,\beta,\gamma)M = D^1(\alpha,\beta,\gamma),\quad M=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i}\\ 0 & \sqrt{2} & 0\end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

j 为整数时，D^j 是 SO(3)群的单值表示，是 SU(2)群的非真实表示，它们可通过相似变换化成实表示. j 为半奇数时，D^j 是 SO(3)群的双值表示，是 SU(2)群的真实表示，它们是自共轭表示，但不能通过相似变换化成实表示. D^j 表示的生成元是

$$\begin{aligned}
(I_1^j)_{\nu\mu} &= \frac{1}{2}\left(\delta_{\nu(\mu+1)}\Gamma_\nu^j + \delta_{\nu(\mu-1)}\Gamma_{-\nu}^j\right),\\
(I_2^j)_{\nu\mu} &= \frac{-\mathrm{i}}{2}\left(\delta_{\nu(\mu+1)}\Gamma_\nu^j - \delta_{\nu(\mu-1)}\Gamma_{-\nu}^j\right),\\
(I_3^j)_{\nu\mu} &= \mu\,\delta_{\nu\mu},\\
\Gamma_\nu^j &= \{(j+\nu)(j-\nu+1)\}^{1/2}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

常取 $I_\pm^j = I_1^j \pm \mathrm{i} I_2^j$，有

$$(I_+^j)_{\nu\mu} = (I_-^j)_{\mu\nu} = \delta_{\nu(\mu+1)}\Gamma_\nu^j = \delta_{\nu(\mu+1)}\Gamma_{-\mu}^j. \tag{4.15}$$

下面列出几个特殊的 d^j 矩阵，式中 $c=\cos(\beta/2)$ 和 $s=\sin(\beta/2)$.

$$d^0(\beta)=1,\quad d^{1/2}(\beta)=\begin{pmatrix}c & -s\\ s & c\end{pmatrix},$$

$$d^1(\beta)=\begin{pmatrix}c^2 & -\sqrt{2}cs & s^2\\ \sqrt{2}cs & c^2-s^2 & -\sqrt{2}cs\\ s^2 & \sqrt{2}cs & c^2\end{pmatrix},$$

$$d^{3/2}(\beta)=\begin{pmatrix}c^3 & -\sqrt{3}c^2s & \sqrt{3}cs^2 & -s^3\\ \sqrt{3}c^2s & c^3-2cs^2 & -2c^2s+s^3 & \sqrt{3}cs^2\\ \sqrt{3}cs^2 & 2c^2s-s^3 & c^3-2cs^2 & -\sqrt{3}c^2s\\ s^3 & \sqrt{3}cs^2 & \sqrt{3}c^2s & c^3\end{pmatrix},$$

$$d^j_{\mu j}(\beta) = d^j_{-j\,-\mu}(\beta) = (-1)^{j-\mu}d^j_{j\mu}(\beta) = (-1)^{j-\mu}d^j_{-\mu\,-j}(\beta)$$

$$= \left[\frac{(2j)!}{(j+\mu)!(j-\mu)!}\right]^{1/2} c^{j+\mu} s^{j-\mu}.$$

$$d^l_{00}(\beta) = \sum_{n=0}^{l}(-1)^n\left[\frac{l!\,c^{l-n}s^n}{n!(l-n)!}\right]^2. \tag{4.16}$$

3. 分别计算下列 R 和 S 变换的欧拉角，并写出它们在 SO(3)群表示 D^l 中的表示矩阵元素 $D^l_{\nu\mu}(R)$ 和 $D^l_{\nu\mu}(S)$

$$1)\ R(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -\sqrt{3}-2 & \sqrt{3}-2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3}-2 & -\sqrt{3}-2 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 2\sqrt{3}\end{pmatrix},$$

$$2)\ S(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} \sqrt{6}+2\sqrt{3} & 3\sqrt{2}-2 & 2\sqrt{6} \\ \sqrt{2}-6 & \sqrt{6}+2\sqrt{3} & 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -2\sqrt{6} & 4\sqrt{2}\end{pmatrix}.$$

解　$R(\alpha,\beta,\gamma)$矩阵的第三列是极角为 β，方位角为 α 的单位矢量，第三行是极角为 β、方位角为 $\pi-\gamma$ 的单位矢量.

(1) 由 R 矩阵的第三列，得

$$\cos\beta = \sqrt{3}/2,\quad \sin\beta = 1/2,\qquad \beta = \pi/6,$$

$$\cos\alpha = -(\sqrt{2}/4)\cdot 2 = -\sqrt{1/2},$$

$$\sin\alpha = (\sqrt{2}/4)\cdot 2 = \sqrt{1/2},\qquad \alpha = 3\pi/4.$$

由 R 矩阵的第三行，得

$$\cos(\pi-\gamma) = -(\sqrt{2}/4)\cdot 2 = -\sqrt{1/2},$$

$$\sin(\pi-\gamma) = (\sqrt{2}/4)\cdot 2 = \sqrt{1/2},$$

$$\pi-\gamma = 3\pi/4,\qquad \gamma = \pi/4,$$

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = R(3\pi/4,\ \pi/6,\ \pi/4).$$

因此，

$$D^l_{\nu\mu}(R) = e^{-i3\nu\pi/4} d^l_{\nu\mu}(\pi/6) e^{-i\mu\pi/4}.$$

(2) 由 S 矩阵的第三列，得

$$\cos\beta = \sqrt{2}/2, \quad \sin\beta = \sqrt{2}/2, \qquad \beta = \pi/4,$$

$$\cos\alpha = (\sqrt{6}/4) \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3}/2,$$

$$\sin\alpha = (\sqrt{2}/4) \cdot \sqrt{2} = 1/2, \qquad \alpha = \pi/6.$$

由 S 矩阵的第三行，得

$$\cos(\pi - \gamma) = - (\sqrt{2}/4) \cdot \sqrt{2} = - 1/2,$$

$$\sin(\pi - \gamma) = - (\sqrt{6}/4) \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{3}/2,$$

$$\pi - \gamma = 4\pi/3, \qquad \gamma = - \pi/3,$$

$$S(\alpha,\beta,\gamma) = S(\pi/6,\ \pi/4,\ - \pi/3).$$

因此，

$$D^l_{\nu\mu}(S) = e^{-i\nu\pi/6} d^l_{\nu\mu}(\pi/4) e^{i\mu\pi/3}.$$

4. 分别计算下列转动变换 R 和 S 的欧拉角，并讯出它们在表示 $D^l(\mathrm{SO}(3))$ 中的表示矩阵元素 $D^l_{\nu\mu}(R)$ 和 $D^l_{\nu\mu}(S)$：

1) R 是绕 $\hat{n} = \boldsymbol{e}_1\sin\theta + \boldsymbol{e}_3\cos\theta$ 方向转动 π 角的变换，其中 θ 角是锐角；

2) S 是绕 $\hat{n} = (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3)/\sqrt{3}$ 方向转动 $2\pi/3$ 角的变换.

解　设 R 或 S 变换把坐标系 K 转到坐标系 K'，则在 K 坐标系中，K 系 z' 轴的极角是 β，方位角是 α，在 K' 坐标系中，K 系 z 轴的极角是 β，方位角是 $(\pi - \gamma)$.

1) K' 系的 x' 轴和 z' 轴都在 K 系的 xz 平面内，两个 z 轴间的夹角为 2θ，因此 $\beta = 2\theta$ 和 $\alpha = \pi - \gamma = 0$，

$$D^l_{\nu\mu}(R) = D^l_{\nu\mu}(0, 2\theta, \pi) = d^l_{\nu\mu}(2\theta) e^{-i\mu\pi}.$$

2) K' 系的 x'、y' 和 z' 轴依次与 K 系的 y，z 和 x 轴重合，因此 $\beta = \pi/2$，$\alpha = 0$ 和 $\pi - \gamma = \pi/2$，

$$D^l_{\nu\mu}(S) = D^l_{\nu\mu}(0, \pi/2, \pi/2) = d^l_{\nu\mu}(\pi/2) e^{-i\mu\pi/2}.$$

5. 正二十面体的示意图见图 4.1. 把正二十面体中心 O 和原点重合，一对顶点 A_0 和 B_0 置于 z 轴上，A_0 在正 z 向，与 A_0 相邻的五个顶点，按正 z 轴的右手螺旋方向，顺序记作 A_j，$1 \leqslant j \leqslant 5$，$A_1$ 在 xz 平面内的偏正 x 方向. 在 xy 平面下方的六个顶点分别记作 B_j，$0 \leqslant j \leqslant 5$，关于原点对称的两顶点有相同的下标.

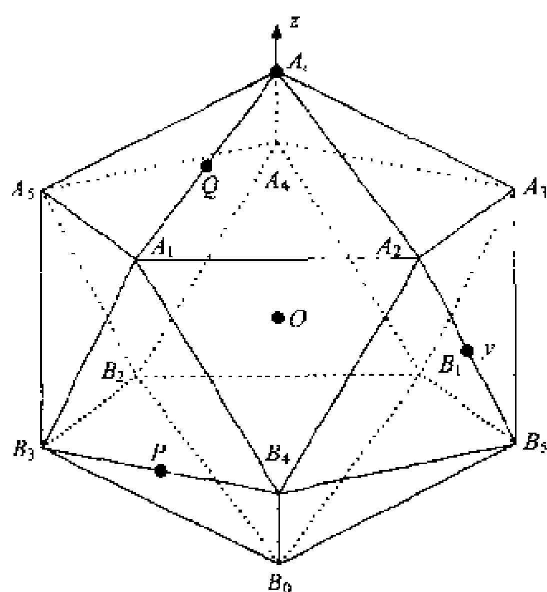


图 4.1　正二十面体示意图

由 B_j 指向 A_j 的六个轴都是正二十面体的五次转动轴，绕它们转动 $2\pi/5$ 角的变换分别记作 T_j，$0\leqslant j\leqslant 5$. 除一个五次轴沿正 z 轴方向外，其余 5 个五次轴正向的极角都是 θ_1，方位角分别为 $2(j-1)\pi/5$. 两个相对侧面中心的联线都是三次轴，都以偏正 z 方向为正向，绕它们转动 $2\pi/3$ 角的变换分别记作 R_j，$1\leqslant j\leqslant 10$. 前 5 个三次轴($1\leqslant j\leqslant 5$)正向的极角都是 θ_2，方位角分别为 $(2j-1)\pi/5$，后 5 个三次轴($6\leqslant j\leqslant 10$)正向的极角都是 θ_3，方位角分别为 $(2j-11)\pi/5$. 两个相对棱中点的联线都是二次轴，绕它们转动 π 角的变换分别记作 S_j，$1\leqslant j\leqslant 15$，前 5 个二次轴($1\leqslant j\leqslant 5$)的极角都是 θ_4，方位角分别为 $2(j-1)\pi/5$，次 5 个二次轴($6\leqslant j\leqslant 10$)的极角都是 θ_5，方位角分别为 $(2j-11)\pi/5$，最后 5 个二次轴($11\leqslant j\leqslant 15$)在 xy 平面，极角为 π，方位角分别为 $(4j-43)\pi/10$，上述极角分别为(见第 12 题)

$$\tan\theta_1=2,\quad \tan\theta_2=3-\sqrt{5},\quad \tan\theta_3=3+\sqrt{5},$$

$$\tan\theta_4=(\sqrt{5}-1)/2,\quad \tan\theta_5=(\sqrt{5}+1)/2.$$

正二十面体对称群 I 的元素都可表为四个元素的乘积形式

$$T_0^a R_6^b S_1^c S_{12}^d,$$

其中 a，b，c 和 d 都是整数，试计算这四个转动变换的欧拉角.

解　T_0 的欧拉角显然为 $\alpha=\beta=0$ 和 $\gamma=2\pi/5$. 根据上题的计算知，S_1 的欧拉角为 $\beta=2\theta_4$，$\alpha=0$ 和 $\gamma=\pi$. S_{12}是绕 y 轴转动 π 角的变换，因此 $\beta=\pi$ 和 $\alpha=\gamma=0$. 现在来计算 R_6 的欧拉角.

由图中可知，经 R_6 转动，z 轴转到 OB_3 方向，y 轴转到由 O 点指向棱 A_0A_1 中点(设为 Q 点)方向. 因为 OB_3 方向的极角为钝角 $2\theta_5$，方位角为 $-\pi/5$，两平面 OB_3A_0 和 OB_3Q 的夹角是 $\pi/10$，所以 R_6 的欧拉角为 $\alpha=-\pi/5$，$\beta=2\theta_5$ 和 $\pi-\gamma=\pi/2+\pi/10$，$\gamma=2\pi/5$.

6.　根据上题关于正二十体对称群 I 元素符号的说明，试分别计算群 I 各元素

R_1，R_2，T_2，S_2，S_6 和 S_{11} 的欧拉角.

解　本题计算的关键是确定经过各转动后坐标轴向的位置.

经过 R_1 转动，z 轴转到 OA_1 方向，y 轴转到由 O 点指向棱 A_0A_4 中点(设为 D_1 点)方向，平面 OA_1A_0 和平面 OA_1D_1 的夹角为 $\pi/10$. 因此 $\alpha=0$，$\beta=\theta_1$，和 $\pi-\gamma=\pi/2-\pi/10$，$\gamma=3\pi/5$.

经过 R_2 转动，z 轴转到 OA_2 方向，y 轴转到由 O 点指向棱 A_3A_4 中点(设为 D_2 点)方向，平面 OA_2A_0 和平面 OA_2D_2 的夹角为 $3\pi/10$. 因此 $\alpha=2\pi/5$，$\beta=\theta_1$，和 $\pi-\gamma=\pi/2+3\pi/10$，$\gamma=\pi/5$.

经过 T_2 转动，z 轴转到 OA_1 方向，y 轴转到由 O 点指向棱 A_2A_3 中点(设为 D_3 点)方向，平面 OA_1A_0 和平面 OA_1D_3 的夹角为 $3\pi/10$. 因此 $\alpha=0$，$\beta=\theta_1$，和 $\pi-\gamma=\pi/2+3\pi/10$，$\gamma=\pi/5$.

经过 S_2 转动，z 轴转到 OA_2 方向，y 轴转到由 O 点指向棱 A_0A_5 中点(设为 D_4 点)方向，平面 OA_2A_0 和平面 OA_2D_4 的夹角为 $\pi/10$. 因此 $\alpha=2\pi/5$，$\beta=\theta_1$，和 $\pi-\gamma=\pi/2-\pi/10$，$\gamma=3\pi/5$.

经过 S_6 转动，z 轴转到 OB_4 方向，y 轴转到由 O 点指向棱 A_1A_5 中点(设为 D_5 点)方向，平面 OB_4A_0 和平面 OB_4D_5 的夹角为 $3\pi/10$. 因此 $\alpha=\pi/5$，$\beta=2\theta_5$，和 $\pi-\gamma=\pi/2-3\pi/10$，$\gamma=4\pi/5$.

经过 S_{11} 转动，z 轴转到 OB_0 方向，即原来 z 轴的反方向，y 轴转到由 O 点指向棱 B_3A_5 中点(设为 D_6 点)方向. 因此 $\beta=\pi$，而 α 角和 γ 角不完全确定，只有 $\alpha-\gamma$ 角是确定的. 可以设想 B_0 点在 OA_0A_1 平面内，则 $\alpha=0$ 和 $\pi-\gamma=\pi/2-3\pi/10$，$\gamma=4\pi/5$，即 $\alpha-\gamma=-4\pi/5$.

7.　利用 SO(3)群和 SU(2)群的同态关系，验算 O 群元素的乘积公式：

$$T_zR_1=S_3,\quad T_zT_x=R_1 \text{ 和 } R_1R_2=R_3^2.$$

解　O 群元素 T_z，T_x，R_1，R_2，R_3^2 和 S_3 在 SU(2)群中分别对应

$$T_z \leftarrow \pm\, u(\boldsymbol{e}_3,\pi/2)=\pm\sqrt{1/2}\{\mathbf{1}-\mathrm{i}\sigma_3\},$$

$$T_x \leftarrow \pm\, u(\boldsymbol{e}_1,\pi/2)=\pm\sqrt{1/2}\{\mathbf{1}-\mathrm{i}\sigma_1\},$$

$$R_1 \leftarrow \pm\, u[(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)/\sqrt{3},2\pi/3]=\pm(1/2)\{\mathbf{1}-\mathrm{i}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\},$$

$$R_2 \leftarrow \pm\, u[(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3)/\sqrt{3},2\pi/3]=\pm(1/2)\{\mathbf{1}-\mathrm{i}(\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3)\},$$

$$R_3^2 \leftarrow \pm\, u[(-\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)/\sqrt{3},4\pi/3]=\mp(1/2)\{\mathbf{1}-\mathrm{i}(\sigma_1+\sigma_2-\sigma_3)\},$$

$$S_3 \leftarrow \pm u[(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)/\sqrt{2},\pi] = \mp \mathrm{i}\sqrt{1/2}(\sigma_2+\sigma_3).$$

现在把 O 群元素乘积关系两边的元素分别取对应的 SU(2)群元素，看它们是否相等，从而来检验这些乘积关系是否成立.

$$T_z R_1 \leftarrow \sqrt{1/2}\{\mathbf{1}-\mathrm{i}\sigma_3\}(1/2)\{\mathbf{1}-\mathrm{i}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\}$$

$$= \sqrt{1/2}\{-\mathrm{i}\sigma_2-\mathrm{i}\sigma_3\} \rightarrow S_3,$$

$$T_z T_x \leftarrow \sqrt{1/2}\{\mathbf{1}-\mathrm{i}\sigma_3\}\sqrt{1/2}\{\mathbf{1}-\mathrm{i}\sigma_1\}$$

$$= (1/2)\{\mathbf{1}-\mathrm{i}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\} \rightarrow R_1,$$

$$R_1 R_2 \leftarrow (1/2)\{\mathbf{1}-\mathrm{i}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\}(1/2)\{\mathbf{1}-\mathrm{i}(\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3)\}$$

$$= (1/2)\{\mathbf{1}-\mathrm{i}(\sigma_1+\sigma_2-\sigma_3)\} \rightarrow R_3^2.$$

8. 试用 SU(2)群的表示矩阵 $D^j(\boldsymbol{e}_3,\omega)$和 $d^j(\omega)$表出绕 $\hat{n}$方向转动 ω 元素的表示矩阵 $D^j(\hat{n},\omega)$.

解 设 $\hat{n}$方向的极角为 θ，方位角为 φ，S 的欧拉角为 $\alpha=\varphi$，$\beta=\theta$ 和 $\gamma=0$，则 $SR(\boldsymbol{e}_3,\omega)S^{-1}=R(\hat{n},\omega)$，

$$D^j(\hat{n},\omega) = D^j(S)D^j(\boldsymbol{e}_3,\omega)D^j(S)^{-1}$$

$$= D^j(\boldsymbol{e}_3,\varphi)d^j(\theta)D^j(\boldsymbol{e}_3,\omega)d^j(\theta)^{-1}D^j(\boldsymbol{e}_3,-\varphi).$$

其中 $D^j(\boldsymbol{e}_3,\omega)$是对角矩阵.

9. 根据 $d^j(\omega)$矩阵的级数展开公式计算 $j=1/2$，1，3/2，2，5/2 和 3 时的 $d^j(\omega)$矩阵元素，并把计算结果与(4.16)式比较.

解 由于 $d^j(\omega)$矩阵的对称性质，我们只需要计算满足 $0\leqslant\nu\leqslant\mu$ 条件的 $d^j_{\nu\mu}(\omega)$元素，因为其他元素可用如下公式计算：

$$d^j_{(-\nu)(-\mu)}(\omega) = d^j_{\mu\nu}(\omega) = (-1)^{\nu-\mu}d^j_{\nu\mu}(\omega),$$

$$d^j_{(-\nu)\mu}(\omega) = (-1)^{\mu+\nu}d^j_{\nu(-\mu)}(\omega) = (-1)^{j-\mu}d^j_{\nu\mu}(\pi-\omega).$$

为了书写方便，令 $c=\cos(\omega/2)$，$s=\sin(\omega/2)$. 当把变量 ω 改为$(\pi-\omega)$时只要把 c 和 s 互换.

当 $\mu=0$，j，$j-1$，$j-2$ 时分别用如下公式计算(来自(4.16)式)：

$$d^l_{00}(\beta) = \sum_{n=0}^{l}(-1)^n\left\{\frac{l!\,c^{l-n}s^n}{n!(l-n)!}\right\}^2,$$

$$d^j_{\nu j}(\omega)=\left\{\frac{(2j)!}{(j+\nu)!(j-\nu)!}\right\}^{1/2} c^{j+\nu} s^{j-\nu},$$

$$d^j_{\nu(j-1)}(\omega)=\left\{\frac{(2j-1)!(j-\nu)}{(j+\nu)!(j-\nu-1)!}\right\}^{1/2} c^{j+\nu+1} s^{j-\nu-1} - \left\{\frac{(2j-1)!(j+\nu)}{(j+\nu-1)!(j-\nu)!}\right\}^{1/2} c^{j+\nu-1} s^{j-\nu+1},$$

$$d^j_{\nu(j-2)}(\omega)=\left\{\frac{(2j-2)!(j-\nu)(j-\nu-1)}{2(j+\nu)!(j-\nu-2)!}\right\}^{1/2} c^{j+\nu+2} s^{j-\nu-2} - \left\{\frac{(2j-2)!2(j+\nu)(j-\nu)}{(j+\nu-1)!(j-\nu-1)!}\right\}^{1/2} c^{j+\nu} s^{j-\nu} + \left\{\frac{(2j-2)!(j+\nu)(j+\nu-1)}{2(j+\nu-2)!(j-\nu)!}\right\}^{1/2} c^{j+\nu-2} s^{j-\nu+2}.$$

$d^{1/2}_{(1/2)(1/2)}(\omega)=c,$　　$d^1_{11}(\omega)=c^2,$

$d^1_{01}(\omega)=\sqrt{2}cs,$　　$d^1_{00}(\omega)=c^2-s^2,$

$d^{3/2}_{(3/2)(3/2)}(\omega)=c^3,$　　$d^{3/2}_{(1/2)(3/2)}(\omega)=\sqrt{3}c^2s,$

$d^{3/2}_{(1/2)(1/2)}(\omega)=c^3-2cs^2,$　　$d^2_{22}(\omega)=c^4,$

$d^2_{12}(\omega)=2c^3s,$　　$d^2_{02}(\omega)=\sqrt{6}c^2s^2,$

$d^2_{11}(\omega)=c^4-3c^2s^2,$　　$d^2_{01}(\omega)=\sqrt{6}cs(c^2-s^2),$

$d^2_{00}(\omega)=c^4-4c^2s^2+s^4,$　　$d^{5/2}_{(5/2)(5/2)}(\omega)=c^5,$

$d^{5/2}_{(3/2)(5/2)}(\omega)=\sqrt{5}c^4s,$　　$d^{5/2}_{(1/2)(5/2)}(\omega)=\sqrt{10}c^3s^2,$

$d^{5/2}_{(3/2)(3/2)}(\omega)=c^5-4c^3s^2,$

$d^{5/2}_{(1/2)(3/2)}(\omega)=\sqrt{2}(2c^4s-3c^2s^3),$

$d^{5/2}_{(1/2)(1/2)}(\omega)=c^5-6c^3s^2+3cs^4.$　　$d^3_{33}(\omega)=c^6,$

$d^3_{23}(\omega)=\sqrt{6}c^5s,$　　$d^3_{13}(\omega)=\sqrt{15}c^4s^2,$

$d^3_{03}(\omega)=2\sqrt{5}c^3s^3,$　　$d^3_{22}(\omega)=c^6-5c^4s^2,$

$d^3_{12}(\omega)=\sqrt{10}(c^5s-2c^3s^3),$

$d^3_{02}(\omega)=\sqrt{30}(c^4s^2-c^2s^4),$

$d^3_{11}(\omega)=c^6-8c^4s^2+6c^2s^4.$

$d^3_{01}(\omega)=2\sqrt{3}(c^5s-3c^3s^3+cs^5),$

$d^3_{00}(\omega)=c^6-9c^4s^2+9c^2s^4-s^6.$

10. 把 SO(3)群的不可约表示 D^3 关于子群 D_3 的分导表示，按子群不可约表示约化，找出约化的相似变换矩阵.

解 对 SO(3)群 D^3 表示，利用公式 $\chi^3(\omega)=\sin(7\omega/2)/\sin(\omega/2)$，容易算得恒元 E，转动 $2\pi/3$ 角元素和转动 π 角元素的特征标分别是 $\chi^3(E)=7$，$\chi^3(2\pi/3)=1$ 和 $\chi^3(\pi)=-1$. D^3 表示关于子群 D_3 的分导表示是可约表示，可按 D_3 群不可约表示分解. 在分解式中 D_3 群各不等价不可约表示 A_1，A_2 和 E 的重数 a_j，可用特征标公式计算:

$$a_{A_1} = (1/6)\{1\times 7\times 1+2\times 1\times 1+3\times(-1)\times 1\} = 1,$$

$$a_{A_2} = (1/6)\{1\times 7\times 1+2\times 1\times 1+3\times(-1)\times(-1)\} = 2,$$

$$a_E = (1/6)\{1\times 7\times 2+2\times 1\times(-1)+3\times(-1)\times 0\} = 2.$$

即

$$D^3(D_3)\simeq D^{A_1}(D_3)\oplus 2D^{A_2}(D_3)\oplus 2D^E(D_3).$$

等式两边表示的维数都是 7.

为了找出约化表示的相似变换矩阵，先要写出 D_3 群生成元 D 和 A 在变换前后的矩阵形式. 为此，要确定此两元素的欧拉角

$$D^3(D) = D^3(\boldsymbol{e}_3,2\pi/3) = D^3(0,0,2\pi/3) = \mathrm{diag}\{1,\omega^2,\omega,1,\omega^2,\omega,1\},$$

$$D^3_{\nu\mu}(A) = D^3_{\nu\mu}(-\pi/2,\pi,\pi/2) = D^3_{\nu\mu}(0,\pi,\pi) = -\delta_{\nu(-\mu)},$$

$$\omega = \exp\{-\mathrm{i}2\pi/3\} = (-1-\mathrm{i}\sqrt{3})/2,$$

$$\omega^2 = \exp\{-\mathrm{i}4\pi/3\} = (-1+\mathrm{i}\sqrt{3})/2.$$

$$X^{-1}D^3(D)X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix},$$

$$X^{-1}D^3(A)X = \mathrm{diag}\{1,-1,-1,1,-1,1,-1\}.$$

X 矩阵的行指标应该用 D^3 的行(列)指标标记，即取 $3,2,\cdots,(-3)$，列指标应该用约化后的表示及其行来标记，即取 A_1，$A_2(1)$，$A_2(2)$，$[E(1),1]$，$[E(1),2]$，$[E(2),1]$ 和 $[E(2),2]$，其中括号中的数字用来区分重表示. 这里为了方便，X 的行列指标都用序数字 1 至 7 标记，而且 7 个列矩阵分别记作 $X_a,1\leqslant a\leqslant 7$. 注意 $D^3(A)$ 可以看作一个方块矩阵，只是子矩阵所在行(列)不相连，其中第四行(列)是一维子矩阵，即数 -1，第一，七行(列)，第二，六行(列)和第三，五行(列)都是二维子矩阵 $-\sigma_1$，$-\sigma_1$ 矩阵的本征值和本征矢量是

$$1:\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\qquad\qquad -1:\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}.$$

从相似变换关系中看到，X 矩阵的前三列都是 $D^3(D)$ 和 $D^3(A)$ 的共同本征矢量. 作为 $D^3(D)$ 的本征值为 1 的本征矢量，它只有第 1、4 和 7 分量能不为零. 再作为 $D^3(A)$ 的本征矢量，转置后得

$$X_1^{\mathrm{T}}=(\sqrt{1/2},0,0,0,0,0,-\sqrt{1/2}),$$

$$X_2^{\mathrm{T}}=(\sqrt{1/2},0,0,0,0,0,\sqrt{1/2}),$$

$$X_3^{\mathrm{T}}=(0,0,0,1,0,0,0).$$

X_4 和 X_6 都是 $D^3(A)$ 的本征值为 1 的本征矢量，它们要与 X_1 正交，转置后可取

$$X_4^{\mathrm{T}}=(0,\sqrt{1/2},0,0,0,-\sqrt{1/2},0),$$

$$X_6^{\mathrm{T}}=(0,0,\sqrt{1/2},0,-\sqrt{1/2},0,0).$$

再代入关于 $D^3(D)$ 的相似变换公式，对第四列，只看第二和第六行，有

$$D^3(D)X_4=D^3(D)\begin{pmatrix}\sqrt{1/2}\\-\sqrt{1/2}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\omega^2\\-\omega\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{2}X_4+\frac{\sqrt{3}}{2}X_5=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{1/2}\\-\sqrt{1/2}\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}\mathrm{i}\sqrt{1/2}\\\mathrm{i}\sqrt{1/2}\end{pmatrix}.$$

对第六列，只看第三和第五行，有

$$D^3(D)X_6=D^3(D)\begin{pmatrix}\sqrt{1/2}\\-\sqrt{1/2}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\omega\\-\omega^2\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}X_6 + \frac{\sqrt{3}}{2}X_7 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{1/2} \\ \\ -\sqrt{1/2} \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sqrt{1/2} \\ \\ -\mathrm{i}\sqrt{1/2} \end{pmatrix}.$$

最后得相似变换矩阵 X 为

$$X = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

X_5 和 X_7 确实都是 $D^3(A)$的本征值为 -1 的本征矢量,

11. 分别对 SO(3)群的不可约表示 D^{20}和 D^{18}关于正二十面体固有点群 I 的分导表示,计算按子群 I 不可约表示约化的克莱布施-戈登级数.

解 对 SO(3)群 D^{20}和 D^{18}表示,利用特征标公式

$$\chi^j(\omega) = \sin[(j+1/2)\omega]/\sin(\omega/2),$$

容易算得恒元 E,转动 $2\pi/5$ 角,$4\pi/5$ 角,$2\pi/3$ 角和 π 角元素的特征标分别是

$$\chi^{20}(E) = 41, \qquad \chi^{20}(2\pi/5) = \frac{\sin(41\pi/5)}{\sin(\pi/5)} = 1,$$

$$\chi^{20}(4\pi/5) = \frac{\sin(82\pi/5)}{\sin(2\pi/5)} = 1, \qquad \chi^{20}(2\pi/3) = \frac{\sin(41\pi/3)}{\sin(\pi/3)} = -1,$$

$$\chi^{20}(\pi) = \frac{\sin(41\pi/2)}{\sin(\pi/2)} = 1, \qquad \chi^{18}(E) = 37,$$

$$\chi^{18}(2\pi/5) = \frac{\sin(37\pi/5)}{\sin(\pi/5)} = \frac{-\sin(2\pi/5)}{\sin(\pi/5)} = -2\cos(\pi/5) = -p^{-1},$$

$$\chi^{18}(4\pi/5) = \frac{\sin(74\pi/5)}{\sin(2\pi/5)} = \frac{\sin(4\pi/5)}{\sin(2\pi/5)} = 2\cos(2\pi/5) = p,$$

$$\chi^{18}(2\pi/3) = \frac{\sin(37\pi/3)}{\sin(\pi/3)} = \frac{\sin(\pi/3)}{\sin(\pi/3)} = 1,$$

$$\chi^{18}(\pi) = \frac{\sin(37\pi/2)}{\sin(\pi/2)} = \frac{\sin(\pi/2)}{\sin(\pi/2)} = 1,$$

D^l 表示关于子群 I 的分导表示，可按 I 群不可约表示分解．在分解式中 I 群各不可约表示的重数 a_Γ^l，可用特征标公式和 I 群的特征标表(见第三章第 20 题)计算．对表示 D^{20}，有

$$a_A^{20} = (1/60)\{1\times 41\times 1 + 12\times 1\times 1 + 12\times 1\times 1$$
$$+ 20\times(-1)\times 1 + 15\times 1\times 1\} = 1,$$
$$a_{T_1}^{20} = (1/60)\{1\times 41\times 3 + 12\times 1\times p^{-1} + 12\times 1\times(-p)$$
$$+ 20\times(-1)\times 0 + 15\times 1\times(-1)\} = 2,$$
$$a_{T_2}^{20} = (1/60)\{1\times 41\times 3 + 12\times 1\times(-p) + 12\times 1\times p^{-1}$$
$$+ 20\times(-1)\times 0 + 15\times 1\times(-1)\} = 2,$$
$$a_G^{20} = (1/60)\{1\times 41\times 4 + 12\times 1\times(-1) + 12\times 1\times(-1)$$
$$+ 20\times(-1)\times 1 + 15\times 1\times 0\} = 2,$$
$$a_H^{20} = (1/60)\{1\times 41\times 5 + 12\times 1\times 0 + 12\times 1\times 0$$
$$+ 20\times(-1)\times(-1) + 15\times 1\times 1\} = 4.$$

对表示 D^{20}，有

$$a_A^{18} = (1/60)\{1\times 37\times 1 + 12\times(-p)^{-1}\times 1 + 12\times p\times 1$$
$$+ 20\times 1\times 1 + 15\times 1\times 1\} = 1,$$
$$a_{T_1}^{18} = (1/60)\{1\times 37\times 3 + 12\times(-p)^{-1}\times p^{-1} + 12\times p\times(-p)$$
$$+ 20\times 1\times 0 + 15\times 1\times(-1)\} = 1,$$
$$a_{T_2}^{18} = (1/60)\{1\times 37\times 3 + 12\times(-p)^{-1}\times(-p) + 12\times p\times p^{-1}$$
$$+ 20\times 1\times 0 + 15\times 1\times(-1)\} = 2,$$
$$a_G^{18} = (1/60)\{1\times 37\times 4 + 12\times(-p)^{-1}\times(-1) + 12\times p\times(-1)$$
$$+ 20\times 1\times 1 + 15\times 1\times 0\} = 3,$$
$$a_H^{18} = (1/60)\{1\times 37\times 5 + 12\times(-p)^{-1}\times 0 + 12\times p\times 0$$
$$+ 20\times 1\times(-1) + 15\times 1\times 1\} = 3.$$

$$D^{20}(I) \simeq D^{A}(I) \oplus 2D^{T_1}(I) \oplus 2D^{T_2}(I) \oplus 2D^{G}(I) \oplus 4D^{H}(I),$$

$$D^{18}(I) \simeq D^{A}(I) \oplus D^{T_1}(I) \oplus 2D^{T_2}(I) \oplus 3D^{G}(I) \oplus 3D^{H}(I).$$

等式两边表示的维数相等.

12. 通过 SO(3)群的不可约表示 D^1、D^2 和 D^3 关于正二十面体固有点群 I 的分导表示，计算 I 群生成元在各不可约表示中的表示矩阵，并由此计算 I 群各次转动方向的极角.

解 第三章第 23 题已给出了 I 群生成元在各不可约表示中的表示矩阵，本章第 5 题给出了 I 群各二次轴、三次轴和五次轴方向的极角(即 θ_1 至 θ_5 各角)，本题要说明这些结果是如何计算出来的. 第三章第 15 和第 16 题用投影算符方法计算了 T 群和 O 群正则表示的约化，这方法同样可以用到 I 群来，只是计算中需用到 I 群元素的乘法表. 本书为了节省篇幅，不再列出此乘法表，因而下面凡涉及元素乘积的计算只能给出计算结果. 读者如果有兴趣，可以查阅“物理学中的群论”一书中的介绍(文献[1] § 3-8). 但也可以承认计算结果，着重理解这里介绍的方法.

因为 T_0 在表示中的表示矩阵是对角化的，而且 $T_0^5 = E$，所以它们的对角元只能是 $\eta = \exp\{-i2\pi/5\}$ 的幂次. 可用这幂次来标记表示的行和列，由 T_0 元素在表示中特征标可得

$$D^{A}(T_0) = 1, \quad D^{T_1}(T_0) = \mathrm{diag}\{\eta, 1, \eta^{-1}\},$$

$$D^{T_2}(T_0) = \mathrm{diag}\{\eta^2, 1, \eta^{-2}\}, \quad D^{G}(T_0) = \mathrm{diag}\{\eta^2, \eta, \eta^{-1}, \eta^{-2}\},$$

$$D^{H}(T_0) = \mathrm{diag}\{\eta^2, \eta, 1, \eta^{-1}, \eta^{-2}\}.$$

在 I 群的群空间找满足

$$T_0\Phi_{\mu\nu}^{(a)} = \eta^{\mu}\Phi_{\mu\nu}^{(a)}, \quad \Phi_{\mu\nu}^{(a)}T_0 = \eta^{\nu}\Phi_{\mu\nu}^{(a)},$$

的矢量 $\Phi_{\mu\nu}^{(a)}$. 这可用投影算符 P_μ 来计算:

$$P_\mu = \frac{1}{5}\sum_{\rho=-2}^{2}\eta^{-\mu\rho}T_0^{\rho}, \quad \Phi_{\mu\nu}^{(a)} = cP_\mu R^{(a)}P_\nu,$$

其中 c 是归一化系数. 先取 $R^{(1)} = E$，计算发现 $\mu \neq \nu$ 时 $\Phi_{\mu\nu}^{(1)} = 0$，算得 $\Phi_{\mu\mu}^{(1)}$. 然后再找一个在 $\Phi_{\mu\mu}^{(1)}$ 展开式中没有出现的元素，例如 S_{11} 作为 $R^{(2)}$，计算发现 $\mu + \nu \neq 0$ 时 $\Phi_{\mu\nu}^{(2)} = 0$，算得 $\Phi_{\mu\bar{\mu}}^{(2)}$，其中 $\bar{\mu} = -\mu$. 然后再找 $R^{(3)} = S_5$ 和 $R^{(4)} = S_{10}$ 计算得 $\Phi_{\mu\nu}^{(3)}$ 和 $\Phi_{\mu\nu}^{(4)}$. 计算结果可参看文献[1] § 3-8. 这里只强调一点，就是恒元 E 只在

$\mu=\nu$ 的矢量展开式中出现. 现在我们关心 $\mu=\nu=1$ 的情况，有矢量

$$\Phi_{11}^{(1)}=\{E+\eta^{-1}T_0+\eta^{-2}T_0^2+\eta^2T_0^3+\eta T_0^4\}/\sqrt{5}\ ,$$

$$\Phi_{11}^{(3)}=\sum_{n=1}^{5}\{S_n+\eta^{-1}R_n^2+\eta^{-2}T_n^4+\eta^2T_n+\eta R_n\}/5,$$

$$\Phi_{11}^{(4)}=\sum_{n=1}^{5}\{S_{n+5}+\eta^{-1}T_n^3+\eta^{-2}R_{n+5}^2+\eta^2R_{n+5}+\eta T_n^2\}/5.$$

采用第三章第 8 题的办法，根据 C_5 类的元素之和 W 的本征值来区分属各不可约表示的基：

$$W=\sum_{j=0}^{5}(T_j+T_j^4),\quad D^{\Gamma}(W)=\alpha^{\Gamma}\mathbf{1},$$

$$\alpha^{A}=12,\quad \alpha^{T_1}=4p^{-1},\quad \alpha^{T_2}=-4p,\quad \alpha^{G}=-3,\quad \alpha^{H}=0,$$

$$p=(\sqrt{5}-1)/2=\eta+\eta^{-1},\quad p^{-1}=(\sqrt{5}+1)/2=-\eta^2-\eta^{-2}.$$

为了计算 W 算符在基 $\Phi_{11}^{(a)}$ 中的矩阵形式，不必计算全部项，只要计算用 W 作用后得到的三个元素 E、S_1 和 S_6 的系数

$$W\Phi_{11}^{(1)}=\{pE-p^{-1}S_1+\cdots\}/\sqrt{5},$$

$$W\Phi_{11}^{(3)}=\{-5p^{-1}E+2p^{-1}S_1+p^{-2}S_6+\cdots\}/5,$$

$$W\Phi_{11}^{(4)}=\{p^{-2}S_1-p^2S_6+\cdots\}/5.$$

得 W 算符在这三个基中的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} p & -\sqrt{5}p^{-1} & 0 \\ -\sqrt{5}p^{-1} & 2p^{-1} & p^{-2} \\ 0 & p^{-2} & -p^2 \end{pmatrix}.$$

对应本征值 $4p^{-1}$, -3 和 0 的本征矢量分别为

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -p^{-1} \\ -p \end{pmatrix},\quad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ p^2 \\ p^{-2} \end{pmatrix}.$$

由此可得属表示 T_1 的基. 我们只关心含 E 和 S_1 的项:

$$\Psi_{11}^{T_1} = \{\Phi_{11}^{(1)} - p^{-1}\Phi_{11}^{(3)} - p\Phi_{11}^{(4)}\}/2 = E/(2\sqrt{5}) - p^{-1}S_1/10 + \cdots$$

$$S_1\Psi_{11}^{T_1} = -p^{-1}E/10 + \cdots = -p^{-1}\Psi_{11}^{T_1}/\sqrt{5} + \cdots,$$

得 $D_{11}^{T_1}(S_1) = -p^{-1}/\sqrt{5}$.

另一方面, 采用与上题相同的方法, 容易算得 SO(3)群表示 D^1、D^2和 D^3关于子群 I 的分导表示的分解式, 其中 D^1和 D^2的分解式只有一项, 而且由于所选定的 T_0 表示矩阵, 可以规定相似变换为 1, 由此得 $D^{T_1}(I)$和 $D^H(I)$.

$$D^1(R) = D^{T_1}(R), \qquad D^2(R) = D^H(R),$$

$$X^{-1}D^3(R)X = D^{T_2}(R) \oplus D^G(R), \quad R \in I.$$

根据第 9 题计算得的 $d^1(\beta)$具体形式, 得

$$D_{11}^1(S_1) = D_{11}^1(0, 2\theta_4, \pi) = -c^2 = D_{11}^{T_1}(S_1) = -p^{-1}/\sqrt{5},$$

用符号 $c = \cos\theta_4$, $s = \sin\theta_4$ 和 θ_4 是锐角, 得

$$c^2 = p^{-1}/\sqrt{5}, \quad s^2 = p/\sqrt{5}, \quad cs = c^2 - s^2 = 1/\sqrt{5},$$

$$\tan\theta_4 = s/c = p = (\sqrt{5} - 1)/2, \quad \theta_4 = 31.72°.$$

由此得

$$D^1(S_1) = \begin{pmatrix} -c^2 & -\sqrt{2}cs & -s^2 \\ -\sqrt{2}cs & c^2 - s^2 & \sqrt{2}cs \\ -s^2 & \sqrt{2}cs & -c^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -p^{-1} & -\sqrt{2} & -p \\ -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ -p & \sqrt{2} & -p^{-1} \end{pmatrix} = D^{T_1}(S_1),$$

$D^2(S_1)$

$$
=\begin{pmatrix}
c^4 & 2c^3 s & \sqrt{6}c^2 s^2 & 2cs^3 & s^4 \\
2c^3 s & -c^4+3c^2 s^2 & -\sqrt{6}cs(c^2-s^2) & -3c^2 s^2+s^4 & -2cs^3 \\
\sqrt{6}c^2 s^2 & -\sqrt{6}cs(c^2-s^2) & c^4-4c^2 s^2+s^4 & \sqrt{6}cs(c^2-s^2) & \sqrt{6}c^2 s^2 \\
2cs^3 & -3c^2 s^2+s^4 & \sqrt{6}cs(c^2-s^2) & -c^4+3c^2 s^2 & -2c^3 s \\
s^4 & -2cs^3 & \sqrt{6}c^2 s^2 & -2c^3 s & c^4
\end{pmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}
p^{-2} & 2p^{-1} & \sqrt{6} & 2p & p^2 \\
2p^{-1} & p^2 & -\sqrt{6} & -p^{-2} & -2p \\
\sqrt{6} & -\sqrt{6} & -1 & \sqrt{6} & \sqrt{6} \\
2p & -p^{-2} & \sqrt{6} & p^2 & -2p^{-1} \\
p^2 & -2p & \sqrt{6} & -2p^{-1} & p^{-2}
\end{pmatrix} = D^H(S_1).
$$

现在由条件 $X^{-1}D^3(T_0)X = D^{T_2}(T_0)\oplus D^G(T_0)$和 X 的幺正性得

$$
X=\begin{pmatrix}
0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & -d^* \\
a & 0 & 0 & -b^* & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & d & 0 & 0 & 0 & c^* \\
b & 0 & 0 & a^* & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} = (X^{-1})^\dagger,
$$

其中$|a|^2+|b|^2=|c|^2+|d|^2=1$.

根据第 9 题计算得的 $D^3_{\nu\mu}(S_1)=d^3_{\nu\mu}(2\theta_4)\exp\{-i\mu\pi\}$，计算矩阵等式 $X^{-1}D^3(S_1)X=D^{T_2}(S_1)\oplus D^G(S_1)$的第 5 行($\nu=-1$)第 1 列($\mu=3$)和第 3 列($\mu=1$)的矩阵元素：

$$
D^3_{12}(S_1)a + D^3_{1(-3)}(S_1)b = 0,\quad D^3_{13}(S_1)c + D^3_{1(-2)}(S_1)d = 0,
$$

$$D^3_{12}(S_1)=\sqrt{10}c^3s(c^2-2s^2)=\sqrt{2/25}\,p,$$

$$D^3_{1(-3)}(S_1)=-\sqrt{15}c^2s^4=-\sqrt{3/25}\,p,$$

$$D^3_{13}(S_1)=-\sqrt{15}c^4s^2=-\sqrt{3/25}\,p^{-1},$$

$$D^3_{1(-2)}(S_1)=-\sqrt{10}cs^3(2c^2-s^2)=-\sqrt{2/25}\,p^{-1}.$$

解得 $a/b=\sqrt{3/2}$和 $c/d=-\sqrt{2/3}$，由归一化条件，可取 $a=d=\sqrt{3/5}$和 $b=-c=\sqrt{2/5}$. 再代入矩阵等式，算出

$$D^{T_2}(S_1)=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-p & \sqrt{2} & p^{-1}\\ \sqrt{2} & -1 & \sqrt{2}\\ p^{-1} & \sqrt{2} & -p\end{pmatrix},$$

$$D^{G}(S_1)=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-1 & -p & -p^{-1} & 1\\ -p & 1 & -1 & -p^{-1}\\ -p^{-1} & -1 & 1 & -p\\ 1 & -p^{-1} & -p & -1\end{pmatrix},$$

现在来计算正二十面体各转动轴的方向. 由于各转动轴环绕 z 轴均匀分布，它们的方位角直接可由图 4.1 确定，这里要计算它们的极角. 按第 5 题的符号，除 T_0 以外的五次轴的极角为 θ_1，两组三次轴的极角分别为 θ_2 和 θ_3，两组二次轴的极角分别为 θ_4 和 θ_5，另一组二次轴在 xy 平面，极角为 $\pi/2$. 前面已经根据 $D^{T_1}(S_1)$的形式算出了 θ_4 角. 可运用一些几何知识来计算其他极角. 设正二十面体的棱长为 1，外接圆半径为 R，内切圆半径为 r. 正二十面体的侧面是正三角形，三角形的中心到顶点的距离为 $d=\sqrt{1/3}$. 从图上可知，$\sin\theta_4=(2R)^{-1}$，$\tan\theta_2=d/r$，$R^2=d^2+r^2$. 由此解得

$$R=(2\sin\theta_4)^{-1}=\frac{1}{2}(1+\cot^2\theta_4)^{1/2}=\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^{1/2}=0.9511,$$

$$r=(R^2-d^2)^{1/2}=\left(\frac{14+6\sqrt{5}}{48}\right)^{1/2}=\frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}=0.7558,$$

$$\tan\theta_2=\frac{d}{r}=\frac{4}{3+\sqrt{5}}=3-\sqrt{5}=2p^2,\qquad \theta_2=37.38^\circ,$$

$$\theta_1 = 2\theta_4 = 63.43°, \qquad \theta_5 = \frac{\pi - \theta_1}{2} = \frac{\pi}{2} - \theta_4 = 58.28°,$$

$$\tan\theta_1 = \frac{2\tan\theta_4}{1 - \tan^2\theta_4} = 2, \quad \tan\theta_5 = \cot\theta_4 = p^{-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

$$\theta_2 + \theta_3 = 2\theta_5 = \pi - \theta_1,$$

$$\tan\theta_3 = -\frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1\tan\theta_2} = 3 + \sqrt{5} = 2p^{-2}, \theta_3 = 79.19°.$$

13. 证明在 SU(2)群中，相同 ω 的元素 $u(\hat{n},\omega)$构成一类.

解 我们已经证明了 SO(3)群和 SU(2)群的同态关系，即 SO(3)群的元素 $R(\hat{n},\omega)$和 SU(2)群两个元素 $\pm u(\hat{n},\omega)$间存在对应关系：

$$u(\hat{n},\omega)\sigma_a u(\hat{n},\omega)^{-1} = \sum_{b=1}^{3}\sigma_b R_{ba}(\hat{n},\omega),$$

且此对应关系对乘积保持不变. 设 $\hat{n}$方向的极角和方位角分别为 θ 和 φ. 令

$$S = R(\boldsymbol{e}_3,\varphi)R(\boldsymbol{e}_2,\theta) \in \mathrm{SO}(3), \quad v = u(\boldsymbol{e}_3,\varphi)u(\boldsymbol{e}_2,\theta) \in \mathrm{SU}(2),$$

则 $S_{b3} = n_b$,

$$v\sigma_3 v^{-1} = \sum_{b=1}^{3}\sigma_b S_{b3} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n}.$$

既然 $u(\hat{n},\omega) = \mathbf{1}\cos(\omega/2) - \mathrm{i}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{n})\sin(\omega/2)$，有

$$v^{-1}u(\hat{n},\omega)v = \mathbf{1}\cos(\omega/2) - \mathrm{i}\sigma_3\sin(\omega/2) = u(\boldsymbol{e}_3,\omega),$$

即所有具有给定 ω 角的元素 $u(\hat{n},\omega)$都共轭于 $u(\boldsymbol{e}_3,\omega)$，它们属于同一类. 由于 $u(\hat{n},\omega)$的矩阵迹等于 $2\cos(\omega/2)$，在 $0\leqslant\omega\leqslant 2\pi$ 的范围内，不同 ω 的 $u(\hat{n},\omega)$矩阵有不同的矩阵迹，因此它们互不共轭，分属不同的类. 证完.

三、李氏定理和李群的伴随(adjoint)表示

★ 李氏第一定理：简单李群的线性表示完全由它的生成元决定，即表示矩阵满足如下微分方程和边界条件：

$$\frac{\partial D(R)}{\partial r_k} = -\mathrm{i}\left\{\sum_j I_j S_{jk}(r)\right\}D(R), \quad D(R)\mid_{R=E} = \mathbf{1}. \tag{4.17}$$

其中 $S_{jk}(r)$由李群元素的乘积规则决定. 设 $RS = T$，则元素 T 的参数 t_j 是元素

R 和 S 的参数的函数，称为组合函数.

$$t_j = f_j(r;s), \quad S_{jk}(r) = \frac{\partial f_j(r;s)}{\partial r_k}\Big|_{s=\bar{r}}.$$

$\bar{r}$ 是元素 R^{-1} 的参数.

★ 李氏第二定理：李群线性表示的生成元满足共同的对易关系

$$I_j I_k - I_k I_j = \mathrm{i}\sum_l C_{jk}^l I_l. \tag{4.18}$$

其中 C_{jk}^l 称为李群的结构常数，常通过一已知表示生成元的对易关系计算得到. 结构常数依赖于参数选择.

★ 李氏第三定理：李群结构常数满足

$$C_{jk}^l = -C_{kj}^l,$$

$$\sum_p \{C_{jk}^p C_{pl}^q + C_{kl}^p C_{pj}^q + C_{lj}^p C_{pk}^q\} = 0. \tag{4.19}$$

反之，由满足(4.19)式的一组实常数，可以构造相应的李群，以此常数作为结构常数.

★ 李群的表示 $D(R)$ 及其生成元 I_j 满足

$$D(R) I_j D(R)^{-1} = \sum_k I_k D_{kj}^{\mathrm{ad}}(R), \tag{4.20}$$

其中 $D^{\mathrm{ad}}(R)$ 称为李群的伴随表示. 伴随表示的生成元与结构常数相联系：

$$(I_j^{\mathrm{ad}})_{kl} = \mathrm{i}C_{jl}^k. \tag{4.21}$$

事实上，取伴随表示的生成元(4.21)式后，对无穷小元素 R，(4.20)式正好回到(4.18)式. SO(3)群的自身表示是 SU(2)群和 SO(3)群的伴随表示，因而

$$D^j(R) I_a^j D^j(R)^{-1} = \sum_k I_b^j R_{ba},$$

$$P_R L_a P_R^{-1} = \sum_k L_b R_{ba},$$

$$O_R J_a O_R^{-1} = \sum_k J_b R_{ba}, \tag{4.22}$$

其中 P_R 是标量函数变换算符，O_R 是旋量或张量函数变换算符，L_a 和 J_a 分别是轨道角动量和总角动量算符.

14. 试由李氏第二定理计算 SU(2)群不可约表示生成元的矩阵形式.

解 这是量子力学中的矩阵力学理论的一个基本问题，用的是标准的群论方法.

角动量算符是 SU(2)群的生成元，根据李氏第二定理，角动量算符满足的对易关系也就是 SU(2)群生成元满足的共同对易关系：

$$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm, \qquad [J_+, J_-] = 2J_3, \qquad [J^2, J_a] = 0,$$

$$J^2 = J_3^2 + J_3 + J_- J_+ = J_3^2 - J_3 + J_+ J_-,$$

因为 J^2 与所有生成元 J_a 对易，所以在不可约表示中取常数矩阵．在不可约表示空间中，取 J^2 和 J_3 共同本征函数为基．设 J_3 的最大本征值为 j，采用狄拉克(Dirac)符号，记作 $|j\rangle$：

$$J_3|j\rangle = j|j\rangle, \qquad J_+|j\rangle = 0.$$

由此可求出 J^2 的本征值为 $j(j+1)$．多次用 J_- 作用，由于不可约表示维数有限，作用足够多次后必有

$$J_-^{n+1}|j\rangle = 0, \qquad J_-^{\mu}|j\rangle \neq 0, \qquad 0 \leqslant \mu \leqslant n.$$

则

$$J_3 J_-|j\rangle = (J_- J_3 - J_-)|j\rangle = (j-1)J_-|j\rangle,$$

$$J_3 J_-^n|j\rangle = (j-n)J_-^n|j\rangle,$$

$$J^2 J_-^n|j\rangle = (j-n)(j-n-1)J_-^n|j\rangle = j(j+1)J_-^n|j\rangle.$$

解得 n 的正根为 $2j$，故 j 只能取整数或半奇数．设

$$J_-|\mu\rangle = A_\mu|\mu-1\rangle, \qquad 0 \leqslant j-\mu \leqslant n = 2j,$$

其中 A_μ 是待定常数，$A_{-j}=0$，其他 A_μ 不为零．现在来证明基 $|\mu\rangle$ 在 J_+ 作用下和 $|\mu+1\rangle$ 成比例，就是说，这个 $2j+1$ 维空间对角动量算符 J_a 是封闭的．用数学归纳法，若

$$J_+|\nu\rangle = B_{\nu+1}|\nu+1\rangle, \qquad \mu \leqslant \nu \leqslant j,$$

成立，要证明它对 $\nu=\mu-1 \geqslant -j$ 也成立，其中 $B_{\nu+1}$ 是待定常数，$B_{j+1}=0$.

$$2\mu|\mu\rangle = 2J_3|\mu\rangle = [J_+, J_-]|\mu\rangle = A_\mu J_+|\mu-1\rangle - A_{\mu+1}B_{\mu+1}|\mu\rangle,$$

$$J_+|\mu-1\rangle = (A_\mu)^{-1}(2\mu + A_{\mu+1}B_{\mu+1})|\mu\rangle = B_\mu|\mu\rangle.$$

证完．上式同时给出递推关系：

$$A_{\mu+1}B_{\mu+1} = A_\mu B_\mu - 2\mu = A_{\mu-1}B_{\mu-1} - 2\mu - 2(\mu-1)$$

$$= \cdots$$

$$= A_{-j}B_{\mu-(\mu+j)} - (\mu - j)(\mu + j + 1)$$

$$= (j + \mu - 1)(j - \mu) = (\Gamma^j_{\mu+1})^2.$$

选择基的可乘因子，使 $A_\mu = B_\mu = \Gamma^j_\mu$ 为正实数，得

$$\Gamma^j_j = [(2j)1]^{1/2}, \quad \Gamma^j_{j-1} = [(2j-1)\,2]^{1/2},$$

$$\Gamma^j_{j-n} = [(2j-n)\,(n+1)]^{1/2}, \quad \Gamma^j_\mu = [(j+\mu)(j-\mu+1)]^{1/2},$$

$$J_3 \mid \mu\rangle = \mu \mid \mu\rangle, \quad J^2 \mid \mu\rangle = j(j+1) \mid \mu\rangle, \quad J_\pm \mid \mu\rangle = \Gamma^j_{\mp\mu} \mid \mu \pm 1\rangle.$$

15. 对任何一阶李群，组合函数为 $f(r;s)$，试选择新参数 r'，使新的组合函数为相加关系，$f'(r';s') = r' + s'$. 沿 z 方向相对速度为 v 的两惯性系间的洛伦兹变换 $A(v)$ 取如下形式，它们的集合构成一阶李群：

$$A(v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mathrm{i}\gamma v/c \\ 0 & 0 & \mathrm{i}\gamma v/c & \gamma \end{pmatrix}, \qquad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}, \quad f(v_1, v_2) = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2}.$$

请选择新参数，使新的组合函数为相加关系.

解 对任一给定的一阶李群，选定参数 r 后，组合函数为 $f(r;s)$，

$$S(r) = \left(\frac{\partial f(r;s)}{\partial r}\right)_{s=r}.$$

由李氏第一定理，

$$\frac{\mathrm{d}D(r)}{\mathrm{d}r} = -\mathrm{i}IS(r)D(r), \qquad D(r)\mid_{r=e} = \mathbf{1},$$

其中 I 是表示 $D(r)$ 的生成元，e 是恒元的参数，取为零. 解常微分方程，得

$$D(r) = \exp\left\{-\mathrm{i}I\int_0^r S(t)\mathrm{d}t\right\}.$$

引入新参数

$$\omega(r) = \int_0^r S(t)\mathrm{d}t.$$

恒元的新参数仍为零. 由此得

$$D(r) = \exp\{-\mathrm{i}I\omega(r)\}, \qquad D(s) = \exp\{-\mathrm{i}I\omega(s)\},$$

$$\exp\{-\mathrm{i}I[\omega(r)+\omega(s)]\} = D(r)D(s) = D(rs) = \exp\{-\mathrm{i}I\omega(rs)\},$$

$$\omega(rs) = \omega(r) + \omega(s).$$

元素相乘时，新参数相加.

以相对运动沿 z 方向的洛伦兹变换所构成的一阶李群为例，选相对速度 v 为参数，组合函数为

$$f(v_1;v_2) = \frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2/c^2}, \quad S(v) = \left.\frac{\partial f(v;v')}{\partial v}\right|_{v=v'} = \frac{1}{1-v^2/c^2}.$$

引入新参数 ω

$$\omega = \frac{1}{c}\int_0^v S(t)\mathrm{d}t = \operatorname{arctanh}\left(\frac{t}{c}\right)\Big|_0^v = \operatorname{arctanh}\left(\frac{v}{c}\right).$$

选用新参数后，

$$\tanh\omega = v/c, \qquad \cosh\omega = (1-v^2/c^2)^{1/2} = \gamma, \qquad \sinh\omega = \gamma v/c,$$

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh\omega & -\mathrm{i}\sinh\omega \\ 0 & 0 & \mathrm{i}\sinh\omega & \cosh\omega \end{pmatrix}.$$

两洛伦兹变换相乘，参数 ω 相加.

四、不可约张量算符和维格纳(Wigner)－埃伽(Eckart)定理

★　$(2k+1)$个算符 $L_\rho^k(x)$，$-k\leqslant\rho\leqslant k$，在转动变换中按 SO(3)群不可约表示 D^k 来组合，这些算符称为 k 阶不可约张量算符：

$$O_R L_\rho^k(x) O_R^{-1} = \sum_{\lambda=-k}^{k} L_\lambda^k(x) D_{\lambda\rho}^k(R). \tag{4.23}$$

对无穷小转动，得

$$\begin{aligned} &[J_3, L_\rho^k(x)] = \rho L_\rho^k(x), \\ &[J_\pm, L_\rho^k(x)] = \{(k\mp\rho)(k\pm\rho+1)\}^{1/2} L_{\rho\pm1}^k(x), \\ &\sum_{a=1}^{3}[J_a,[J_a, L_\rho^k(x)]] = k(k+1) L_\rho^k(x). \end{aligned} \tag{4.24}$$

(4.23)式和(4.24)式是等价的，它们都可以作为 k 阶不可约张量算符的定义. 如果把 O_R 换成 P_R 或 Q_R，则 $L^k_\rho(x)$ 分别称为关于轨道空间或自旋空间的 k 阶不可约张量算符.

一阶不可约张量算符称为矢量算符，由(4.13)式知，D^1 表示等价于 SO(3)群自身表示 R，因此矢量算符有两种表达方式：

$$
\begin{aligned}
&O_R L^1_\rho(x) O_R^{-1} = \sum_{\lambda=-1}^{1} L^1_\lambda(x) D^1_{\lambda\rho}(R), \\
&O_R V_a(x) O_R^{-1} = \sum_{b=1}^{3} V_b(x) R_{ba}, \\
&L^1_1 = -\sqrt{1/2}(V_1 + \mathrm{i}V_2), \qquad V_1 = \sqrt{1/2}(L^1_{-1} - L^1_1), \\
&L^1_0 = V_3, \qquad\qquad\qquad\quad\; V_2 = \mathrm{i}\sqrt{1/2}(L^1_{-1} + L^1_1), \\
&L^1_{-1} = \sqrt{1/2}(V_1 - \mathrm{i}V_2), \qquad V_3 = L^1_0.
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

$L^1_\rho(x)$ 称为矢量算符的球分量，$V_a(x)$ 称为矢量算符的直角分量. 常见的矢量算符有电偶极算符 x_a 或 $Y^1_\rho(\hat{n})$，动量算符 p_a，角动量算符 J_a，L_a 和 S_a 等.

★ 作为矢量算符，J_a 满足

$$O_R J_a(x) O_R^{-1} = \sum_{b=1}^{3} J_b(x) R_{ba}.$$

因为 J_a 正是 O_R 变换的生成元，所以上式正是 SO(3)群伴随表示所满足的关系式. 取 $a=3$，得

$$O_R J_3(x) O_R^{-1} = \boldsymbol{J}\cdot\hat{n}(\theta,\varphi), \quad R = R(\varphi,\theta,\gamma). \tag{4.26}$$

γ 角经常取为零. 由(4.26)知，$\boldsymbol{J}\cdot\hat{n}(\theta,\varphi)$ 的本征函数是 $O_R\psi_\mu(x)$，其中 $\psi_\mu(x)$ 是属于不可约表示 D^j μ 行的函数，是 J_3 的本征函数.

★ 对于球对称系统，能量本征函数可以组合成属不可约幺正表示确定行的函数：

$$
\begin{aligned}
O_R \Psi^j_\mu(x) &= \sum_\nu \Psi^j_\nu(x) D^j_{\nu\mu}(R), \\
O_R \Phi^{j'}_{\mu'}(x) &= \sum_{\nu'} \Phi^{j'}_{\nu'}(x) D^{j'}_{\nu'\mu'}(R).
\end{aligned}
$$

原始的维格纳-埃伽定理指出，属不等价不可约表示或不可约幺正表示不同行的函数互相正交：

$$\langle \Phi^{j'}_{\mu'}(x) \mid \Psi^{j}_{\mu}(x)\rangle = \delta_{j'j}\delta_{\mu'\mu}\langle \Phi^{j'} \| \Psi^{j}\rangle.$$

其中$\langle \Phi^{j'} \| \Psi^{j}\rangle$称为约化矩阵元，它与 Φ 和 Ψ 的具体形式有关，与指标 j' 和 j 有关，但与下标 μ' 和 μ 无关．现在来计算不可约张量算符在这样函数基中的矩阵元．因为

$$\begin{aligned} O_R\{L^k_\rho(x)\Psi^j_\mu(x)\} &= \{O_R L^k_\rho(x) O_R^{-1}\}\{O_R\Psi^j_\mu(x)\} \\ &= \sum_{\lambda\nu}\{L^k_\lambda(x)\Psi^j_\nu(x)\}\{D^k_{\lambda\rho}(R)D^j_{\nu\mu}(R)\}. \end{aligned}$$

$L^k_\rho(x)\Psi^j_\mu(x)$按直乘表示变换，可用克莱布施-戈登系数把它们组合成按不可约表示变换的函数 $F^J_M(x)$：

$$F^J_M(x) = \sum_\rho L^k_\rho(x)\Psi^j_{M-\rho}(x) C^{kj}_{\rho(M-\rho)JM},$$

$$L^k_\rho(x)\Psi^j_\mu(x) = \sum_J F^J_{\rho+\mu}(x) C^{kj}_{\rho\mu J(\rho+\mu)},$$

$$O_R F^J_M(x) = \sum_{M'} F^J_{M'}(x) D^J_{M'M}(R).$$

由维格纳-埃伽定理得

$$\langle \Phi^{j'}_{\mu'}(x) \mid F^J_M(x)\rangle = \delta_{j'J}\delta_{\mu'M}\, c,$$

其中常数 c 与下标 μ' 和 M 无关，它与 Φ, L 和 Ψ 的具体形式有关，也与指标 j', k 和 j 有关，仍称为约化矩阵元，记作$\langle \Phi^{j'} \| L^k \| \Psi^j\rangle$．因此，

$$\begin{aligned} \langle \Phi^{j'}_{\mu'}(x) \mid L^k_\rho(x) \mid \Psi^j_\mu(x)\rangle &= \sum_J C^{kj}_{\rho\mu J(\rho+\mu)}\langle \Phi^{j'}_{\mu'}(x) \mid F^J_{\rho+\mu}(x)\rangle \\ &= C^{kj}_{\rho\mu j'\mu'}\langle \Phi^{j'} \| L^k \| \Psi^j\rangle. \end{aligned} \tag{4.27}$$

原来要计算$(2j'+1)(2k+1)(2j+1)$个矩阵元，现在简化为只需计算一个矩阵元，而且可以挑选最合适的下标 μ', ρ 和 μ 来计算，用这个矩阵元的计算结果来确定约化矩阵元，从而把这么多个矩阵元的数值联系起来．维格纳-埃伽定理把矩阵元中与转动变换有关的性质分离出来，由克莱布施-戈登系数来描述，而与转动变换无关的性质，如与波函数和算符具体形式有关的性质保留在约化矩阵元中．这样维格纳-埃伽定理充分发挥了对称性的作用，大大简化了计算工作量．

16． 球函数 $Y^l_m(\hat{n})$是沿 $\boldsymbol{e}_3$ 方向轨道角动量的本征函数，本征值为 m，试由它们计算沿 $\hat{m}=(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)/\sqrt{2}$方向轨道角动量的本征值为 m 的本征函数．

解　$\hat{m}=(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)/\sqrt{2}$方向的极角 $\theta=\pi/2$，方位角 $\varphi=-\pi/4$．令 $S=R(-\pi/4,\pi/2,0)$，则

$$P_S L_3 P_S^{-1} = \sum_{b=1}^{3} L_b S_{b3} = \boldsymbol{L} \cdot \hat{m}$$

$\boldsymbol{L}\cdot\hat{m}$的本征值为 m 的本征函数是

$$\begin{aligned} P_S Y_m^l(\hat{n}) &= \sum_{m'} Y_{m'}^l(\hat{n}) D_{m'm}^l(-\pi/4, \pi/2, 0) \\ &= \sum_{m'} Y_{m'}^l(\hat{n}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m'\pi/4} d_{m'm}^l(\pi/2), \end{aligned}$$

因为

$$\boldsymbol{L} \cdot \hat{m} \{P_S Y_m^l(\hat{n})\} = P_S L_3 Y_m^l(\hat{n}) = m\{P_S Y_m^l(\hat{n})\}.$$

17. 设函数 $\psi_m^l(x)$是属于 SO(3)群不可约表示 D^l m 行的函数，试由 $\psi_m^l(x)^*$线性组合出轨道角动量沿 $\boldsymbol{e}_2$ 方向的本征值为 m 的本征函数.

提示：利用表示 D^j(SO(3))与其复共轭表示的等价关系计算.

解 由表示 $D^j(R)^*$与表示 $D^j(R)$的等价关系，

$$D^j(R) = d^j(\pi) D^j(R)^* d^j(\pi)^{-1},$$

$$d_{\mu\nu}^j(\pi)^{-1} = d_{\mu\nu}^j(-\pi) = \delta_{\mu(-\nu)}(-1)^{j+\nu},$$

可把函数 $\psi_m^l(x)^*$组合成属不可约表示 D^l的函数$\phi_m^l(x)$：

$$P_R \psi_m^l(x)^* = \sum_{m'} \psi_{m'}^l(x)^* D_{m'm}^l(R)^*,$$

$$\phi_m^l(x) = \sum_{m'} \psi_{m'}^l(x)^* d_{m'm}^l(-\pi) = (-1)^{l+m} \psi_{-m}^l(x)^*.$$

$$P_R \phi_m^l(x) = \sum_{m'} \phi_{m'}^l(x) D_{m'm}^l(R).$$

因此 $\phi_m^l(x)$是沿 $\boldsymbol{e}_3$ 方向轨道角动量的本征值为 m 的本征函数. 再用第 16 题的方法，根据 $\boldsymbol{e}_2$ 方向的极角和方位角都是 $\pi/2$，引入 $S = R(\pi/2, \pi/2, 0)$，则得沿 $\boldsymbol{e}_2$ 方向轨道角动量的本征值为 m 的本征函数是

$$\begin{aligned} P_S \phi_m^l(x) &= \sum_{m'} \phi_{m'}^l(x) D_{m'm}^l(S) \\ &= (-1)^l \sum_{m'} \psi_{-m'}^l(x)^* \mathrm{e}^{\mathrm{i}m'\pi/2} d_{m'm}^l(\pi/2). \end{aligned}$$

另一计算方法是由 $L_3 \psi_m^l(x)^* = -m\psi_m^l(x)^*$得沿 $\boldsymbol{e}_2$ 方向轨道角动量的本征值为 m 的本征函数是

$$P_S\psi^l_{-m}(x)^* = \sum_{m'}\psi^l_{m'}(x)^* D^l_{m'(-m)}(S)^*$$
$$= (-1)^m \sum_{m'}\psi^l_{m'}(x)^* e^{-im'\pi/2} d^l_{(-m')m}(\pi/2).$$

把求和指标 m'换成 $-m'$，除了相因子，两个计算结果是相同的.

18. 关于自旋空间的转动 Q_R，旋量基 $e^{(s)}(\rho)$属不可约表示 D^s ρ 行，因而是自旋角动量 S^2和 S_3 的共同本征函数，本征值为 $s(s+1)$和 ρ，试由它们计算自旋沿径向分量 $\boldsymbol{S}\cdot\hat{r}$的本征函数，其中 $\hat{r}$是径向单位矢量.

解 算符 $\boldsymbol{S}\cdot\hat{r}$在空间转动中是标量算符，但在自旋空间转动中是矢量算符. 设 r 的极角和方位角分别为θ 和φ，取 $R=R(\varphi,\theta,0)$，则

$$\boldsymbol{S}\cdot\hat{r} = Q_R S_3 Q_R^{-1},$$

它的本征函数是

$$Q_R e^{(s)}(\rho) = \sum_\lambda e^{(s)}(\lambda) D^s_{\lambda\rho}(R) = \sum_\lambda e^{(s)}(\lambda) e^{-i\lambda\varphi} d^s_{\lambda\rho}(\theta),$$
$$\boldsymbol{S}\cdot\hat{r}\, Q_R e^{(s)}(\rho) = \rho Q_R e^{(s)}(\rho).$$

19. 有两套互相对易的角动量算符，一套是 J^2、J_3、L^2和 S^2，另一套是 J^2，J_3，S^2和 $\boldsymbol{S}\cdot\hat{r}$，试分别计算它们的共同本征函数.

解 J^2、J_3、L^2和 S^2的共同本征函数是球旋函数 $Y^{jls}_\mu(\hat{n})$，它由球谐函数 $Y^l_m(\hat{n})$和旋量基 $e^{(s)}(\rho)$通过克莱布施-戈登系数组合得到

$$Y^{jls}_\mu(\hat{n}) = \sum_\rho C^{ls}_{(\mu-\rho)\rho j\mu} Y^l_{\mu-\rho}(\hat{n}) e^{(s)}(\rho).$$

球旋函数是 s 阶旋量，上式是旋量等式，是$(2s+1)\times 1$矩阵等式. 因为在组合中只有磁量子数求和，所以球旋函数还是 L^2和 S^2的本征函数：

$$J^2 Y^{jls}_\mu(\hat{n}) = j(j+1) Y^{jls}_\mu(\hat{n}),$$

$$J_3 Y^{jls}_\mu(\hat{n}) = \mu\, Y^{jls}_\mu(\hat{n}),$$

$$J_\pm Y^{jls}_\mu(\hat{n}) = \Gamma^j_{\mp\mu} Y^{jls}_{\mu\pm1}(\hat{n}),$$

$$L^2 Y^{jls}_\mu(\hat{n}) = l(l+1) Y^{jls}_\mu(\hat{n}),$$

$$S^2 Y^{jls}_\mu(\hat{n}) = s(s+1)\, Y^{jls}_\mu(\hat{n}).$$

J^2、J_3、S^2和 $\boldsymbol{S}\cdot\hat{r}$，的共同本征函数也是 s 阶旋量. 因为它是 J^2和 J_3 的本征

函数，所以在空间转动中按 SO(3)群 D^j 表示变换，

$$O_R\Psi^j_\mu(\boldsymbol{r}) = D^s(R)\Psi^j_\mu(R^{-1}\boldsymbol{r}) = \sum_\nu \Psi^j_\nu(\boldsymbol{r})D^j_{\nu\mu}(R).$$

设 $\boldsymbol{r}$ 的球坐标为 r、θ 和 φ，又设 $T=R(\varphi,\theta,\gamma)$，它把 z 轴转到 $\boldsymbol{r}$ 方向，即 $T\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{r}$，其中 $\boldsymbol{r}_0=(r,0,0)$是沿 z 轴时的 $\boldsymbol{r}$ 矢量. 在上式中取 $\boldsymbol{r}$ 为 $\boldsymbol{r}_0$，R 为 T^{-1}，得

$$\Psi^j_\mu(\boldsymbol{r}) = \Psi^j_\mu(T\boldsymbol{r}_0) = D^s(T)O^{T^{-1}}\Psi^j_\mu(\boldsymbol{r}_0)$$

$$= \sum_\nu D^s(T)\Psi^j_\nu(\boldsymbol{r}_0)D^j_{\nu\mu}(T^{-1}).$$

写成旋量分量等式，

$$\Psi^j_\mu(\boldsymbol{r})_\rho = \sum_{\nu\sigma} D^s_{\rho\sigma}(\varphi,\theta,\gamma)\Psi^j_\nu(r_0)_\sigma D^j_{\mu\nu}(\varphi,\theta,\gamma)^*$$

$$= \sum_{\nu\sigma} \mathrm{e}^{i\varphi(\mu-\rho)}d^s_{\rho\sigma}(\theta)\mathrm{e}^{i\gamma(\nu-\sigma)}\Psi^j_\nu(\boldsymbol{r}_0)_\sigma d^j_{\mu\nu}(\theta).$$

因为等式左面与 γ 角无关，等式右面也必须与 γ 角无关,所以只有当 $\nu=\sigma$ 时 $\Psi^j_\nu(r_0)_\sigma$ 才能不为零，

$$\Psi^j_\nu(\boldsymbol{r}_0)_\sigma = \delta_{\nu\sigma}\phi^j_\nu(r).$$

代入并取 $T_0=R(\varphi,\theta,0)$，得

$$\Psi^j_\mu(\boldsymbol{r}) = \sum_\rho \Psi^j_\mu(\boldsymbol{r})_\rho e^{(s)}(\rho)$$

$$= \sum_{\rho\nu} e^{(s)}(\rho)D^s_{\rho\nu}(\varphi,\theta,0)D^j_{\mu\nu}(\varphi,\theta,0)^*\phi^j_\nu(r)$$

$$= \sum_\nu [Q_{T_0}e^{(s)}(\nu)]D^j_{\mu\nu}(T_0)^*\phi^j_\nu(r).$$

因为方括号中的量正是 $\boldsymbol{S}\cdot\hat{r}$的本征函数，本征值为 ν，所以上式作为 J^2、J_3、S^2和 $\boldsymbol{S}\cdot\hat{r}$，的共同本征函数，必须 ν 取确定值，即

$$[Q_{T_0}e^{(s)}(\nu)]D^j_{\mu\nu}(T_0)^*\phi^j_\nu(r) = \sum_\rho e^{(s)}(\rho)D^s_{\rho\nu}(\varphi,\theta,0)D^j_{\mu\nu}(\varphi,\theta,0)^*\phi^j_\nu(r)$$

是 J^2、J_3、S^2和 $\boldsymbol{S}\cdot\hat{r}$，的共同本征函数，本征值分别为 $j(j+1)$、μ、$s(s+1)$和 ν，$\phi^j_\nu(r)$可看作径向函数，也可看作归一化系数.

20. 试计算$\{d^l(\theta)(I^l_3)^2d^l(\theta)^{-1}\}_{mm}$，其中 $d^l(\theta)$是转动群的表示矩阵，I^l_3 是该表示的第三个生成元.

提示：利用伴随表示的性质.

解 SO(3)群的自身表示就是它的伴随表示，根据伴随表示的定义(4.22)，有

$$d^l(\theta)I_3^l d^l(\theta)^{-1} = \sum_{b=1}^{3} I_b^l R_{b3}(e_2,\theta) = I_1^l \sin\theta + I_3^l \cos\theta,$$

$$d^l(\theta)(I_3^l)^2 d^l(\theta)^{-1} = (d^l(\theta)I_3^l d^l(\theta)^{-1})^2$$

$$= (I_1^l)^2\sin^2\theta + (I_3^l)^2\cos^2\theta + (I_1^l I_3^l + I_3^l I_1^l)\sin\theta\cos\theta.$$

因为 I_3^l 是对角矩阵，$I_1^l = (I_+^l + I_-^l)/2$ 的对角元都是零，所以

$$\{d^l(\theta)(I_3^l)^2 d^l(\theta)^{-1}\}_{mm}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{4}\{(I_+^l)^2 + (I_-^l)^2 + I_+^l I_-^l + I_-^l I_+^l\}_{mm} + m^2\cos^2\theta$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{4}\{(l+m)(l-m+1) + (l+m+1)(l-m)\} + m^2\cos^2\theta$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{2}\{l^2 + l - m^2\} + m^2\cos^2\theta .$$

21. 试用升降算符 $L_\pm$ 作用的办法直接计算下列 SO(3)群直乘表示分解的克莱布施-戈登系数：1) $D^{1/2}\times D^{1/2}$，2) $D^{1/2}\times D^1$，3) $D^1\times D^1$，4) $D^1\times D^{3/2}$.

解　在 $D^j\times D^k$ 的表示空间，状态基 $|j,\mu\rangle|k,\nu\rangle$ 是 J_3 的本征函数，本征值是 $\mu+\nu$. J_3 最大本征值的状态为 $|j,j\rangle|k,k\rangle$，它显然属于不可约表示 D^J，$J=j+k$，记作 $\|j+k,j+k\rangle$. 用降算符作用，可得表示 D^J 所有其他状态. 在与算得的状态正交的空间再找出 J_3 最大本征值的状态，它显然属于另一个不可约表示 D^J. 用同样方法计算它的所有其他状态. 在计算中利用如下公式：

$$J_-\|J,M\rangle = [(J+M)(J-M+1)]^{1/2}\|J,M-1\rangle$$

$$= J_-\left\{\sum_{\mu=-j}^{j}|j,\mu\rangle|k,M-\mu\rangle\right\}$$

$$= \sum_{\mu=-j}^{j}\{|j,\mu\rangle(J_-|k,M-\mu\rangle) + (J_-|j,\mu\rangle)|k,M-\mu\rangle\},$$

$$J_+\|J,J\rangle = 0.$$

1) 在直乘表示空间中，J_3 最大本征值的状态是 $|1/2,1/2\rangle|1/2,1/2\rangle$，属于不可约表示 D^1.

$$\|1,1\rangle = |1/2,1/2\rangle|1/2,1/2\rangle,$$

$$\|1,0\rangle = 2^{-1/2}J_-\|1,1\rangle$$

$$= 2^{-1/2}\{|1/2,1/2\rangle|1/2,-1/2\rangle+|1/2,-1/2\rangle|1/2,1/2\rangle\},$$

$$\|1,-1\rangle = 2^{-1/2}J_-\|1,0\rangle$$

$$= 2^{-1}\{|1/2,-1/2\rangle|1/2,-1/2\rangle+|1/2,-1/2\rangle|1/2,-1/2\rangle\}$$

$$= |1/2,-1/2\rangle|1/2,-1/2\rangle.$$

余下一个与$\|1,0\rangle$正交的态是

$$\|0,0\rangle = 2^{-1/2}\{|1/2,1/2\rangle|1/2,-1/2\rangle-|1/2,-1/2\rangle|1/2,1/2\rangle\},$$

属不可约表示 D^0. 按照克莱布施-戈登系数的相位规定，我们取前项的系数为正. 最后得直乘表示的分解式为

$$D^{1/2}\times D^{1/2}\simeq D^1\oplus D^0.$$

2) 在直乘表示空间中，J_3 最大本征值的状态是$|1/2,1/2\rangle|1,1\rangle$，属于不可约表示 $D^{3/2}$.

$$\|3/2,3/2\rangle = |1/2,1/2\rangle|1,1\rangle,$$

$$\|3/2,1/2\rangle = 3^{-1/2}J_-\|3/2,3/2\rangle$$

$$= 3^{-1/2}\{\sqrt{2}|1/2,1/2\rangle|1,0\rangle+|1/2,-1/2\rangle|1,1\rangle\},$$

$$\|3/2,-1/2\rangle = 2^{-1}J_-\|3/2,1/2\rangle$$

$$= 12^{-1/2}\{2|1/2,1/2\rangle|1,-1\rangle+\sqrt{2}|1/2,-1/2\rangle|1,0\rangle$$

$$+\sqrt{2}|1/2,-1/2\rangle|1,0\rangle\},$$

$$= 3^{-1/2}\{|1/2,1/2\rangle|1,-1\rangle+\sqrt{2}|1/2,-1/2\rangle|1,0\rangle\},$$

$$\|3/2,-3/2\rangle = 3^{-1/2}J_-\|3/2,-1/2\rangle$$

$$= 3^{-1}\{|1/2,-1/2\rangle|1,-1\rangle+2|1/2,-1/2\rangle|1,-1\rangle\}$$

$$= |1/2,-1/2\rangle|1,-1\rangle.$$

与$\|3/2,1/2\rangle$正交的状态属不可约表示 $D^{1/2}$. 按照克莱布施－戈登系数的相位规定，我们取状态$|1/2,1/2\rangle|1,0\rangle$的系数为正

$$\|1/2,1/2\rangle = 3^{-1/2}\{|1/2,1/2\rangle|1,0\rangle-\sqrt{2}|1/2,-1/2\rangle|1,1\rangle\},$$

$$\|1/2,-1/2\rangle = J_-1\|1/2,1/2\rangle$$

$$= 3^{-1/2}\{\sqrt{2}|1/2,1/2\rangle|1,-1\rangle+|1/2,-1/2\rangle|1,0\rangle$$

$$-2|1/2,-1/2\rangle|1,0\rangle\},$$

$$=3^{-1/2}\{\sqrt{2}|1/2,1/2\rangle|1,-1\rangle-|1/2,-1/2\rangle|1,0\rangle\}.$$

最后得直乘表示的分解式为

$$D^{1/2}\times D^{1}\simeq D^{3/2}\oplus D^{1/2}.$$

3) 在直乘表示空间中，J_3 最大本征值的状态是$|1,1\rangle|1,1\rangle$，属于不可约表示 D^2.

$$\|2,2\rangle=|1,1\rangle|1,1\rangle,$$

$$\|2,1\rangle=2^{-1}J_-\|2,2\rangle=2^{-1/2}\{|1,1\rangle|1,0\rangle+|1,0\rangle|1,1\rangle\}$$

$$\|2,0\rangle=6^{-1/2}J_-\|2,1\rangle$$

$$=6^{-1/2}\{|1,1\rangle|1,-1\rangle+|1,0\rangle|1,0\rangle+|1,0\rangle|1,0\rangle+|1,-1\rangle|1,1\rangle\}$$

$$=6^{-1/2}\{|1,1\rangle|1,-1\rangle+2|1,0\rangle|1,0\rangle+|1,-1\rangle|1,1\rangle\}.$$

余下的状态展开式可以类似计算，但也可根据克莱布施-戈登系数的对称性得到：

$$C^{jk}_{(-\mu)(-\nu)J(-M)}=(-1)^{j+k-J}C^{jk}_{\mu\nu JM},$$

$$\|2,-1\rangle=2^{-1/2}\{|1,0\rangle|1,-1\rangle+|1,-1\rangle|1,0\rangle\},$$

$$\|2,-2\rangle=|1,-1\rangle|1,-1\rangle.$$

与$\|2,1\rangle$正交的状态属不可约表示 D^1. 按照克莱布施－戈登系数的相位规定，我们取状态$|1,1\rangle|1,0\rangle$的系数为正.

$$\|1,1\rangle=2^{-1/2}\{|1,1\rangle|1,0\rangle-|1,0\rangle|1,1\rangle\},$$

$$\|1,0\rangle=2^{-1/2}J_-\|1,1\rangle$$

$$=2^{-1/2}\{|1,1\rangle|1,-1\rangle+|1,0\rangle|1,0\rangle-|1,0\rangle|1,0\rangle-|1,-1\rangle|1,1\rangle\}$$

$$=2^{-1/2}\{|1,1\rangle|1,-1\rangle-|1,-1\rangle|1,1\rangle\}.$$

$$\|1,-1\rangle=2^{-1/2}J_-\|1,0\rangle$$

$$=2^{-1/2}\{|1,0\rangle|1,-1\rangle-|1,-1\rangle|1,0\rangle\}.$$

在直乘表示空间，J_3 本征值为零的状态有三个，现已计算得两个互相正交的状态$\|2,0\rangle$和$\|1,0\rangle$，可以用正交条件计算第三个状态$\|0,0\rangle$，但这里换一种方法，用 J_+ 作用为零的条件来计算此状态. 设

$$\|0,0\rangle = a\,|1,1\rangle\,|1,-1\rangle + b\,|1,0\rangle\,|1,0\rangle + c\,|1,-1\rangle\,|1,1\rangle,$$

在 J_+ 作用下得零:

$$J_+\,\|0,0\rangle = \sqrt{2}\{a\,|1,1\rangle\,|1,0\rangle + b\,|1,1\rangle\,|1,0\rangle$$
$$+ b\,|1,0\rangle\,|1,1\rangle + c\,|1,0\rangle\,|1,1\rangle\} = 0,$$

得 $a=-b=c$, 归一化后得属表示 D^0 的状态

$$\|0,0\rangle = 3^{-1/2}\{|1,1\rangle\,|1,-1\rangle - |1,0\rangle\,|1,0\rangle + |1,-1\rangle\,|1,1\rangle\}.$$

最后得直乘表示的分解式为

$$D^1\times D^1 \simeq D^2 \oplus D^1 \oplus D^0.$$

4) 在直乘表示空间中, J_3 最大本征值的状态是 $|1,1\rangle\,|3/2,3/2\rangle$, 属于不可约表示 $D^{5/2}$.

$$\|5/2,5/2\rangle = |1,1\rangle\,|3/2,3/2\rangle,$$

$$\|5/2,3/2\rangle = 5^{-1/2}J_-\,\|5/2,5/2\rangle$$
$$= 5^{-1/2}\{\sqrt{3}\,|1,1\rangle\,|3/2,1/2\rangle + \sqrt{2}\,|1,0\rangle\,|3/2,3/2\rangle\},$$

$$\|5/2,1/2\rangle = 8^{-1/2}J_-\,\|5/2,3/2\rangle$$
$$= 40^{-1/2}\{2\sqrt{3}\,|1,1\rangle\,|3/2,-1/2\rangle + \sqrt{6}\,|1,0\rangle\,|3/2,1/2\rangle$$
$$+ \sqrt{6}\,|1,0\rangle\,|3/2,1/2\rangle + 2\,|1,-1\rangle\,|3/2,3/2\rangle\}$$
$$= 10^{-1/2}\{\sqrt{3}\,|1,1\rangle\,|3/2,-1/2\rangle + \sqrt{6}\,|1,0\rangle\,|3/2,1/2\rangle$$
$$+ |1,-1\rangle\,|3/2,3/2\rangle\}.$$

与 $\|5/2,3/2\rangle$ 正交的状态属不可约表示 $D^{3/2}$. 按照克莱布施-戈登系数的相位规定, 我们取状态 $|1,1\rangle\,|3/2,1/2\rangle$ 的系数为正.

$$\|3/2,3/2\rangle = 5^{-1/2}\{\sqrt{2}\,|1,1\rangle\,|3/2,1/2\rangle - \sqrt{3}\,|1,0\rangle\,|3/2,3/2\rangle\},$$

$$\|3/2,1/2\rangle = 3^{-1/2}J_-\,\|3/2,3/2\rangle$$
$$= 15^{-1/2}\{2\sqrt{2}\,|1,1\rangle\,|3/2,-1/2\rangle + 2\,|1,0\rangle\,|3/2,1/2\rangle$$
$$- 3\,|1,0\rangle\,|3/2,1/2\rangle - \sqrt{6}\,|1,-1\rangle\,|3/2,3/2\rangle\},$$
$$= 15^{-1/2}\{2\sqrt{2}\,|1,1\rangle\,|3/2,-1/2\rangle - |1,0\rangle\,|3/2,1/2\rangle$$
$$- \sqrt{6}\,|1,-1\rangle\,|3/2,3/2\rangle\}.$$

在直乘表示空间 J_3 本征值为 1/2 的状态有三个，已计算得两个互相正交的状态 $\| 5/2,1/2\rangle$ 和 $\| 3/2,1/2\rangle$，可用正交条件计算属于表示 $D^{1/2}$ 的状态，现用 J_+ 作用为零的方法来计算. 设

$$\| 1/2,1/2\rangle = a\,|1,1\rangle\,|3/2,-1/2\rangle + b\,|1,0\rangle\,|3/2,1/2\rangle + c\,|1,-1\rangle\,|3/2,3/2\rangle,$$

在 J_+ 作用下得零：

$$J_+\,\| 1/2,1/2\rangle = 2a\,|1,1\rangle\,|3/2,1/2\rangle + b\sqrt{2}\,|1,1\rangle\,|3/2,1/2\rangle$$
$$+\,b\sqrt{3}\,|1,0\rangle\,|3/2,3/2\rangle + c\sqrt{2}\,|1,0\rangle\,|3/2,3/2\rangle = 0,$$

得 $a\sqrt{6} = -b\sqrt{3} = c\sqrt{2}$，归一化后得属表示 D^0 的状态

$$|1/2,1/2\rangle = 6^{-1/2}\{|1,1\rangle\,|3/2,-1/2\rangle - \sqrt{2}\,|1,0\rangle\,|3/2,1/2\rangle$$
$$+\sqrt{3}\,|1,-1\rangle\,|3/2,3/2\rangle\}.$$

余下的状态展开式可根据克莱布施－戈登系数的对称性得到：

$$\| 5/2,-5/2\rangle = |1,-1\rangle\,|3/2,-3/2\rangle,$$
$$\| 5/2,-3/2\rangle = 5^{-1/2}\{\sqrt{3}\,|1,-1\rangle\,|3/2,-1/2\rangle + \sqrt{2}\,|1,0\rangle\,|3/2,-3/2\rangle\},$$
$$\| 5/2,-1/2\rangle = 10^{-1/2}\{\sqrt{3}\,|1,-1\rangle\,|3/2,1/2\rangle + \sqrt{6}\,|1,0\rangle\,|3/2,-1/2\rangle$$
$$+\,|1,1\rangle\,|3/2,-3/2\rangle\},$$
$$\| 3/2,-3/2\rangle = 5^{-1/2}\{-\sqrt{2}\,|1,-1\rangle\,|3/2,-1/2\rangle + \sqrt{3}\,|1,0\rangle\,|3/2,-3/2\rangle\},$$
$$\| 3/2,-1/2\rangle = 15^{-1/2}\{-2\sqrt{2}\,|1,-1\rangle\,|3/2,1/2\rangle + |1,0\rangle\,|3/2,-1/2\rangle$$
$$+\sqrt{6}\,|1,1\rangle\,|3/2,-3/2\rangle\},$$
$$\| 1/2,-1/2\rangle = 6^{-1/2}\{|1,-1\rangle\,|3/2,1/2\rangle - \sqrt{2}\,|1,0\rangle\,|3/2,-1/2\rangle$$
$$+\sqrt{3}\,|1,1\rangle\,|3/2,-3/2\rangle\}.$$

最后得直乘表示的分解式为

$$D^1 \times D^{3/7} \simeq D^{5/2} \oplus D^{3/2} \oplus D^{1/2}.$$

22. 试用克莱布施-戈登系数计算三个电子系统总自旋角动量本征函数.

解 先计算两个电子自旋状态的组合. 每个电子自旋为 1/2，组合前的电子状态用符号 $|\mu\rangle|\nu\rangle$ 标记，其中 μ 和 ν 取 $\pm 1/2$，简单地记作 $\pm$. 组合后的电子状态用符

号$|S,M\rangle$标记，其中 S 取 0 或 1，$|M|\leqslant S$. 由上题计算结果得

$$|1,1\rangle=|+\rangle|+\rangle,\quad |1,0\rangle=\sqrt{1/2}(|+\rangle|-\rangle+|-\rangle|+\rangle),$$

$$|1,-1\rangle=|-\rangle|-\rangle,\quad |0,0\rangle=\sqrt{1/2}(|+\rangle|-\rangle-|-\rangle|+\rangle).$$

三个电子自旋状态，组合前用符号$|\mu\rangle|\nu\rangle|\rho\rangle$标记，其中$\mu$，$\nu$和$\rho$都取±. 如果先组合前两个电子，组合后的电子状态用符号$\|S,S_{12},M\rangle$标记，由上题计算结果得

$$\|3/2,1,3/2\rangle=|1,1\rangle|+\rangle=|+\rangle|+\rangle|+\rangle,$$

$$\|3/2,1,1/2\rangle=\sqrt{1/3}\,|1,1\rangle|-\rangle+\sqrt{2/3}\,|1,0\rangle|+\rangle$$
$$=\sqrt{1/3}\{|+\rangle|+\rangle|-\rangle+|+\rangle|-\rangle|+\rangle+|-\rangle|+\rangle|+\rangle\},$$

$$\|3/2,1,-1/2\rangle=\sqrt{2/3}\,|1,0\rangle|-\rangle+\sqrt{1/3}\,|1,-1\rangle|+\rangle$$
$$=\sqrt{1/3}\{|+\rangle|-\rangle|-\rangle+|-\rangle|+\rangle|-\rangle+|-\rangle|-\rangle|+\rangle\},$$

$$\|3/2,1,-3/2\rangle=|1,-1\rangle|-\rangle=|-\rangle|-\rangle|-\rangle,$$

$$\|1/2,1,1/2\rangle=\sqrt{2/3}\,|1,1\rangle|-\rangle-\sqrt{1/3}\,|1,0\rangle|+\rangle$$
$$=\sqrt{1/6}\{2|+\rangle|+\rangle|-\rangle-|+\rangle|-\rangle|+\rangle-|-\rangle|+\rangle|+\rangle\},$$

$$\|1/2,1,-1/2\rangle=\sqrt{1/3}\,|1,0\rangle|-\rangle-\sqrt{2/3}\,|1,-1\rangle|+\rangle$$
$$=\sqrt{1/6}\{|+\rangle|-\rangle|-\rangle+|-\rangle|+\rangle|-\rangle-2|-\rangle|-\rangle|+\rangle\},$$

$$\|1/2,0,1/2\rangle=|0,0\rangle|+\rangle=\sqrt{1/2}\{|+\rangle|-\rangle|+\rangle-|-\rangle|+\rangle|+\rangle\},$$

$$\|1/2,0,-1/2\rangle=|0,0\rangle|-\rangle=\sqrt{1/2}\{|+\rangle|-\rangle|-\rangle-|-\rangle|+\rangle|-\rangle\}.$$

如果先组合后两个电子，组合后的电子状态用符号$|S,S_{23},M\rangle$标记，计算后发现，总自旋为 3/2 状态的组合是相同的，但总自旋为 1/2 的态重新组合了，实际上，两组解通过拉卡系数联系起来.

$$|3/2,1,3/2\rangle=|+\rangle|1,1\rangle=|+\rangle|+\rangle|+\rangle,$$

$$|3/2,1,1/2\rangle=\sqrt{2/3}\,|+\rangle|1,0\rangle+\sqrt{1/3}\,|-\rangle|1,1\rangle$$
$$=\sqrt{1/3}\{|+\rangle|+\rangle|-\rangle+|+\rangle|-\rangle|+\rangle+|-\rangle|+\rangle|+\rangle\},$$

$$|3/2,1,-1/2\rangle=\sqrt{1/3}\,|+\rangle|1,-1\rangle+\sqrt{2/3}\,|-\rangle|1,0\rangle$$

$$= \sqrt{1/3}\{|+\rangle|-\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle|-\rangle + |-\rangle|-\rangle|+\rangle\},$$

$$|3/2,1,-3/2\rangle = |-\rangle|1,-1\rangle = |-\rangle|-\rangle|-\rangle,$$

$$|1/2,1,1/2\rangle = \sqrt{1/3}\,|+\rangle|1,0\rangle - \sqrt{2/3}\,|-\rangle|1,1\rangle$$

$$= \sqrt{1/6}\{|+\rangle|+\rangle|-\rangle + |+\rangle|-\rangle|+\rangle - 2|-\rangle|+\rangle|+\rangle\}$$

$$= (1/2)\,\|1/2,1,1/2\rangle + (\sqrt{3}/2)\,\|1/2,0,1/2\rangle,$$

$$|1/2,1,-1/2\rangle = \sqrt{2/3}\,|+\rangle|1,-1\rangle - \sqrt{1/3}\,|-\rangle|1,0\rangle$$

$$= \sqrt{1/6}\{2|+\rangle|-\rangle|-\rangle - |-\rangle|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|-\rangle|+\rangle\}$$

$$= (1/2)\,\|1/2,1,-1/2\rangle + (\sqrt{3}/2)\,\|1/2,0,-1/2\rangle,$$

$$|1/2,0,1/2\rangle = |+\rangle|0,0\rangle = \sqrt{1/2}\{|+\rangle|+\rangle|-\rangle - |+\rangle|-\rangle|+\rangle\}$$

$$= (\sqrt{3}/2)\,\|1/2,1,1/2\rangle - (1/2)\,\|1/2,0,1/2\rangle,$$

$$|1/2,0,-1/2\rangle = |-\rangle|0,0\rangle = \sqrt{1/2}\{|-\rangle|+\rangle|-\rangle - |-\rangle|-\rangle|+\rangle\}$$

$$= (\sqrt{3}/2)\,\|1/2,1,-1/2\rangle - (1/2)\,\|1/2,0,-1/2\rangle.$$

23. 计算表示矩阵元素 $D^j_{\nu\mu}(\alpha,\beta,\gamma)$满足的微分方程.

解 表示矩阵元素 $D^j_{\nu\mu}(\alpha,\beta,\gamma)$是算符 $O_{R(\alpha,\beta,\gamma)}$ 在角动量本征状态中的矩阵元素. 用狄拉克符号，有

$$D^j_{\nu\mu}(\alpha,\beta,\gamma) = \langle j,\nu \mid O_{R(\alpha,\beta,\gamma)} \mid j,\mu\rangle.$$

用简写符号，

$$R = R(\alpha,\beta,\gamma) = R_1R_2R_3, \qquad R_1 = R(\boldsymbol{e}_3,\alpha),$$

$$R_2 = R(\boldsymbol{e}_2,\beta), \qquad R_3 = R(\boldsymbol{e}_3,\gamma).$$

相应地，算符 $O_{R(\alpha,\beta,\gamma)}$ 可用角动量算符 J_a 表出.

$$O_{R(\alpha,\beta,\gamma)} = O_R = e^{-iJ_3\alpha}e^{-iJ_2\beta}e^{-iJ_3\gamma} = O_{R_1}O_{R_2}O_{R_3}.$$

J_a 是矢量算符，满足转动变换关系：

$$O_RJ_aO_R^{-1} = \sum_{b=1}^{3} J_bR_{ba}.$$

采用简化符号，$s_\alpha = \sin\alpha$，$c_\alpha = \cos\alpha$ 等. 有

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\alpha}O_R = J_3 O_R,$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\beta}O_R = O_{R_1}J_2 O_{R_1}^{-1}O_R = \{-s_\alpha J_1 + c_\alpha J_2\}O_R,$$

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\gamma}O_R = O_{R_1}O_{R_2}J_3 O_{R_2}^{-1}O_{R_1}^{-1}O_R$$

$$= \{s_\beta c_\alpha J_1 + s_\beta s_\alpha J_2 + c_\beta J_3\}O_R.$$

解得

$$J_1 O_R = \mathrm{i}\left\{-s_\alpha\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{c_\alpha}{s_\beta}\frac{\partial}{\partial\gamma} - \frac{c_\alpha c_\beta}{s_\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right\}O_R,$$

$$J_2 O_R = \mathrm{i}\left\{c_\alpha\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{s_\alpha}{s_\beta}\frac{\partial}{\partial\gamma} - \frac{s_\alpha c_\beta}{s_\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right\}O_R,$$

$$J_3 O_R = \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\alpha}O_R,$$

$$J_\pm O_R = (J_1 \pm \mathrm{i}J_2)O_R = \mathrm{i}e^{\pm\mathrm{i}\alpha}\left\{\pm\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{s_\beta}\frac{\partial}{\partial\gamma} - \frac{c_\beta}{s_\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right\}O_R.$$

由此可算出

$$J_- J_+ O_R = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}\alpha}\left\{\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{s_\beta}\frac{\partial}{\partial\gamma} - \frac{c_\beta}{s_\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right\}J_- O_R$$

$$= \left\{-\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \frac{c_\beta}{s_\beta}\frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{1}{s_\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2} + \frac{2c_\beta}{s_\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\gamma} - \frac{c_\beta^2}{s_\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right\}O_R.$$

最后得

$$J^2 O_R = (J_3^2 + J_3 + J_- J_+)O_R$$

$$= \left\{-\frac{1}{s_\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}s_\beta\frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{1}{s_\beta^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2} + \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right) + \frac{2c_\beta}{s_\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\gamma}\right\}O_R.$$

在角动量本征状态$\langle j,\nu|$和$|j,\mu\rangle$中取矩阵元，可得$D^j_{\nu\mu}(\alpha,\beta,\gamma)$所满足的运动方程：

$$\left\{-\frac{1}{s_\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}s_\beta\frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{1}{s_\beta^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2} + \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right) + \frac{2c_\beta}{s_\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\gamma}\right\}D^j_{\nu\mu}(\alpha,\beta,\gamma)$$

$$= j(j+1)D^j_{\nu\mu}(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$\left\{\frac{1}{s_\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}s_\beta\frac{\partial}{\partial\beta}-\frac{\nu^2+\mu^2-2\nu\mu\, c_\beta}{s_\beta^2}\right\}d^j_{\nu\mu}(\beta)=-j(j+1)d^j_{\nu\mu}(\beta)\ .$$

五、SO(3)群和 SO(2,1)群所有不可约幺正表示

★ SO(3)群和 SO(2,1)群的生成元

满足下式的行列式为 +1 的三维实矩阵的集合，按照矩阵乘积，在 $\sigma=1$ 时构成 SO(3)群，在 $\sigma=-1$ 时构成 SO(2,1)群

$$R^{\mathrm T}ER=E,\qquad E=\mathrm{diag}\{1,1,\sigma\}. \tag{4.28}$$

它们保持如下定义的内积不变：

$$\langle x,y\rangle=\sum_{a,b=1}^{3}x_aE_{ab}y_b. \tag{4.29}$$

由(4.28)式得 $R_{33}^2=1-\sigma\ (R_{13}^2+R_{23}^2)$，SO(3)群是紧致的简单李群，而 SO(2,1)群是非紧致的混合李群，限制 $R_{33}\geqslant 1$ 后，得非紧致的简单李群，记作 $SO_+(2,1)$，在不会引起混淆时仍用同一符号 SO(2,1)标记. 由恒元附近元素的展开式

$$R=1-\mathrm i\alpha X,\qquad R^{\mathrm T}ER=E-\mathrm i\alpha\,\{X^{\mathrm T}E+EX\},\qquad \det R=1-\mathrm i\,\alpha\ \mathrm{tr}\ T,$$

得

$$\mathrm{tr}\ T=0,\quad T=-ET^{\mathrm T}E=\sum_{a=1}^{3}\omega_aT_a.$$

三个生成元记作 L_a，它们在自身表示中取矩阵形式 T_a

$$T_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\mathrm i\sigma\\0&\mathrm i&0\end{pmatrix},\quad T_2=\begin{pmatrix}0&0&\mathrm i\sigma\\0&0&0\\-\mathrm i&0&0\end{pmatrix},\quad T_3=\begin{pmatrix}0&-\mathrm i&0\\\mathrm i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

由此得生成元满足的对易关系

$$[L_1,L_2]=\mathrm i\sigma L_3,\quad [L_2,L_3]=\mathrm i\,L_1,\quad [L_3,L_1]=\mathrm i\,L_2,$$

引入升降算符

$$L_\pm=L_1\pm\mathrm i\,L_2,\quad [L_3,L_\pm]=\pm L_\pm,\quad [L_+,L_-]=2\sigma L_3. \tag{4.30}$$

开西米尔(Casimir)算符为

$$\begin{aligned}L^2&=\sigma\,(L_1^2+L_2^2)+L_3^2=\sigma L_+L_-+L_3(L_3-1)\\&=\sigma L_-L_+-L_3(L_3+1),\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$[L^2, L_a] = 0, \qquad a = 1,2,3.$$

★　SO(2,1)群的覆盖群

我们知道 SO(3)群的覆盖群是 SU(2)群. 采用类似方法可以证明 SO(2,1)群的覆盖群是 SL(2,R)群，即由所有行列式为 +1 的二维实矩阵的集合，在矩阵乘积下构成的群. 二维无迹实矩阵有三个独立实参数，基可取为 σ_3、σ_1 和 $\mathrm{i}\sigma_2$，定义与位置矢量 $x=(x_1,x_2,x_3)$一一对应的二维无迹实矩阵 X：

$$X = x_1\sigma_3 + x_2\sigma_1 + x_3\mathrm{i}\sigma_2, \quad \det X = -(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2),$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(X\sigma_3) \quad x_2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(X\sigma_1), \quad x_3 = \frac{-\mathrm{i}}{2}\mathrm{tr}(X\sigma_2).$$

做相似变换 $uXu^{-1} = X'$. $u \in SL(2,R)$，则 X'仍是无迹实矩阵，且行列式保持不变，因而它所对应的矢量 $\boldsymbol{X}'$与X 所对应的矢量$\boldsymbol{X}$，可通过 $R \in$SO(2,1)变换相联系. 与 SO(3)群的覆盖群证法相类似，可得互差符号的两个 SL(2,R)矩阵 $\pm u$ 与 SO(2,1)群元素 R 存在二一对应关系，这对应关系对群元素乘积保持不变，因此 SL(2,R)群是 SO(2,1)群的覆盖群. 下面我们讨论的 SO(3)群和 SO(2,1)群的表示包括双值表示，实际是讨论 SU(2)群和 SL(2,R)群的表示.

24.　试讨论 SO(3)群和 SO(2,1)群的所有不等价不可约幺正表示.

解　取 L^2和 L_3 对角化的表象，状态基记作$|Q,m\rangle$，满足

$$L^2|Q,m\rangle = Q|Q,m\rangle, \quad L_3|Q,m\rangle = m|Q,m\rangle. \tag{4.32}$$

在幺正表示中，L_3 和 L^2的表示矩阵都是厄米矩阵，因此 Q 和m 都是实数. 为方便起见，令

$$Q = j(j+1). \tag{4.33}$$

解得

$$j = -(1/2) \pm \sqrt{Q + 1/4},$$

两个解通过下面变换相联系

$$j \to -j-1, \tag{4.34}$$

注意，描写不可约表示的参数是 Q，由同一个 Q 解得的两个不同的j 描写同一个不可约表示. 当 $Q \geqslant -1/4$ 时，j 取实数，而 $Q < -1/4$ 时，j 取复数.

由对易关系(4.30)和(4.31)式得

$$L_3(L_\pm|Q,m\rangle) = (m\pm 1)(L_\pm|Q,m\rangle),$$

$$L^2(L_\pm|Q,m\rangle) = Q(L_\pm|Q,m\rangle),$$

因此，从一个给定的基$|Q,m_0\rangle$出发，通过升降算符$L_\pm$的作用，可以得到 m 值递差±1 的一系列的基

$$\begin{aligned} L_+|Q,m-1\rangle &= A_{Qm}|Q,m\rangle, \qquad m > m_0, \\ L_-|Q,m\rangle &= B_{Qm}|Q,m-1\rangle, \qquad m \leqslant m_0, \end{aligned} \tag{4.35}$$

直至 A_{Qm} 或B_{Qm}等于零为止. (4.35)式是这些基的定义，它们都是 L^2和 L_3 的共同本征状态，满足(4.32)式. 现在要证明它们关于 $L_\pm$是封闭的，即有

$$\begin{aligned} L_-|Q,m\rangle &= B_{Qm}|Q,m-1\rangle, \qquad m > m_0, \\ L_+|Q,m-1\rangle &= A_{Qm}|Q,m\rangle, \qquad m \leqslant m_0. \end{aligned} \tag{4.36}$$

证明很简单. 例如对(4.36)式的第一式，在 $m>m_0$ 时，有

$$\begin{aligned} L^2|Q,m-1\rangle &= \{\sigma L_- L_+ + L_3(L_3+1)\}|Q,m-1\rangle \\ &= \sigma A_{Qm}(L_-|Q,m\rangle) + (m^2-m)|Q,m-1\rangle \\ &= Q|Q,m-1\rangle \end{aligned} \tag{4.37}$$

只要 A_{Qm}不为零，即$|Q,m\rangle$有定义，(4.36)式就成立. 因此，这一系列的基构成一组完备基，架设关于 SO(3)群或 SO(2,1)群不变的不可约表示空间. 注意，由(4.35)式定义的状态$|Q,m\rangle$，前面还允许乘一个任意非零因子，从而改变 A_{Qm}和 B_{Qm}的取值. 另一方面，状态$|Q,m\rangle$又是算符 L_+L_-和 L_-L_+的本征状态，本征值分别是 $A_{Qm}B_{Qm}$和$A_{Q(m+1)}B_{Q(m+1)}$. 在幺正表示中，L_+和 L_-的表示矩阵互为共轭矩阵，L_+L_-和 L_-L_+对应的矩阵都是半正定的. 由(4.37)式，在 $m>m_0$ 时有

$$A_{Qm}B_{Qm} = \sigma(Q-m^2+m) = \sigma(j+m)(j-m+1) \geqslant 0. \tag{4.38}$$

同样可证它对 $m \leqslant m_0$ 也成立. 为讨论方便起见，选择状态$|Q,m\rangle$前面的因子，使

$$A_{Qm} = B_{Qm} = [\sigma(j+m)(j-m+1)]^{1/2} \geqslant 0. \tag{4.39}$$

根据状态链是否截断，也就是根据 A_{Qm}(即 B_{Qm})是否会在某 m 值等于零，SO(3)群和SO(2,1)群的不可约表示分成无界谱(unbounded spectrum)的表示 $D(Q,m_0)$，有下界谱(spectrum bounded below)的表示 $D^+(j)$，有上界谱(spectrum bounded above)的表示 $D^-(j)$，和有界谱(bounded spectrum)的表示 $D(j)$.

对 SO(3)群，$\sigma = 1$，而对 SO(2,1)群，$\sigma = -1$. 根据 σ 的不同取值，由(4.38)式，两个群的参数 j 和 m 的允许取值范围是不同的. 对 SO(3)群，$Q \geqslant m^2 - m \geqslant -1/4$，$j$ 取实数，j 和 m 的取值范围在两条相交的直线 $j + m = 0$ 和 $j - m + 1 = 0$ 的上面或下面，同时又在两条相交的直线 $j - m = 0$ 和 $j + m + 1 = 0$ 的上面或下面，这两个区域的交正是图 4.2 中用 SO(3)标出的上下两块无限区域. 由变换(4.34)，我们只需讨论上面一块区域：$-j \leqslant m \leqslant j$，且 $j \geqslant 0$，即 m 的变化

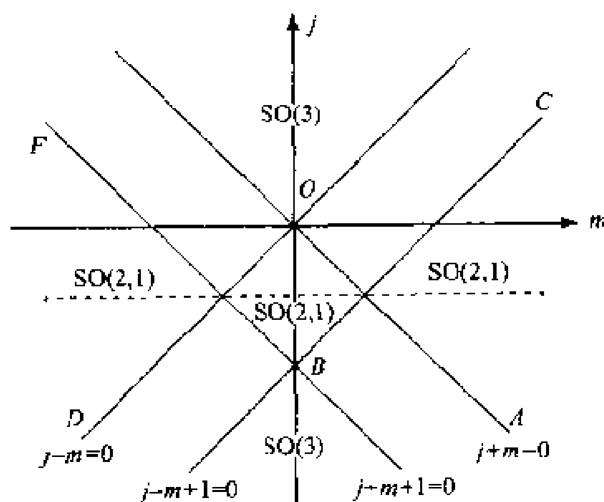


图 4.2 SO(3)群和 SO(2,1)群不可约幺正表示的参数 j 和 m 的允许变化区域

区域是有界的. 设上界为 $m = M$，则有

$$A_{Q(M+1)} = [(j + M + 1)(j - M)]^{1/2} = 0,$$

得 $M = j \geqslant 0$. 设下界为 $m = j - k$，这里和本题后面部分都规定 k 为非负整数，则有

$$B_{Q(j,\ k)} = [(2j - k)(k + 1)]^{1/2} = 0,$$

得 $j = k/2 = 0,\ 1/2,\ 1,\ 3/2, \cdots$. SO(3)群只有有界谱幺正表示 $D(j)$，$m = j,\ j - 1, \cdots,\ -j$，即常用的有限维表示 D^j(SO(3)).

对 SO(2,1)群，j 既可取实数，也可取复数. 当 j 取复数 $j = -1/2 + \mathrm{i}\beta$，$\beta > 0$ 时，有

$$Q = -1/4 - \beta^2, \qquad m = m_0 \pm k, \qquad -1/2 < m_0 \leqslant 1/2. \tag{4.40}$$

这称为无界谱主系列(principal series)的表示 $D_b(\beta, m_0)$.

当 j 取实数时，j 和 m 的取值范围在两条相交的直线 $j + m = 0$ 和 $j - m + 1$

$=0$ 的左面或右面，同时又在两条相交的直线 $j-m=0$ 和 $j+m-1=0$ 的左面或右面，这两个区域的交正是图 4.2 中用 SO(2,1)标出的左右两块无限区域和中间一块有限区域. 考虑到等价变换(4.34)，SO(2,1)群有如下几类表示. 首先，如果 m 的取值使 $A_{Qm}(B_{Qm})$ 总不为零，则为了中间不断掉，必须 $-1/4\leqslant Q<0$，即有无界谱辅助系列(supplementary series)的表示 $D_s(Q,m_0)$：

$$-1/2\leqslant j<0,\quad m=m_0\pm k,\quad |m_0|<-j=1/2-(Q+1/4)^{1/2}.\tag{4.41}$$

其次是 $Q=j=m=0$，这是恒等表示. 第三是有下界谱的表示 $D^+(j)$，下界只能在图中 AO 线(或等价的 CB 线)上. 因为 $j<0$ 和 $m>0$，所以在下界 m_0 处必须有 $m_0=-j$：

$$j<0,\qquad m=-j+k.$$

最后是有上界谱的表示 $D^-(j)$，上界只能在图中 DO 线(或等价的 FB 线)上. 因为 $j<0$ 和 $m<0$，所以在上界 m_0 处必须有 $m_0=j$：

$$j<0,\qquad m=j-k.$$

SO(2,1)群的幺正表示，除了恒等表示外，都是无穷维表示.

第五章 晶体的对称性

一、点群及其循环子群的生成元

★ 晶体的基本特征是组成晶体的原子有空间周期性排列，引入周期性边界条件后，晶体存在平移不变性，

$$\boldsymbol{r} \rightarrow T(\boldsymbol{l})\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{l},$$

其中 $\boldsymbol{l}$ 称为晶格矢量. 通常取晶体的最小平移周期为晶格基矢 $\boldsymbol{a}_j$，晶格矢量可表为晶格基矢的整数线性组合. 这样的晶格基矢称为原始的. 在某些情况下（需特别声明），为了处理问题的特殊需要，也可选用非原始的晶格基矢，即允许某些晶格矢量表为晶格基矢 $\boldsymbol{a}_j$ 的特定的非整数线性组合. 平移变换的乘积，相应平移矢量相加，它们的集合构成阿贝尔的平移群 $\mathscr{T}$.

★ 通常晶体还有平移变换以外的其他对称变换. 一般的晶体对称操作由空间转动，反演和平动组成，用符号 $g(R,\boldsymbol{\alpha})$ 标记，其中 R 是固有转动或非固有转动，$R \in O(3)$：

$$g(R,\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{r} = R\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\alpha}, \tag{5.1}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 不一定能表为晶格基矢的整数线性组合，但常把 $\boldsymbol{\alpha}$ 中包含的晶格矢量 $\boldsymbol{l}$ 部分提出来，表为

$$g(R,\boldsymbol{\alpha}) = T(\boldsymbol{l})g(R,\boldsymbol{t}), \qquad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{l} + \boldsymbol{t}$$

$$\boldsymbol{t} = \sum_{j=1}^{3} \boldsymbol{a}_j t_j, \qquad 0 \leqslant t_j < 1. \tag{5.2}$$

当 $R = E$ 时，$g(E,\boldsymbol{\alpha})$ 变成纯粹的平移变换 $T(\boldsymbol{\alpha})$，此时 $\boldsymbol{\alpha}$ 必须取晶格矢量 $\boldsymbol{l}$.

根据定义(5.1)，两个对称操作的乘积满足

$$g(R,\boldsymbol{\alpha})g(R',\boldsymbol{\beta}) = g(RR',\boldsymbol{\alpha} + R\boldsymbol{\beta}). \tag{5.3}$$

因此，$g(R,\boldsymbol{\alpha})^{-1} = g(R^{-1}, -R^{-1}\boldsymbol{\alpha})$. 晶体对称操作 $g(R,\boldsymbol{\alpha})$ 的集合，按照(5.3)式给出的乘积规则，构成群，称为晶体的空间群 $\mathscr{S}$. 由(5.3)式可看出，晶体对称操作相乘时，转动部分 R 的乘积不受平移部分 $\boldsymbol{\alpha}$ 的影响. R 的集合，按照转动的乘积，也构成群，称为晶体的点群 G. 由(5.3)式容易证明，对给定的晶体，对称操作 $g(R,\boldsymbol{t})$ 中，与 R 相对应的 $\boldsymbol{t}$ 是惟一确定的，当 $\boldsymbol{t}$ 不等于零时，R 不是

晶体的对称操作，因此点群一般不是空间群 $\mathscr{S}$ 的子群．如果点群 G 是空间群 $\mathscr{S}$ 的子群，即所有对应 R 的平移矢量 $\boldsymbol{t}$ 都为零，这样的空间群称为简单空间群．由(5.3)式

$$g(R,\boldsymbol{\alpha})T(\boldsymbol{l})g(R,\boldsymbol{\alpha})^{-1} = T(R\boldsymbol{l}). \tag{5.4}$$

这说明，平移子群 $\mathscr{T}$ 是空间群 $\mathscr{S}$ 的不变子群，而(5.2)式又表明陪集完全由 R 确定，平移子群 $\mathscr{T}$ 关于空间群 $\mathscr{S}$ 的商群是点群 G．(5.4)式还指出，作为晶体的点群元素 R 和晶格矢量 $\boldsymbol{l}$ 必须满足条件

$$R\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}'. \tag{5.5}$$

这是限制晶体可能包含的点群、晶系和布拉维(Bravais)格子的基础．

★　在晶体理论中常取晶格基矢 $\boldsymbol{a}_j$ 为基，由(5.5)式可知，点群元素 R 在此基中的矩阵元 R_{ij} 都是整数：

$$R\boldsymbol{a}_j = \sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{a}_i R_{ij}.$$

取倒晶格基矢 $\boldsymbol{b}_j$，满足

$$\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta_{ij}. \tag{5.6}$$

由此两式，可把点群元素 R 用并矢形式表出：

$$\boldsymbol{R} = \sum_{ij} R_{ij}\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{b}_j. \tag{5.7}$$

1.　在直角坐标系中，写出沿 z 轴方向的6次固有和非固有转动轴生成元的并矢形式和矩阵形式．

解　沿 z 轴方向的6次固有转动 C_6 和非固有转动 S_6 只相差空间反演，因此它们的并矢和矩阵形式都只差负号．

$$\boldsymbol{C}_6 = -\boldsymbol{S}_6 = \left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_2\right\}\boldsymbol{e}_1 + \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2\right\}\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3,$$

$$C_6 = -S_6 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.　用直角坐标系的单位矢量 $\boldsymbol{e}_j$ 表出 T_d 群和 O_h 群的各固有和非固有转动轴的方

位，并用直角坐标单位矢量构成的并矢表出 O_h 群各固有转动轴生成元.

解　T_d 群是 O_h 群的子群，T_d 群包含四个固有三次轴，三个非固有四次轴和六个非固有二次轴，而对 O_h 群来说，这些轴都同时是固有和非固有轴.

三次轴方向和生成元的并矢为

沿 $\sqrt{1/3}\{e_1+e_2+e_3\}$ 方向，$\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3$,

沿 $\sqrt{1/3}\{e_1-e_2-e_3\}$ 方向，$\boldsymbol{R}_2=-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3$,

沿 $\sqrt{1/3}\{-e_1-e_2+e_3\}$ 方向，$\boldsymbol{R}_3=\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3$,

沿 $\sqrt{1/3}\{-e_1+e_2-e_3\}$ 方向，$\boldsymbol{R}_4=-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3$.

四次轴沿坐标轴方向，生成元的并矢为

沿 $\boldsymbol{e}_1$ 方向，$\boldsymbol{T}_1=\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$,

沿 $\boldsymbol{e}_2$ 方向，$\boldsymbol{T}_2=-\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3$,

沿 $\boldsymbol{e}_3$ 方向，$\boldsymbol{T}_3=\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$.

二次轴的方向和生成元的并矢为

沿 $\sqrt{1/2}\{e_1+e_2\}$ 方向，$\boldsymbol{S}_1=\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$,

沿 $\sqrt{1/2}\{e_1-e_2\}$ 方向，$\boldsymbol{S}_2=-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3$,

沿 $\sqrt{1/2}\{e_2+e_3\}$ 方向，$\boldsymbol{S}_3=-\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$,

沿 $\sqrt{1/2}\{e_2-e_3\}$ 方向，$\boldsymbol{S}_4=-\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$,

沿 $\sqrt{1/2}\{e_1+e_3\}$ 方向，$\boldsymbol{S}_5=\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3$,

沿 $\sqrt{1/2}\{e_1-e_3\}$ 方向，$\boldsymbol{S}_4=-\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3$.

3. 设 $R(\hat{n},\omega)$ 是绕 $\hat{n}$ 方向转动 ω 角的变换，试用恒等变换的并矢 **1** 和 $\hat{n}$ 表出 $R(\hat{n},\omega)$ 的并矢形式.

解　设 $\hat{\boldsymbol{m}}$ 是垂直转轴 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 的一个给定方向单位矢量，则 $\hat{\boldsymbol{n}}\times\hat{\boldsymbol{m}}$ 是与 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{m}}$ 垂直的第三个方向单位矢量. 要求 $\boldsymbol{R}(\hat{\boldsymbol{n}},\omega)$ 作用在此三个矢量上得

$$\boldsymbol{R}(\hat{n},\omega)\cdot\hat{n}=\hat{n},$$

$$\boldsymbol{R}(\hat{n},\omega)\cdot\hat{m}=\hat{m}\cos\omega+\hat{n}\times\hat{m}\sin\omega,$$

$$\boldsymbol{R}(\hat{n},\ \omega)\cdot(\hat{n}\times\hat{m}) = -\hat{m}\sin\omega + \hat{n}\times\hat{m}\cos\omega.$$

分别引入沿转轴及其垂直方向的投影算符 $\hat{n}\hat{n}$ 和 $\mathbf{1}-\hat{n}\hat{n}$，再注意

$$(\mathbf{1}\times\hat{n})\cdot\hat{m} = \hat{n}\times\hat{m},$$

$$(\mathbf{1}\times\hat{n})\cdot(\hat{n}\times\hat{m}) = \hat{n}\times(\hat{n}\times\hat{m}) = -\hat{m}.$$

可得

$$\boldsymbol{R}(\hat{n},\ \omega) = \hat{n}\,\hat{n} + (\mathbf{1}-\hat{n}\,\hat{n})\cos\omega + (\mathbf{1}\times\hat{n})\sin\omega.$$

二、空间群和对称元

★　对给定的晶体对称变换 $g(R,\boldsymbol{t})$，如果它的幂次不会等于恒等变换 E，则称为开变换，否则称为封闭变换．有两类开变换．一个开变换是 $g(C_N,\boldsymbol{t})$，$N\neq1$，其中 $\boldsymbol{t}$ 沿转轴方向 $\hat{n}$ 的分量 $\boldsymbol{t}_{\parallel}$ 不为零，此时有螺旋轴，它通过 $\boldsymbol{r}_0$ 点，平行于 $\hat{n}$ 方向，$\boldsymbol{r}_0$ 满足方程

$$(E-C_N)\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_{\parallel} = \boldsymbol{t}_{\perp},$$

$\boldsymbol{t}_{\parallel}$ 就是沿轴的滑移矢量．由于群的性质，滑移矢量 $\boldsymbol{t}_{\parallel}$ 只能是该方向最小晶格矢量 N 分子之一的整数倍．另一个开变换是 $g(S_2,\boldsymbol{t})$，其中 $\boldsymbol{t}$ 沿垂直转轴方向 $\hat{n}$ 的分量 $\boldsymbol{t}_{\perp}$ 不为零，即沿反射平面的分量不为零，此时有滑移平面，它通过 $\boldsymbol{r}_0$ 点，垂直于 $\hat{n}$ 方向，$\boldsymbol{r}_0$ 满足方程

$$(E-C_N)\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_{\perp} = \boldsymbol{t}_{\parallel},$$

$\boldsymbol{t}_{\perp}$ 就是在平面上的滑移矢量．由于群的性质，滑移矢量 $\boldsymbol{t}_{\perp}$ 只能是该方向最小晶格矢量的一半．封闭变换存在对称中心 $\boldsymbol{r}_0$，满足

$$(E-R)\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{t},$$

当 R 是固有转动 $C_N(N\neq1)$ 时，$\boldsymbol{t}$ 垂直转轴方向，通过 $\boldsymbol{r}_0$ 平行于转轴 $\hat{n}$ 方向的直线是对称直线．当 R 是平面反射 S_2 时，$\boldsymbol{t}$ 平行于转轴方向，即垂直反射平面，通过 $\boldsymbol{r}_0$ 垂直于转轴 $\hat{n}$ 的平面是对称平面．封闭变换的对称直线或对称平面上的点都是对称中心．当 R 是其他非固有转动 S_N，$N\neq2$，时，只有对称中心．

★　根据空间群国际符号分析晶体的对称性质时，必须了解各种晶系中晶格基矢的选择规则．晶格基矢用符号 $\boldsymbol{a}_j$ 标记，它们可能是非原始的，长度分别记为 a_j，$\boldsymbol{a}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_2$ 的夹角记作 α_3，以此类推．要求 $\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{a}_2$ 沿 $\boldsymbol{a}_3$ 正向．晶格基矢的选择规则如下．

(1) 三斜晶系，点群有 $C_1(1)$和 $C_i(\bar{1})$.

取不在同一平面的三个晶格矢量作为晶格基矢，要求它们是原始的. 晶格基矢的长度和夹角没有限制.

(2) 单斜晶系，点群有 $C_2(2)$, $C_s(\bar{2})$和 $C_{2h}(\pm 2)$.

沿二次轴方向的最短晶格矢量为 $\boldsymbol{a}_3$，在垂直平面内取两个不共线的最小晶格矢量分别为 $\boldsymbol{a}_1$和 $\boldsymbol{a}_2$. 所谓在平面上最小的晶格矢量指在平面上是原始的晶格矢量，即在平面上的任何晶格矢量都可表为它们的整数线性组合. 晶格基矢的限制为 $\alpha_1=\alpha_2=\pi/2$.

(3) 正交晶系，点群有 $D_2(22')$, $C_{2v}(2\bar{2}')$和 $D_{2h}(\pm 22')$.

沿一个二次轴方向的最短晶格矢量为 $\boldsymbol{a}_3$，在垂直平面内沿另两个二次轴方向的最短晶格矢量分别为 $\boldsymbol{a}_1$和 $\boldsymbol{a}_2$. 晶格基矢的限制为 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\pi/2$.

(4) 六方晶系，点群有 $C_3(3)$, $C_{3i}(\bar{3})$, $D_3(32')$, $C_{3v}(3\bar{2}')$, $D_{3d}(\bar{3}2')$, $C_6(6)$, $C_{3h}(\bar{6})$, $C_{6h}(\pm 6)$, $D_6(62')$, $C_{6v}(6\bar{2}')$, $D_{3h}(\bar{6}2')$和 $D_{6h}(\pm 62')$.

沿三次轴或六次轴方向的最短晶格矢量为 $\boldsymbol{a}_3$，在垂直平面内，取一长度最短的晶格矢量作为 $\boldsymbol{a}_1$. $\boldsymbol{a}_1$绕主轴转动 $2\pi/3$ 角后得 $\boldsymbol{a}_2$. 晶格基矢的限制为 $\alpha_1=\alpha_2=\pi/2$, $\alpha_3=2\pi/3$, $a_1=a_2$. 对 D_3, C_{3v}和 D_{3d}群情况，如果 $\boldsymbol{a}_1$沿固有或非固有二次轴方向，则二次轴符号用一撇标记，如果 $\boldsymbol{a}_1$沿两个二次轴的角平分线方向，则二次轴符号用两撇标记. 对 D_{3h}群，按照 $\boldsymbol{a}_1$沿固有或非固有二次轴方向，把空间群记作 $\bar{6}2'$或 $\bar{6}2''$.

(5) 菱方晶系，点群有 $C_3(3)$, $C_{3i}(\bar{3})$, $D_3(32')$, $C_{3v}(3\bar{2}')$和 $D_{3d}(\bar{3}2')$.

三个晶格基矢环绕三次轴对称分布，与三次轴夹以相同的锐角，三个晶格基矢之和等于沿三次轴方向的最短晶格矢量. 晶格基矢的限制为 $a_1=a_2=a_3$和 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3$. 对 D_3, C_{3v}和 D_{3d}群，晶格基矢在垂直三次轴平面上的投影处于两二次轴的角平分线方向.

(6) 四方晶系，点群有 $C_4(4)$, $S_4(\bar{4})$, $C_{4h}(\pm 4)$, $D_4(42')$, $C_{4v}(4\bar{2}')$, $D_{2d}(\bar{4}2')$和 $D_{4h}(\pm 42')$.

沿四次轴方向的最短晶格矢量为 $\boldsymbol{a}_3$，在垂直平面内取一长度最短的晶格矢量为 $\boldsymbol{a}_1$，绕主轴转动 $\pi/2$ 角后得 $\boldsymbol{a}_2$，因此 $a_1=a_2$和 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\pi/2$. 对 D_{2d}群，按照 $\boldsymbol{a}_1$沿固有或非固有二次轴方向，把空间群记作 $\bar{4}2'$或 $\bar{4}2''$.

(7) 立方晶系，点群有 $T(3'22')$, $T_h(\bar{3}'22')$, $O(3'42'')$, $T_d(3'\overline{42}'')$和 $O_h(\bar{3}'42'')$.

沿三个互相垂直的二次轴(对 T 和 T_h群)或四次轴(对 O, T_d和 O_h群)方向，取最短的晶格矢量，按右手螺旋方向，选作三个晶格基矢，它们长度相等，互相垂直，$a_1=a_2=a_3$和 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\pi/2$.

上面所选的晶格基矢有时是非原始的，即晶格矢量除可表为晶格基矢的整数线性组合 $\boldsymbol{l}$ 外，根据不同的布拉维格子，还允许表为晶格基矢的某些分数线性组合 $\boldsymbol{f}$ 作为补充，它们是：

$$
\begin{aligned}
&\text{P型格子：} && \boldsymbol{f} = 0, \\
&\text{R型格子：} && \boldsymbol{f} = 0, \\
&\text{A型格子：} && \boldsymbol{f} = (\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3)/2, \\
&\text{B型格子：} && \boldsymbol{f} = (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3)/2, \\
&\text{C型格子：} && \boldsymbol{f} = (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)/2, \\
&\text{I型格子：} && \boldsymbol{f} = (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3)/2, \\
&\text{F型格子：} && \text{同时包含 A、B、C 格子的三个} \boldsymbol{f}.
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

4. 设 R 是绕 $\hat{n} = (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)/\sqrt{2}$ 方向转动 $2\pi/3$ 角的变换，试找出 $g(R, \boldsymbol{t})$ 的对称直线位置，其中(1) $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{e}_3$，(2) $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$. 如果它是螺旋轴，请指出沿轴向的滑移矢量. 请通过坐标原点的平移，把 g 化为标准形式以检验此结论.

解　设 $R = R(\hat{n}, 2\pi/3)$ 和 $\hat{n} = (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)/\sqrt{2}$，在直角坐标系中写出 R 的并矢形式

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R} = & \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)(\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) + \frac{1}{4}(-\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 - \sqrt{6}\boldsymbol{e}_3)(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) \\
& + \frac{1}{4}\{\sqrt{6}(\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) - 2\boldsymbol{e}_3\}\boldsymbol{e}_3 \\
= & \frac{1}{4}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \frac{3}{4}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 - \frac{\sqrt{6}}{4}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_1 + \frac{3}{4}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{4}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 + \frac{\sqrt{6}}{4}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2 \\
& + \frac{\sqrt{6}}{4}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3 - \frac{\sqrt{6}}{4}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3 - \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3.
\end{aligned}
$$

(1) $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t}_{\perp} = \boldsymbol{e}_3$，因此 $g(R, \boldsymbol{t})$ 有对称直线，它是通过点 $\boldsymbol{r}_0$ 与 $\hat{n}$ 方向平行的直线，对称直线上的点都是对称中心，其中 $\boldsymbol{r}_0$ 满足

$$
g(R, \boldsymbol{t})\boldsymbol{r}_0 = R\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{t} = \boldsymbol{r}_0.
$$

在直角坐标系中取分量，得

$$
(1/4)r_{01} + (3/4)r_{02} + (\sqrt{6}/4)r_{03} = r_{01},
$$

$$(3/4)r_{01} + (1/4)r_{02} - (\sqrt{6}/4)r_{03} = r_{02},$$

$$-(\sqrt{6}/4)r_{01} + (\sqrt{6}/4)r_{02} - (1/2)r_{03} + 1 = r_{03}.$$

可取 $r_{02}=0$，解得 $r_{01}=\sqrt{1/6}$和 $r_{03}=1/2$. 把原点平移到 $\boldsymbol{r}_0$点，$g(R,\boldsymbol{t})$变成 g'

$$g' = T(-\boldsymbol{r}_0)g(R,\boldsymbol{t})T(\boldsymbol{r}_0) = g(R, -\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{t} + R\boldsymbol{r}_0) = R.$$

(2) $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3$，因此

$$\boldsymbol{t}_\perp = (\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2)/2 + \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{t}_\parallel = (\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2)/2,$$

$g(R,\boldsymbol{t})$有螺旋轴，它是通过点 $\boldsymbol{r}_0$，与 $\boldsymbol{n}$ 方向平行的直线，滑移矢量是 $\boldsymbol{t}_\parallel$，其中 $\boldsymbol{r}_0$满足

$$g(R,\boldsymbol{t}_\perp)\boldsymbol{r}_0 = R\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{t}_\perp = \boldsymbol{r}_0.$$

在直角坐标系中取分量，得

$$(1/4)r_{01} + (3/4)r_{02} + (\sqrt{6}/4)r_{03} + 1/2 = r_{01},$$

$$(3/4)r_{01} + (1/4)r_{02} - (\sqrt{6}/4)r_{03} - 1/2 = r_{02},$$

$$-(\sqrt{6}/4)r_{01} + (\sqrt{6}/4)r_{02} - (1/2)r_{03} + 1 = r_{03}.$$

可取 $r_{02}=0$，解得 $r_{01}=1/2+\sqrt{1/6}$和 $r_{03}=(1-\sqrt{1/6})/2$. 把原点平移到 $\boldsymbol{r}_0$点后，$g(R,\boldsymbol{t})$变成 g'

$$g' = T(-\boldsymbol{r}_0)g(R,\boldsymbol{t})T(\boldsymbol{r}_0) = g(R, -\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{t} + R\boldsymbol{r}_0) = g(R,\boldsymbol{t}_\parallel).$$

5. 设 R 是对 xy 平面的反射变换，找出 $g(R,\boldsymbol{t})$的对称平面位置，其中(1) $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{e}_3$，(2) $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3$. 如果它是滑移平面，请指出沿平面的滑移矢量. 请通过坐标原点的平移，把 g 化为标准形式以检验此结论.

解 $R=\sigma R(\boldsymbol{e}_3,\pi)$，其中 σ 是空间反演. 在直角坐标系中 R 的并矢形式为

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_3.$$

(1) $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}_\perp=\boldsymbol{e}_3$，因此 $g(R,\boldsymbol{t})$有对称平面，它是通过点 $\boldsymbol{r}_0$，并与 z 轴垂直的平面，平面上的点都是对称中心，其中 $\boldsymbol{r}_0$满足

$$g(R,\boldsymbol{t})\boldsymbol{r}_0 = R\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{t} = \boldsymbol{r}_0.$$

可取 $\boldsymbol{r}_0$沿 z 轴，解得 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{e}_3/2$. 把原点平移到 $\boldsymbol{r}_0$点，$g(R,\boldsymbol{t})$变成 g'

$$g' = T(-\boldsymbol{r}_0)g(R,\boldsymbol{t})T(\boldsymbol{r}_0) = g(R, -\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{t} + R\boldsymbol{r}_0) = R.$$

(2) $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$，即 $\boldsymbol{t}_\parallel = \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{t}_\perp = \boldsymbol{e}_1$. $g(R,\boldsymbol{t})$有滑移平面，它是通过点 $\boldsymbol{r}_0$，并与 z 轴垂直的平面，滑移矢量是 $\boldsymbol{t}_\parallel = \boldsymbol{e}_1$，其中 $\boldsymbol{r}_0$满足

$$g(R,\boldsymbol{t}_\perp)\boldsymbol{r}_0 = R\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{t}_\perp = \boldsymbol{r}_0.$$

可取 $\boldsymbol{r}_0$沿 z 轴，解得 $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{e}_3/2$. 把原点平移到 $\boldsymbol{r}_0$点，$g(R,\boldsymbol{t})$变成 g'

$$g' = T(-\boldsymbol{r}_0)g(R,\boldsymbol{t})T(\boldsymbol{r}_0) = g(R, -\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{t} + R\boldsymbol{r}_0) = g(R,\boldsymbol{e}_1).$$

6. 试分析第 52 号$\left[\mathrm{D}_{2h}^6,\ P\perp 2\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}0\right)2'\left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right)\right]$，第 161 号$\left[\mathrm{C}_{3v}^6,\ R32'\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)\right]$和第 199 号$\left[\mathrm{T}^5,\ I3'2\left(\frac{1}{2}0\ \frac{1}{2}\right)2'\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}0\right)\right]$空间群的对称性质：指出 (1) 一般元素的表达式，(2) 三个晶格基矢的方向和相互间长度的关系，(3) 各生成元的对称直线或对称平面的方位，如有螺旋轴或滑移平面，请指出它们的滑移矢量，(4) 在一个晶胞内找出任意点 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_1x_1 + \boldsymbol{a}_2x_2 + \boldsymbol{a}_3x_3$的等价点位置.

解　下面分析这几个空间群的对称性质.

(1) 空间群 $\mathrm{D}_{2h}^6 = P\perp 2_{1/2,1/2,0}2'_{1/2,1/2,1/2}$，属正交晶系 P 型格子，晶格点群是 D_{2h}群，它包含三个互相垂直的二次轴，它们都同时是固有轴和非固有轴. 三个原始晶格基矢分别沿三个二次轴方向，因此互相垂直，但长度可能互不相等. 点群生成元的并矢形式为

$$\boldsymbol{S}_1 = -\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3,$$

$$\boldsymbol{C}_2 = -\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3,$$

$$\boldsymbol{C}'_2 = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3.$$

空间群元素的一般形式为

$$T(\boldsymbol{l})S_1^{n_1}g(C_2,(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)/2)^{n_2}g(C'_2,(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3)/2)^{n_3}.$$

其中 S_1是空间反演变换，原点就是空间反演变换的对称中心，n_1，n_2和 n_3分别取 0 或 1.

$g(C_2,\boldsymbol{q})$的平移矢量 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_\perp = (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)/2$，因此对称直线是通过点 $\boldsymbol{r}_0$、平行于 $\boldsymbol{a}_3$方向的直线，对称直线上的点都是对称中心. $\boldsymbol{r}_0$沿 $\boldsymbol{a}_3$的分量可取为零，沿 $\boldsymbol{a}_1$和 $\boldsymbol{a}_2$的分量记作 r_{01}和 r_{02}，它们满足下式：

$$0=(C_2-E)\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{q}=\{-2r_{01}+1/2\}\boldsymbol{a}_1+\{-2r_{02}+1/2\}\boldsymbol{a}_2.$$

解得 $r_{01}=r_{02}=1/4$. 从另一角度看，由于空间反演 S_1 是系统的对称变换，在 $\boldsymbol{a}_3$ 方向也有非固有二次轴. $S_1g(C_2,\boldsymbol{q})$有滑移平面，通过原点，垂直 $\boldsymbol{a}_3$ 方向，滑移矢量是 $\boldsymbol{q}$.

$g(C_2',\boldsymbol{p})$的平移矢量 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_{\parallel}+\boldsymbol{p}_{\perp}$,

$$\boldsymbol{p}_{\parallel}=\boldsymbol{a}_1/2,\qquad \boldsymbol{p}_{\perp}=(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)/2,$$

因此螺旋轴通过点 $\boldsymbol{r}_0'$，平行于 $\boldsymbol{a}_1$ 方向，滑移矢量为 $\boldsymbol{p}_{\parallel}$. $\boldsymbol{r}_0'$沿 $\boldsymbol{a}_1$ 方向的分量可取为零，沿 $\boldsymbol{a}_2$和 $\boldsymbol{a}_3$的分量记作 r'_{02}和 r'_{03}，它们满足下式:

$$0=(C_2'-E)\boldsymbol{r}_0'+\boldsymbol{p}_{\perp}=\{-2r_{02}+1/2\}\boldsymbol{a}_2+\{-2r_{03}+1/2\}\boldsymbol{a}_3.$$

解得 $r'_{02}=r'_{03}=1/4$. $\boldsymbol{a}_1$方向也有非固有二次轴. $S_1g(C_2',\boldsymbol{p})$有滑移平面，通过 $\boldsymbol{p}_{\parallel}/2=\boldsymbol{a}_1/4$ 点，垂直 $\boldsymbol{a}_1$方向，滑移矢量是 $\boldsymbol{p}_{\perp}$.

在晶胞上的任意点 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\boldsymbol{a}_3x_3$，经过对称变换的作用，可得 8 个等价点. 由于空间反演的作用，两两成对互差负号，

$$\pm\{\boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\boldsymbol{a}_3x_3\},$$
$$\pm\{\boldsymbol{a}_1(1/2-x_1)+\boldsymbol{a}_2(1/2-x_2)+\boldsymbol{a}_3x_3\},$$
$$\pm\{\boldsymbol{a}_1(1/2+x_1)+\boldsymbol{a}_2(1/2-x_2)+\boldsymbol{a}_3(1/2-x_3)\},$$
$$\pm\{-\boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\boldsymbol{a}_3(1/2-x_3)\}.$$

(2) 空间群 $C_{3v}^6=R3\bar{2}'_{1/2,1/2,1/2}$属菱方晶系 R 型格子，晶格点群是 C_{3v}群，它包含一个作为主轴的固有三次轴和在垂直平面均匀分布的三个非固有二次轴，这些非固有二次转动也就是对包含主轴的平面的反射变换. 三个原始晶格基矢长度相等，均匀地分布在主轴的周围:

$$a_1=a_2=a_3,\qquad \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3.$$

点群生成元的并矢形式为

$$C_3'=\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_3,$$
$$S_2'=\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3.$$

空间群元素的一般形式为

$$T(\boldsymbol{l})(C_3)^m g(S_2',(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)/2)^n,$$

其中 m 取 0, 1 或 2, n 取 0 或 1. z 轴称为主轴，它是固有三次轴. 原点取在主

轴上，对此三次转动，主轴上的点都是对称中心.

$g(S'_2,(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)/2)$的平移矢量 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_\perp=(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)/2$，因而有滑移平面,它通过原点,垂直 $\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2$方向,滑移矢量是 $\boldsymbol{p}_\perp$.

在晶胞上的任意点 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\boldsymbol{a}_3x_3$，经过对称变换的作用，可得 6 个等价点：

$$\boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\boldsymbol{a}_3x_3,$$

$$\boldsymbol{a}_1(1/2+x_2)+\boldsymbol{a}_2(1/2+x_1)+\boldsymbol{a}_3(1/2+x_3),$$

$$\boldsymbol{a}_1x_3+\boldsymbol{a}_2x_1+\boldsymbol{a}_3x_2,$$

$$\boldsymbol{a}_1(1/2+x_1)+\boldsymbol{a}_2(1/2+x_3)+\boldsymbol{a}_3(1/2+x_2),$$

$$\boldsymbol{a}_1x_2+\boldsymbol{a}_2x_3+\boldsymbol{a}_3x_1,$$

$$\boldsymbol{a}_1(1/2+x_3)+\boldsymbol{a}_2(1/2+x_2)+\boldsymbol{a}_3(1/2+x_1).$$

(3) 空间群 $\mathrm{T}^5=I3'2_{1/2,0,1/2}2'_{1/2,1/2,0}$属立方晶系 I 型格子，晶格点群是 T 群，它包含三个互相垂直的固有二次轴和对称分布的四个固有三次轴. 三个晶格基矢分别沿三个二次轴方向，长度相等且互相垂直. 但晶格基矢不是原始的，晶体还存在如下晶格矢量：

$$\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)/2.$$

点群生成元的并矢形式为

$$C'_3=\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_3,$$

$$C_2=-\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3,$$

$$C'_2=\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3.$$

空间群元素的一般形式为

$$T(\boldsymbol{l})T(\boldsymbol{f})^{n_1}(C'_3)^m g(C_2,(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_3)/2)^{n_2} g(C'_2,(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)/2)^{n_3},$$

其中 n_1、n_2和 n_3分别取 0 或 1，m 取 0、1 或 2. 原点设在一个三次轴上,C'_3 无平移矢量. $g(C_2,\boldsymbol{q})$的平移矢量 $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_\parallel+\boldsymbol{q}_\perp$，

$$\boldsymbol{q}_\parallel=\boldsymbol{a}_3/2,\qquad \boldsymbol{q}_\perp=\boldsymbol{a}_1/2.$$

因此螺旋轴通过点 $\boldsymbol{r}_0$，平行于 $\boldsymbol{a}_3$方向，滑移矢量是 $\boldsymbol{q}_\parallel$. $\boldsymbol{r}_0$沿 $\boldsymbol{a}_3$的分量可取为零，沿 $\boldsymbol{a}_1$和 $\boldsymbol{a}_2$的分量记作 r_{01}和 r_{02}，它们满足下式：

$$0 = (C_2 - E)\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{q}_\perp = \{-2r_{01} + 1/2\}\boldsymbol{a}_1 - 2r_{02}\boldsymbol{a}_2.$$

解得 $r_{01} = 1/4$ 和 $r_{02} = r_{03} = 0$. $g(C_2', \boldsymbol{p})$的平移矢量 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_\parallel + \boldsymbol{p}_\perp$,

$$\boldsymbol{p}_\parallel = \boldsymbol{a}_1/2, \qquad \boldsymbol{p}_\perp = \boldsymbol{a}_2/2,$$

因此螺旋轴通过点$\boldsymbol{r}_0'$,平行于$\boldsymbol{a}_1$方向,滑移矢量为$\boldsymbol{p}_\parallel$. $\boldsymbol{r}_0'$沿$\boldsymbol{a}_1$方向的分量可取为零,沿 $\boldsymbol{a}_2$和 $\boldsymbol{a}_3$的分量记作 r_{02}'和 r_{03}',它们满足下式:

$$0 = (C_2' - E)\boldsymbol{r}_0' + \boldsymbol{p}_\perp = \{-2r_{02} + 1/2\}\boldsymbol{a}_2 - 2r_{03}\boldsymbol{a}_3.$$

解得 $r_{02}' = 1/4$ 和 $r_{01}' = r_{03}' = 0$.

在晶胞上的任意点 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_1x_1 + \boldsymbol{a}_2x_2 + \boldsymbol{a}_3x_3$, 经过对称变换的作用, 可得 24 个等价点. 除了平移 $\boldsymbol{f}$ 的作用外, 余下的 12 个等价点列举如下:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{a}_1x_1 + \boldsymbol{a}_2x_2 + \boldsymbol{a}_3x_3,\\
&\boldsymbol{a}_1(1/2 - x_1) - \boldsymbol{a}_2x_2 + \boldsymbol{a}_3(1/2 + x_3),\\
&\boldsymbol{a}_1(1/2 + x_1) + \boldsymbol{a}_2(1/2 - x_2) - \boldsymbol{a}_3x_3,\\
&-\boldsymbol{a}_1x_1 + \boldsymbol{a}_2(1/2 + x_2) + \boldsymbol{a}_3(1/2 - x_3),\\
&\boldsymbol{a}_1x_3 + \boldsymbol{a}_2x_1 + \boldsymbol{a}_3x_2,\\
&\boldsymbol{a}_1(1/2 - x_3) - \boldsymbol{a}_2x_1 + \boldsymbol{a}_3(1/2 + x_2),\\
&\boldsymbol{a}_1(1/2 + x_3) + \boldsymbol{a}_2(1/2 - x_1) - \boldsymbol{a}_3x_2,\\
&-\boldsymbol{a}_1x_3 + \boldsymbol{a}_2(1/2 + x_1) + \boldsymbol{a}_3(1/2 - x_2),\\
&\boldsymbol{a}_1x_2 + \boldsymbol{a}_2x_3 + \boldsymbol{a}_3x_1,\\
&\boldsymbol{a}_1(1/2 - x_2) - \boldsymbol{a}_2x_3 + \boldsymbol{a}_3(1/2 + x_1),\\
&\boldsymbol{a}_1(1/2 + x_2) + \boldsymbol{a}_2(1/2 - x_3) - \boldsymbol{a}_3x_1,\\
&-\boldsymbol{a}_1x_2 + \boldsymbol{a}_2(1/2 + x_3) + \boldsymbol{a}_3(1/2 - x_1).
\end{aligned}$$

三、确定空间群的方法

★　一般空间群与简单空间群一样, 都分属各不同的晶系和布拉维格子, 它们的点群都可表为按一定次序排列的一个, 两个或三个循环点群(转动轴)的乘积, 不同之处在于这些点群元素所对应的平移矢量 $\boldsymbol{t}$ 是否等于零. 空间群的元素一般可

表为

$$
\begin{aligned}
&T(\boldsymbol{L})\{g(R,\boldsymbol{t})\}^{n},\\
&T(\boldsymbol{L})\{g(R,\boldsymbol{t})\}^{n}\{g(R_1,\boldsymbol{p})\}^{n_1},\\
&T(\boldsymbol{L})\{g(R,\boldsymbol{t})\}^{n}\{g(R_2,\boldsymbol{q})\}^{n_2}\{g(R_1,\boldsymbol{p})\}^{n_1},
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

其中 n、n_1 和 n_2 是整数，$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{l}+\boldsymbol{f}$ 是晶格矢量，$\boldsymbol{f}$ 依赖于布拉维格子，平移矢量 $\boldsymbol{t}$、$\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 是晶格基矢 $\boldsymbol{a}_j$ 的分数线性组合，组合系数小于一：

$$
0\leqslant t_j<1,\qquad 0\leqslant p_j<1,\qquad 0\leqslant q_j<1.
$$

一般空间群的国际符号也就在简单空间群国际符号中描写循环子群的数字下角注上这些平移矢量. 这些平移矢量还要满足两个条件. 一是群的要求，就是两个用(5.9)式表出的群元素乘积仍能表成(5.9)式的形式. 其中包括作为循环子群元素，点群元素对这些平移矢量的限制，例如对 $g(R,\boldsymbol{t})$，$\boldsymbol{t}$ 满足

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{t}=0, && \text{当 } R=C_1=E,\\
&N\{\hat{n}(\hat{n}\cdot\boldsymbol{t})\}=N\boldsymbol{t}_{\parallel}=m\boldsymbol{a}_{\parallel}, && \text{当 } R=C_N,\quad N\neq 1,\\
&N\{\boldsymbol{t}-\hat{n}(\hat{n}\cdot\boldsymbol{t})\}=N\boldsymbol{t}_{\perp}=m\boldsymbol{a}_{\perp}/2, && \text{当 } R=S_2,\\
&\boldsymbol{t}\ \text{无限制}, && \text{当 } R=S_N,\quad N\neq 2.
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

还有由 R、R_1 和 R_2 的乘积关系引出的条件，例如若 $R_1=RR_1R$，则要求

$$
g(R_1,\boldsymbol{p}+\boldsymbol{L})=g(R,\boldsymbol{t})g(R_1,\boldsymbol{p})g(R,\boldsymbol{t}). \tag{5.11}
$$

二是原点的重新选择引起这些平移矢量的改变. 若新原点 O' 相对老原点 O 的相对位置为 $\boldsymbol{r}_0$，则取原点 O 时的变换 $g(R,\boldsymbol{t})$，在取原点 O' 时变成

$$
g'=T(-\boldsymbol{r}_0)g(R,\boldsymbol{t})T(\boldsymbol{r}_0)=g(R,\boldsymbol{t}+(R-E)\boldsymbol{r}_0). \tag{5.12}
$$

原点的不同选择并不改变空间群本身，但改变了描写空间群的符号，这样的不同符号称为等价的符号. 在确定一般空间群的种类时必须排除等价的符号. 首先选择原点，使(5.9)式中的 $\boldsymbol{t}$ 尽量简单，具体说就是把(5.10)式中不受限制的 $\boldsymbol{t}$ 分量都化为零. 如果 $\boldsymbol{L}$ 中包含有受限制的 $\boldsymbol{t}$ 分量成分，即当 $R=C_N$，$N\neq1$ 时 $\boldsymbol{L}$ 含有平行转轴分量，或当 $R=S_2$ 时 $\boldsymbol{L}$ 含有垂直转轴分量，而且这些受限制的 $\boldsymbol{t}$ 分量可以部分或全部吸收到 $\boldsymbol{L}$ 中，则可通过再选原点来进一步简化 $\boldsymbol{t}$. 然后在保持此最简化的 $\boldsymbol{t}$ 条件下，研究原点还允许作哪些改变 $\boldsymbol{r}_0$，并计算这些改变可对 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 作什么简化，最后确定可能的一般空间群.

★　由于首先选取原点使(5.10)式中的 $\boldsymbol{t}$ 尽量简单，通常根据 R 的性质把空间

群区分为A型($R=S_N$, $N\neq 2$), B型($R=C_N$)和C型($R=S_2$). C型只有两种空间群$P\bar{2}_{\frac{1}{2}00}$和$A\bar{2}_{\frac{1}{2}00}$.

7. 试由点群D_{2d}出发，计算全部12种空间群.

解 D_{2d}群包含一个作为主轴的非固有四次轴，在垂直主轴平面内，包含两个互相垂直的固有二次轴和两个互相垂直的非固有二次轴，固有和非固有二次轴间夹角为$\pi/4$. 根据晶格基矢$\boldsymbol{a}_1$沿固有还是非固有二次轴方向，点群D_{2d}的国际符号分为$\bar{4}2'$和$\bar{4}2''$，它们代表D_{2d}群的元素可表为子群元素的乘积$S_4C'_2$或$S_4C''_2$. 以D_{2d}群为点群的空间群属四方晶系. 有P和I两种布拉维格子. 三个晶格基矢互相垂直，$\boldsymbol{a}_3$沿四次轴方向，$a_1=a_2$. 四次轴生成元的并矢形式为

$$\boldsymbol{S}'_4=-\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3.$$

以D_{2d}为点群的空间群属于A型，把原点选在非固有四次轴上，空间群元素的一般形式为

$$T(\boldsymbol{L})(S_4)^m g(C'_2,\boldsymbol{p})^n,$$

其中m取0、1、2或3，n取0或1. 式中C'_2也可能改为C''_2. 原点还允许作$\boldsymbol{r}_0$的平移，$\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{a}_1r_{01}+\boldsymbol{a}_2r_{02}+\boldsymbol{a}_3r_{03}$,

$$(S_4-E)\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{a}_1(-r_{01}+r_{02})+\boldsymbol{a}_2(-r_{01}-r_{02})-2\boldsymbol{a}_3r_{03}=\boldsymbol{L}.$$

解得$\boldsymbol{r}_0$，除取$\boldsymbol{L}$外，还允许取如下值及其线性组合：

$$\boldsymbol{r}_0=\begin{cases}(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)/2,\ \boldsymbol{a}_3/2, & P\text{型或}I\text{型格子}\\(2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_3)/4,(2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)/4, & I\text{型格子}.\end{cases}$$

下面分别研究$\bar{4}2'$和$\bar{4}2''$两种点群所对应的空间群.

(1) 对点群$\bar{4}2'$，$\boldsymbol{a}_1$沿固有二次轴方向，二次轴的生成元的并矢形式为

$$\boldsymbol{C}'_2=\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3.$$

由于$S_4C'_2S_4=C'_2$和群的性质，

$$S_4g(C'_2,\boldsymbol{p})S_4=g(C'_2,S_4\boldsymbol{p})=g(C'_2,\boldsymbol{p}+\boldsymbol{L}),$$

设$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}_1p_1+\boldsymbol{a}_2p_2+\boldsymbol{a}_3p_3$，有

$$(S_4-E)\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}_1(-p_1+p_2)+\boldsymbol{a}_2(-p_1-p_2)-\boldsymbol{a}_32p_3=\boldsymbol{L}.$$

对P型格子，解得$p_1=p_2=0$或1/2，和p_3等于0或1/2. 对I型格子，由于存在

晶格矢量 $\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)/2$，上面解中，零解保留，解 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{f}$ 被排除，解 $\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)/2$ 和解 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}_3/2$ 变成等价的了. 此外还增加了解 $\boldsymbol{p}=(2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_3)/4$ 和 $\boldsymbol{p}=(2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)/4$. 所有上面这些解的平行转轴分量 $\boldsymbol{p}_{\parallel}$ 都等于转轴方向二分之一晶格矢量的整数倍，因此是允许的解.

在原点平移 $\boldsymbol{r}_0$时，$\boldsymbol{p}$ 允许作如下的变化：

$$(C'_2-E)\boldsymbol{r}_0=-\boldsymbol{a}_2 2r_{02}-\boldsymbol{a}_3 2r_{03}.$$

对 P 型格子，$\boldsymbol{p}$ 没有得到简化，但对 I 型格子，$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}_3/2$ 的解被消去，解 $\boldsymbol{p}=(2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_3)/4$ 和解 $\boldsymbol{p}=(2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)/4$ 也变成等价的了. 因此有空间群：

$$P\bar{4}2',\quad P\bar{4}2'_{00\frac{1}{2}},\quad P\bar{4}2'_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}0},\quad P\bar{4}2'_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}},\quad I\bar{4}2',\quad I\bar{4}2'_{0\frac{1}{2}\frac{1}{4}}.$$

在空间群表中分别排在第 111，112，113，114，121 和 122 号.

(2) 对点群 $\bar{4}2''$，$\boldsymbol{a}_1$沿非固有二次轴方向，二次轴的生成元的并矢形式为

$$\boldsymbol{C}''_2=-\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_3.$$

由于 $S_4C''_2S_4=C''_2$和群的性质，

$$S_4 g(C''_2,\boldsymbol{p})S_4=g(C''_2,\boldsymbol{p}+\boldsymbol{L}),$$

$$(S_4-E)\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}_1(-p_1+p_2)+\boldsymbol{a}_2(-p_1-p_2)-\boldsymbol{a}_3 2p_3=\boldsymbol{L}.$$

虽然方程和前一情况相同，但因沿转轴方向的晶格矢量不同，解也不相同. 对 P 型格子，解和前面情况相同，有 $p_1=p_2=0$ 或 1/2，和 p_3等于 0 或 1/2. 对 I 型格子，只有零解和解 $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}_3/2$. 解 $\boldsymbol{p}=(2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_3)/4$ 和解 $\boldsymbol{p}=(2\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)/4$，因为它们的平行转轴分量 $\boldsymbol{p}_{\parallel}=(\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2)/4$，小于转轴方向晶格矢量的一半，被排除了.

在原点平移 $\boldsymbol{r}_0$时，$\boldsymbol{p}$ 允许作如下变化：

$$(C''_2-E)\boldsymbol{r}_0=-(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)(r_{01}+r_{02})-\boldsymbol{a}_3 2r_{03}.$$

对 P 型格子和 I 型格子，$\boldsymbol{p}$ 都没有得到进一步的简化，因此有空间群：

$$P\bar{4}2'',\quad P\bar{4}2''_{00\frac{1}{2}},P\bar{4}2''_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}0},\quad P\bar{4}2''_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}},\quad I\bar{4}2'',\quad I\bar{4}2''_{00\frac{1}{2}}.$$

在空间群表中分别排在第 115，116，117，118，119 和 120 号.

8. 试由点群 D_2出发，计算全部 9 种空间群.

解 点群 D_2的国际符号是 22′，它包含三个互相垂直的固有二次轴，群元素可表为子群元素的乘积 $C_2C'_2$. 与点群 D_2相对应的空间群属正交晶系，有 P，A，F 和 I 四种布拉维格子. 三个晶格基矢互相垂直，但长度可能互不相等. 两个二次

轴生成元的并矢形式为

$$C_2 = -a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3,\quad C_2' = a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3.$$

以 D_2 为点群的空间群属于 B 型，把原点选在一个固有二次轴上，空间群元素的一般形式为

$$T(L)g(C_2,t)^m g(C_2',p)^n,$$

其中 m 和 n 都取 0 或 1. $t = ta_3$，$t = 0$ 或 1/2. 原点还允许作 r_0 的平移，$r_0 = a_1r_{01} + a_2r_{02} + a_3r_{03}$.

$$(C_2 - E)r_0 = -a_1 2r_{01} - a_2 2r_{02} = L + t.$$

对 A 型、F 型和 I 型格子，由于 L 中包含有 $a_3/2$ 分量，可以进一步把 t 简化为零. 在保持简化后的 t 不变的条件下，原点还允许作 r_0 的平移，r_0 除取 L 外，还允许取如下值及其线性组合：

$$r_0 = \begin{cases} a_1/2,\ a_2/2,\ r_{03}a_3, & P、A、F \text{ 或 } I \text{ 型格子} \\ (a_1 + a_2)/4, & F \text{ 型格子}. \end{cases}$$

其中 r_{03} 任意.

由于 $C_2C_2'C_2 = C_2'$ 和群的性质，

$$g(C_2,t)g(C_2',p)g(C_2,t) = g(C_2',C_2p) = g(C_2',p + L),$$

设 $p = a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3$，有

$$(C_2 - E)p = -a_1 2p_1 - a_2 2p_2 = L.$$

对 P、A、F 和 I 型格子，都解得 p_1 和 p_2 分别取 0 或 1/2，p_3 任意. 除了上述解外，对 F 型格子还有解 $p = (a_1 + a_2)/4$. 但由于 $p_\parallel$ 必须等于转轴方向二分之一晶格矢量的整数倍，后一个解被排除了.

在原点平移 r_0 时，p 允许作如下的变化：

$$(C_2' - E)r_0 = -a_2 2r_{02} - a_3 2r_{03}.$$

因此 p_3 被消去. 现在我们就各种格子研究独立的空间群形式.

对 P 型格子，t，p_1 和 p_2 都允许独立地取 0 或 1/2，但要注意其中有些空间群是等价的. 显然，$t = p_1 = p_2 = 0$ 和 1/2 是两个不等价的空间群，它们记作 $P22'$ 和 $P2_{00\frac{1}{2}}2'_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}0}$，在空间群表中排在第 16 和 19 号. 如果在 t，p_1 和 p_2 中只有一个为 1/2，其余都为零，则由于三个二次轴地位平等，可以证明它们互相等价. 解 $t =$

$1/2(p_1=p_2=0)$和解 $p_1=1/2(t=p_2=0)$互相等价是明显的，因为它们的差别只是 $\boldsymbol{a}_1$和 $\boldsymbol{a}_3$的交换. 对解 $p_2=1/2(t=p_1=0)$，第二个二次轴生成元为 $C''_{0\frac{1}{2}0}$. 如果把晶格基矢 $\boldsymbol{a}_1$取在这个二次轴方向，则 $p_2=1/2$ 的解变成了前面 $p_1=1/2$ 的解. 这三个等价的空间群记作 $P22'_{0\frac{1}{2}0}$，在空间群表中排第 17 号. 如果在 t，p_1和 p_2中有两个为 1/2，另一个为零，则也可以证明它们互相等价. 如果把晶格基矢 $\boldsymbol{a}_1$取在 $\boldsymbol{a}_2$方向，就证明了两个解 $t=p_1=1/2$ 和 $t=p_2=1/2$ 是等价的. 如果 $p_1=p_2=1/2$ 和 $t=0$，即两个二次轴的生成元分别为

$$C_2, \quad g(C'_2,(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)/2).$$

把原点平移 $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{a}_2/4$，这两个生成元分别变成

$$g(C_2,\,0)\to g(C_2,(C_2-E)\boldsymbol{a}_2/4)=g(C_2,\,-\boldsymbol{a}_2/2),$$

$$\begin{aligned} g(C'_2,\,(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)/2)&\to g(C'_2,\,(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)/2+(C'_2-E)\boldsymbol{a}_2/4)\\ &=g(C'_2,\,\boldsymbol{a}_1/2). \end{aligned}$$

如果把 $\boldsymbol{a}_1$和 $\boldsymbol{a}_3$的交换，上式就变成了前面 $t=p_2=1/2$ 和 $p_1=0$ 的解. 这三个等价的空间群记作 $P22'_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}0}$，在空间群表中排第 18 号.

对 A 型格子，$t=0$，由于存在晶格矢量 $\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)/2$，用从 $\boldsymbol{p}$ 中减去 $\boldsymbol{f}$ 的办法就可以消去 $p_2=1/2$ 的解，因此 A 型格子只有两个解 $p_1=0$ 或 1/2，对应空间群 $A22'$和 $A22'_{\frac{1}{2}00}$，在空间群表中排第 21 和 20 号.

对 F 型格子，$t=0$，由于存在晶格矢量 $\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_3)/2$ 或$(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)/2$，可以用从 $\boldsymbol{p}$ 中减去 $\boldsymbol{f}$ 的办法独立地消去解 $p_1=1/2$ 和(或) $p_2=1/2$，因此 F 型格子只有简单空间群 $F22'$，在空间群表中排第 22 号.

对 I 型格子，$t=0$，由于存在晶格矢量 $\boldsymbol{f}=(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3)/2$，可以用从 $\boldsymbol{p}$ 中减去 $\boldsymbol{f}$ 的办法消去解 $p_1=p_2=1/2$. 只要把 $\boldsymbol{a}_1$选在原来 $\boldsymbol{a}_2$方向，就可把解 $p_1=0$ 和 $p_2=1/2$ 变成解 $p_1=1/2$ 和 $p_2=0$. 因此 I 型格子有两种空间群 $I22'$和 $I22'_{\frac{1}{2}00}$，前者在空间群表中排第 23 号，我们要证明后者与空间群表中排在第 24 号的空间群 $I2_{00\frac{1}{2}}2'_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}0}$等价. 事实上，把 $\boldsymbol{p}$ 减去 $\boldsymbol{f}$，再用平移原点的方法消去新产生的 p_3，空间群 $I2_{00\frac{1}{2}}2'_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}0}$就等价于空间群 $I2_{00\frac{1}{2}}2'$. 这种空间群与空间群 $I22'_{\frac{1}{2}00}$的差别仅在于 $\boldsymbol{a}_1$和 $\boldsymbol{a}_3$的交换.

这样，我们得到了空间群表中以 D_2 为点群的全部九种不等价的空间群，排在空间群表中第 16 至 24 号.

第六章　置　换　群

一、置换变换的乘积公式

★　n 个客体排列次序的变换称为置换. 设置换 R 把原来排在第 j 位置的客体排到第 r_j 位置，用 $2\times n$ 矩阵来描写置换 R

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix},$$

其中各列的排列次序是不重要的，重要的是每列上下两数之间的对应关系. 这样的置换共有 $n!$ 个，按照变换的乘积规律(相继作两个变换)，它们构成群，称为 n 个客体置换群 S_n，其中恒元的矩阵表达式上下两行相同，逆元则上下两行交换.

如果在置换 S 中，有 $(n-l)$ 个客体保持不变，其余 l 个客体顺序变换，则称为长度为 l 的轮换，用一个行矩阵描写：

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{l-1} & a_l & b_1 & \cdots & b_{n-l} \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_l & a_1 & b_1 & \cdots & b_{n-l} \end{pmatrix} \\ &= (a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_{l-1} \quad a_l) \\ &= (a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_l \quad a_1). \end{aligned}$$

用行矩阵描写轮换时，数字排列次序是重要的，但允许数字顺序变换. 长度为 2 的轮换称为对换.

★　任一置换可惟一地分解为不包含公共客体的轮换乘积. 这些轮换的长度集合称为置换的轮换结构. 不包含公共客体的两轮换的乘积次序可以交换.

一个轮换可以在任何地方切断，并重复切断处的数字，变成两个轮换的乘积.

$$(a \cdots b\, c\, d \cdots f) = (a \cdots b\, c)(c\, d \cdots f). \tag{6.1}$$

反之，仅有一个公共客体的两轮换可通过(6.1)式接起来变成一个轮换. 有更多公共客体的两轮换乘积也可用此“切断”和“衔接”的方法化为若干个无公共客体的轮换乘积. 例如

$$\begin{aligned}
&(a_1 \cdots a_i\, c\, a_{i+1} \cdots a_j\, d)(d\, b_1 \cdots b_r\, c\, b_{r+1} \cdots b_s)\\
&= (a_1 \cdots a_i\, c)(c\, a_{i+1} \cdots a_j\, d)(d\, b_1 \cdots b_r\, c)(c\, b_{r+1} \cdots b_s)\\
&= (a_1 \cdots a_i\, c)(a_{i+1} \cdots a_j\, d)(d\, c)(c\, d)(d\, b_1 \cdots b_r)(c\, b_{r+1} \cdots b_s)\\
&= (a_1 \cdots a_i\, c)(c\, b_{r+1} \cdots b_s)(a_{i+1} \cdots a_j\, d)(d\, b_1 \cdots b_r)\\
&= (a_1 \cdots a_i\, c\, b_{r+1} \cdots b_s)(a_{i+1} \cdots a_j\, d\, b_1 \cdots b_r). \qquad (6.2)
\end{aligned}$$

任一置换可分解为若干个对换的乘积，而且对给定的置换，在乘积中包含的对换个数的偶奇性是确定的．包含对换个数为偶数（或奇数）的置换称为偶置换（或奇置换），偶置换的置换宇称 $\delta(R)$为 1，奇置换的置换宇称为 -1．一长度为 l 的轮换可分解为$(l-1)$个对换的乘积，因而长度为 l 的轮换的置换宇称为$(l-1)$．

★　当把置换 S 从置换 R 的左面移到右面时，置换 R 中的数字（客体）作 S 置换，反之，当把置换 S 从置换 R 的右面移到左面时，置换 R 中的数字作 S^{-1}置换．换言之，设 $SR=TS$，置换 R 所涉及数字为 r_j 等，置换 S 把 r_j 变成 t_j，则置换 T 和置换 R 的表达式相同，只是把所涉及的数字由 r_j 变成 t_j．这关系称为置换乘积交换规则．

★　$P_a=(a\ a+1)$是相邻客体的对换，用置换乘积交换规则易知它们满足

$$\begin{aligned}
&P_a^{\ 2} = E, \qquad P_aP_{a+1}P_a = P_{a+1}P_aP_{a+1},\\
&P_aP_b = P_bP_a, \quad 当\ |a-b| \geqslant 2. \qquad (6.3)
\end{aligned}$$

1.　把下列置换化为无公共客体的轮换乘积：

(1)：(1 2)(2 3)(1 2)，　(2)：(1 2 3)(1 3 4)(3 2 1)，

(3)：$(1\ 2\ 3\ 4)^{-1}$，　(4)：(1 2 4 5)(4 3 2 6)，

(5)：(1 2 3)(4 2 6)(3 4 5 6)．

解　前两小题可用置换乘积交换规则来计算，后三小题可用(6.1)式计算．

(1)：(1 3)，　(2)：(2 1 4)，　(3)：(4 3 2 1)，

(4)：(5 1 2 6)(4 3)，　(5)：(1 2 6)(4 5)

2.　试把任意对换$(b\ d)$表为若干相邻客体对换 P_a 的乘积．

解　不失普遍性，假设 $b>d$，用(6.1)式容易验算

$$\begin{aligned}
(b\ d) &= P_{b-1}P_{b-2}\cdots P_{d+1}P_dP_{d+1}\cdots P_{b-2}P_{b-1}\\
&= P_dP_{d-1}\cdots P_{b-2}P_{b-1}P_{b-2}\cdots P_{d+1}P_d.
\end{aligned}$$

3. 证明长度为 l 的轮换，自乘 l 次方等于恒元，即它的阶数为 l.

证　设 $R=(a_1\ a_2\cdots\ a_l)$，m 是 1 到 l 间的任一整数，b 是不能表为 a_m 的客体，则 R 把a_m 变成a_{m+1}，把 a_l 变成a_1，因此 R^{l-m}把a_m 变成a_l，再用 R 作用，把 a_l 变成 a_1，然后再用 R^{m-1}作用，把 a_1 变成 a_m，即 R^l 把任意a_m 变回a_m，而保持 b 不变，故 R^l 是恒元E.

4. 设 $W=(1\ 2\ 3\ \cdots\ n)$，试证明 P_1 和 W 是置换群的生成元.

证　由题 2 知，任一置换可分解为若干个相邻客体对换的乘积. 由置换乘积交换规则知，$WP_a=P_{a+1}W$，由题 3 知 $W^{-1}=W^{n-1}$，因此有

$$P_a = WP_{a-1}W^{n-1} = W^{a-1}P_1W^{n-a+1}.$$

5. 一副扑克有 52 张牌，每次洗牌都改变牌的排列次序，也就是作一次置换. 如果每次洗牌都严格按下面操作进行，先把牌分成相等的两部分，然后每部分互相间隔一张牌重新排列起来，这样第一张和最后一张的位置没有变化，其他牌都重新排列了. 试把此置换表成不含公共客体的轮换乘积，写出此置换的轮换结构，并说明最少作几次洗牌，扑克牌的排列次序恢复原状.

解　经过题中给出的“严格”洗牌，前面一半牌排到奇数位置，后面一半牌排到偶数位置，用数学的语言说，设 $1\leqslant n\leqslant 26$，经过洗牌，第 n 张牌变到第$(2n-1)$张牌的位置，而第$(26+n)$张牌变到第$(2n)$张牌的位置. 现在来计算这样的洗牌所对应的置换如何分解成不含公共客体的轮换乘积. 首先，这置换包含两个长度为 1 的轮换(1)和(52). 其次，按照上面给出的变换规律，洗牌把 2 变成 3，3 变成 5，5 变成 9，9 变成 17，17 变成 33，33 变成 14，14 变成 27，27 变回到 2，于是我们得到一个长度为 8 的轮换

$$(2\ 3\ 5\ 9\ 17\ 33\ 14\ 27).$$

在余下的牌中例如再选第 4 张牌，洗牌把 4 变成 7，7 变成 13，13 变成 25，25 变成 49，49 变成 46，46 变成 40，40 变成 28，28 变回到 4，于是我们又得到一个长度为 8 的轮换

$$(4\ 7\ 13\ 25\ 49\ 46\ 40\ 28).$$

同理，在余下的牌中再选第 6 张牌，洗牌把 6 变成 11，11 变成 21，21 变成 41，41 变成 30，30 变成 8，8 变成 15，15 变成 29，29 变回到 6，得到一个长度为 8 的轮换

$$(6\ 11\ 21\ 41\ 30\ 8\ 15\ 29).$$

在余下的牌中再选第 10 张牌，洗牌把 10 变成 19，19 变成 37，37 变成 22，22 变成 43，43 变成 34，34 变成 16，16 变成 31，31 变回到 10，得到一个长度为 8 的轮换

$$(10\ 19\ 37\ 22\ 43\ 34\ 16\ 31),$$

在余下的牌中再选第 12 张牌，洗牌把 12 变成 23，23 变成 45，45 变成 38，38 变成 24，24 变成 47，47 变成 42，42 变成 32，32 变回到 12，得到一个长度为 8 的轮换

$$(12\ 23\ 45\ 38\ 24\ 47\ 42\ 32),$$

在余下的牌中再选第 18 张牌，洗牌把 18 变成 35，35 变回到 18，这次得到一个长度为 2 的轮换(18 35)，在余下的牌中再选第 20 张牌，洗牌把 20 变成 39，39 变成 26，26 变成 51，51 变成 50，50 变成 48，48 变成 44，44 变成 36，36 变回到 20，得到一个长度为 8 的轮换

$$(20\ 39\ 26\ 51\ 50\ 48\ 44\ 36).$$

现在 52 张牌都已取遍，从而把洗牌对应的置换化成两个长度为 1 的轮换，一个长度为 2 的轮换，和六个长度为 8 的轮换的乘积．这置换的轮换结构为$(1^2, 2, 8^6)$．这些轮换长度的最小公倍数是 8，也就是说，经过 8 次上述“严格”的洗牌，扑克牌恢复到原来的排列．实际的洗牌并不如此严格，会有很多的偶然性．因此不必担心牌型会如此快地出现重复．

二、杨图，杨表和杨算符

★　置换群 S_n 的类和不等价不可约表示分别用配分数描写．类用符号$(l)=(l_1, l_2, \cdots)$，$\sum_j l_j = n$ 标记，它描写置换的轮换结构．不可约表示用杨图$[\lambda]=[\lambda_1, \lambda_2, \cdots]$，$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots$，$\sum_j \lambda_j = n$，标记．杨图是包含 n 格的方格图，上面和左面对齐，第 j 行所包含的方格数是λ_j．通常在 l_j 或λ_j 有重复时用指数标记，例如$(2^3, 3^2)=(2,2,2,3,3)$．

★　如果 $\lambda_i=\lambda'_i$，$1 \leqslant i < j$，$\lambda_j > \lambda'_j$，则称杨图$[\lambda]$大于杨图$[\lambda']$．可按杨图大小顺序列出置换群 S_n 全部杨图．

把自然数 1 到 n 填入杨图$[\lambda]$，得一杨表．若在杨表同一行中，左面的数小于右面的数，同一列中，上面的数小于下面的数，则此杨表称为正则杨表．可定义同一杨图的两不同正则杨表的大小：自第一行起，逐行自左向右比较两正则杨表的填数，直至见到第一对不相同的填数，填数大的杨表称为较大的正则杨表．

杨图$[\lambda]$的正则杨表数由钩形(Hook)规则来计算，

$$d_{[\lambda]}(S_n) = n!/\prod h_{ij}, \qquad (6.4)$$

其中 h_{ij} 是第 i 行 j 列格子的钩形数，即该格所在行右面的格子数加上所在列下面的格子数加一. 互为转置的杨图称为关连杨图，它们包含的正则杨表互为转置，因此正则杨表数目相同，但按大小顺序的排列次序相反.

★ 对于给定的杨表，所有同行客体的置换称为该杨表的横向置换 P，所有同列客体的置换称为它的纵向置换 Q，所有横向置换之和称为它的横向算符 $\mathscr{P}=\sum P$，所有纵向置换乘其置换宇称之和称为它的纵向算符 $\mathscr{Q}=\sum\delta(Q)Q$. 杨表对应的杨算符等于横向算符和纵向算符的乘积，$\mathscr{Y}=\mathscr{P}\mathscr{Q}$.

6. 分别自大至小写出置换群 S_5，S_6 和 S_7 的全部杨图.

解 置换群 S_5 的杨图有$[5]$, $[4,1]$, $[3,2]$, $[3,1^2]$, $[2^2,1]$, $[2,1^3]$, $[1^5]$.

置换群 S_6 的杨图有$[6]$, $[5,1]$, $[4,2]$, $[4,1^2]$, $[3^2]$, $[3,2,1]$, $[3,1^3]$, $[2^3]$, $[2^2,1^2]$, $[2,1^4]$, $[1^6]$.

置换群 S_7 的杨图有$[7]$, $[6,1]$, $[5,2]$, $[5,1^2]$, $[4,3]$, $[4,2,1]$, $[4,1^3]$, $[3^2,1]$, $[3,2^2]$, $[3,2,1^2]$, $[3,1^4]$, $[2^3,1]$, $[2^2,1^3]$, $[2,1^5]$, $[1^7]$.

7. 分别计算置换群 S_4，S_5，S_6 和 S_7 各类(l)所包含的元素数目 $n(l)$.

解 S_4 群：$n(4)=6$，$n(3,1)=8$，$n(2^2)=3$，$n(2,1^2)=6$，$n(1^4)=1$.

S_5 群：$n(5)=24$，$n(4,1)=30$，$n(3,2)=20$，$n(3,1^2)=20$，$n(2^2,1)=15$，$n(2,1^3)=10$，$n(1^5)=1$.

S_6 群：$n(6)=120$，$n(5,1)=144$，$n(4,2)=90$，$n(4,1^2)=90$，$n(3^2)=40$，$n(3,2,1)=120$，$n(3,1^3)=40$，$n(2^3)=15$，$n(2^2,1^2)=45$，$n(2,1^4)=15$，$n(1^6)=1$.

S_7 群：$n(7)=720$，$n(6,1)=840$，$n(5,2)=504$，$n(5,1^2)=504$，$n(4,3)=420$，$n(4,2,1)=630$，$n(4,1^3)=210$，$n(3^2,1)=280$，$n(3,2^2)=210$，$n(3,2,1^2)=420$，$n(3,1^4)=70$，$n(2^3,1)=105$，$n(2^2,1^3)=105$，$n(2,1^5)=21$，$n(1^7)=1$.

8. 计算置换群 S_n，$5\leqslant n\leqslant 9$，各杨图$[\lambda]$的正则杨表数 $d_{[\lambda]}(S_n)$.

解 可用钩形规则(6.4)来计算杨图$[\lambda]$的正则杨表数.

S_5 群杨图	[5]	[4,1]	[3,2]	$[3,1^2]$
关连杨图	$[1^5]$	$[2,1^3]$	$[2^2,1]$	
正则杨表数	1	4	5	6

S_6 群杨图	[6]	[5,1]	[4,2]	$[4,1^2]$	$[3^2]$	[3,2,1]
关连杨图	$[1^6]$	$[2,1^4]$	$[2^2,1^2]$	$[3,1^3]$	$[2^3]$	
正则杨表数	1	5	9	10	5	16

S_7 群杨图	[7]	[6,1]	[5,2]	$[5,1^2]$	[4,3]	[4,2,1]	$[4,1^3]$	$[3^2,1]$
关连杨图	$[1^7]$	$[2,1^5]$	$[2^2,1^3]$	$[3,1^4]$	$[2^3,1]$	$[3,2,1^2]$		$[3,2^2]$
正则杨表数	1	6	14	15	14	35	20	21

S_8 群杨图	[8]	[7,1]	[6,2]	$[6,1^2]$	[5,3]	[5,2,1]
关连杨图	$[1^8]$	$[2,1^6]$	$[2^2,1^4]$	$[3,1^5]$	$[2^3,1^2]$	$[3,2,1^3]$
正则杨表数	1	7	20	21	28	64

S_8 群杨图	$[5,1^3]$	$[4^2]$	[4,3,1]	$[4,2^2]$	$[4,2,1^2]$	$[3^2,2]$
关连杨图	$[4,1^4]$	$[2^4]$	$[3,2^2,1]$	$[3^2,1^2]$		
正则杨表数	35	14	70	56	90	42

S_9 群杨图	[9]	[8,1]	[7,2]	$[7,1^2]$	[6,3]	[6,2,1]	$[6,1^3]$	[5,4]
关连杨图	$[1^9]$	$[2,1^7]$	$[2^2,1^5]$	$[3,1^6]$	$[2^3,1^3]$	$[3,2,1^4]$	$[4,1^5]$	$[2^4,1]$
正则杨表数	1	8	27	28	48	105	56	42

S_9 群杨图	[5,3,1]	$[5,2^2]$	$[5,2,1^2]$	$[5,1^4]$	$[4^2,1]$	[4,3,2]	$[4,3,1^2]$	$[3^3]$
关连杨图	$[3,2^2,1^2]$	$[3^2,1^3]$	$[4,2,1^3]$		$[3,2^3]$	$[3^2,2,1]$	$[4,2^2,1]$	
正则杨表数	162	120	189	70	84	168	216	42

9.　写出对应下列杨表的杨算符：

$$(1):\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array}\qquad (2):\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array}\qquad (3):\ \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

解

(1)：$[E+(1\ 2)+(1\ 3)+(2\ 3)+(1\ 2\ 3)+(3\ 2\ 1)][E-(1\ 4)]$

$=E+(1\ 2)+(1\ 3)+(2\ 3)+(1\ 2\ 3)+(3\ 2\ 1)$

$-(1\ 4)-(2\ 1\ 4)-(3\ 1\ 4)-(2\ 3)(1\ 4)-(2\ 3\ 1\ 4)-(3\ 2\ 1\ 4).$

(2)：$[E+(1\ 2)][E+(3\ 4)][E-(1\ 3)][E-(2\ 4)]$

$=E+(1\ 2)+(3\ 4)+(1\ 2)(3\ 4)-(1\ 3)-(2\ 1\ 3)$

$-(4\ 3\ 1)-(2\ 1\ 4\ 3)-(2\ 4)-(1\ 2\ 4)-(3\ 4\ 2)-(1\ 2\ 3\ 4)$

$+(1\ 3)(2\ 4)+(1\ 3\ 2\ 4)+(3\ 1\ 4\ 2)+(3\ 2)(1\ 4).$

(3)：$E+(1\ 2)+(1\ 3)+(1\ 4)+(2\ 3)+(2\ 4)+(3\ 4)+(1\ 2)(3\ 4)$

$+(1\ 3)(2\ 4)+(1\ 4)(2\ 3)+(1\ 2\ 3)+(1\ 3\ 2)+(1\ 2\ 4)+(1\ 4\ 2)$

$+(1\ 3\ 4)+(1\ 4\ 3)+(2\ 3\ 4)+(2\ 4\ 3)+(1\ 2\ 3\ 4)+(1\ 2\ 4\ 3)$

$+(1\ 3\ 4\ 2)+(1\ 3\ 2\ 4)+(1\ 4\ 2\ 3)+(1\ 4\ 3\ 2)-(1\ 5)-(2\ 1\ 5)$

$-(3\ 1\ 5)-(4\ 1\ 5)-(2\ 3)(1\ 5)-(2\ 4)(1\ 5)-(3\ 4)(1\ 5)$

$-(3\ 4)(2\ 1\ 5)-(2\ 4)(3\ 1\ 5)-(2\ 3)(4\ 1\ 5)-(2\ 3\ 1\ 5)$

$-(3\ 2\ 1\ 5)-(2\ 4\ 1\ 5)-(4\ 2\ 1\ 5)-(3\ 4\ 1\ 5)-(4\ 3\ 1\ 5)$

$-(2\ 3\ 4)(1\ 5)-(2\ 4\ 3)(1\ 5)-(2\ 3\ 4\ 1\ 5)-(2\ 4\ 3\ 1\ 5)$

$-(3\ 4\ 2\ 1\ 5)-(3\ 2\ 4\ 1\ 5)-(4\ 2\ 3\ 1\ 5)-(4\ 3\ 2\ 1\ 5).$

三、杨算符的对称性质和正交性

★　对于给定的杨表和杨算符 $\mathscr{Y}$，它的横向置换 P，纵向置换 Q 及其乘积 PQ，都称为属于该杨表 $\mathscr{Y}$(或该杨算符)的置换，其他置换称为不属于该杨表 $\mathscr{Y}$ 的置换. 除了恒元外，属于同一杨表的纵向置换和横向置换没有公共置换. 杨算符 $\mathscr{Y}$ 可表为属于它的置换的组合，$\mathscr{Y}=\sum\delta(Q)PQ$. 杨算符满足 $P\mathscr{Y}=\mathscr{Y}=\delta(Q)\mathscr{Y}Q$，和福克条件

$$\left[E+\sum_{\mu=1}^{\lambda}(a_\mu b_\nu)\right]\mathscr{Y}=0,\qquad \mathscr{Y}\left[E-\sum_{\mu=1}^{\tau}(c_\mu d_\nu)\right]=0,$$

其中第一式是对杨表某行全部 λ 个客体 a_μ 求和，而 b_ν 是另一行的任一客体，但该行的格数必须不大于 λ. 同样，第二式是对杨表某列全部 τ 个客体 c_μ 求和，而

d_ν 是另一列的任一客体，但该列的格数必须不大于 τ.

★ 如果存在一对数，在杨表 $\mathscr{Y}$ 中填在同一行，而在杨表 $\mathscr{Y}'$ 中填在同一列，则 $\mathscr{Y}'\mathscr{Y}=0$. 不同杨图的杨算符 $\mathscr{Y}$ 和 $\mathscr{Y}'$ 互相正交，$\mathscr{Y}\mathscr{Y}'=\mathscr{Y}'\mathscr{Y}=0$. 对应同一杨图，若正则杨表 $\mathscr{Y}_\mu$ 大于正则杨表 $\mathscr{Y}_\nu$，则 $\mathscr{Y}_\mu\mathscr{Y}_\nu=0$.

★ 对应置换群 S_n 同一杨图$[\lambda]$的两杨表必可通过确定置换 R 相联系，而相应的杨算符满足 $\mathscr{Y}'=R\mathscr{Y}R^{-1}$. $\mathscr{Y}'\mathscr{Y}\neq 0$ 的充要条件是此 R 属于杨表 $\mathscr{Y}$，即 R 可以表为杨表 $\mathscr{Y}$ 的横向置换 P 和纵向置换 Q 的乘积. 注意 $P'=RPR^{-1}$ 和 $Q'=RQR^{-1}$ 分别是杨表 $\mathscr{Y}'$ 的横向置换和纵向置换，且 $R=PQ=P'Q'=Q'P$. 杨算符的平方为

$$\mathscr{Y}^2=\frac{n!}{d_{[\lambda]}(S_n)}\mathscr{Y}, \tag{6.5}$$

其中 $d_{[\lambda]}(S_n)$是对应该杨图的正则杨表数，由钩形规则(6.4)计算.

10. 自小到大写出 S_5 群对应杨图[3,2]的所有五个正则杨表 $\mathscr{Y}_\mu$，并计算这些正则杨表间的置换 $R_{\mu\nu}$，它把杨表 $\mathscr{Y}_\nu$ 变成杨表 $\mathscr{Y}_\mu$.

解

杨表$\mathscr{Y}_1$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5\\\cline{1-2}\end{array}$，杨表$\mathscr{Y}_2$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3&5\\\cline{1-2}\end{array}$，杨表$\mathscr{Y}_3$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\\hline 3&4\\\cline{1-2}\end{array}$，杨表$\mathscr{Y}_4$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2&5\\\cline{1-2}\end{array}$，杨表$\mathscr{Y}_5$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\\hline 2&4\\\cline{1-2}\end{array}$，

$R_{12}=(3\ 4)$，　$R_{13}=(3\ 4\ 5)$，　$R_{14}=(2\ 4\ 3)$，

$R_{15}=(2\ 4\ 5\ 3)$，　$R_{23}=(4\ 5)$，　$R_{24}=(2\ 3)$，

$R_{25}=(2\ 3)(4\ 5)$，　$R_{34}=(2\ 3)(4\ 5)$，　$R_{35}=(2\ 3)$，

$R_{45}=(4\ 5)$，　$R_{\mu\mu}=E$，　$R_{\mu\nu}=R_{\nu\mu}^{-1}$.

11. 计算联系下面两杨表的置换 R_{12}，并验算对应的两杨算符满足如下关系：

杨表$\mathscr{Y}_1=$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&\\\cline{1-2}\end{array}$，　杨表$\mathscr{Y}_2=$ $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3&\\\cline{1-2}\end{array}$，

$$\mathscr{Y}_1=\mathscr{P}_1\mathscr{Q}_1,\qquad \mathscr{Y}_2=\mathscr{P}_2\mathscr{Q}_2,$$

$$\mathscr{P}_1R_{12}=R_{12}\mathscr{P}_2,\quad \mathscr{Q}_1R_{12}=R_{12}\mathscr{Q}_2,\quad \mathscr{Y}_1R_{12}=R_{12}\mathscr{Y}_2.$$

解 $R_{12}=\begin{pmatrix}1&2&4&3\\1&2&3&4\end{pmatrix}=(3\ 4)$.

$$\mathcal{P}_1 R_{12} = [E + (1\,2) + (1\,3) + (2\,3) + (1\,2\,3) + (3\,2\,1)](3\,4)$$

$$= (3\,4) + (1\,2)(3\,4) + (1\,3\,4) + (2\,3\,4) + (1\,2\,3\,4) + (2\,1\,3\,4),$$

$$R_{12}\mathcal{P}_2 = (3\,4)[E + (1\,2) + (1\,4) + (2\,4) + (1\,2\,4) + (4\,2\,1)]$$

$$= (3\,4) + (1\,2)(3\,4) + (3\,4\,1) + (3\,4\,2) + (3\,4\,1\,2) + (3\,4\,2\,1),$$

$$\mathcal{Q}_1 R_{12} = [E - (1\,4)](3\,4) = (3\,4) - (1\,4\,3),$$

$$R_{12}\mathcal{Q}_2 = (3\,4)[E - (1\,3)] = (3\,4) - (4\,3\,1).$$

12. 已知对应下列两杨表的杨算符乘积满足 $\mathcal{Y}'\mathcal{Y}\neq 0$，设 R 把杨表 $\mathcal{Y}$ 变成杨表 $\mathcal{Y}'$，试计算 R，并把 R 表成属杨表 $\mathcal{Y}$ 的横向置换 P 和纵向置换 Q 的乘积 PQ，再把它表为属杨表 $\mathcal{Y}'$ 的横向置换 P' 和纵向置换 Q' 的乘积 $P'Q'$：

杨表 $\mathcal{Y}$ =

1	2	4	7
3	5	9	
6	8		

杨表 $\mathcal{Y}'$ =

1	2	3	4
5	6	7	
8	9		

解

$$R = \begin{pmatrix} 1\,2\,4\,7\,3\,5\,9\,6\,8 \\ 1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9 \end{pmatrix} = (4\,3\,5\,6\,8\,9\,7)$$

$$= (7\,4)(4\,3\,5\,6\,8\,9) = (7\,4)(3\,5)(5\,6\,8\,9\,4)$$

$$= (7\,4)(3\,5)(5\,6\,8\,9)(9\,4)$$

$$= (7\,4)(3\,5)(9\,5)(5\,6\,8)(9\,4)$$

$$= (7\,4)(3\,5\,9)(6\,8)(8\,5)(9\,4) = PQ,$$

$$P = (7\,4)(3\,5\,9)(6\,8), \qquad Q = (8\,5)(9\,4),$$

$$R = (4\,3\,5\,6\,8\,9\,7) = (4\,3)(5\,6\,8\,9\,7\,3) = (4\,3)(5\,6)(8\,9\,7\,3\,6)$$

$$= (4\,3)(5\,6)(8\,9)(6\,9\,7\,3) = (4\,3)(8\,9)(5\,6)(7\,6\,9)(7\,3)$$

$$= (4\,3)(8\,9)(5\,6\,7)(6\,9)(7\,3),$$

$$P' = (4\,3)(5\,6\,7)(8\,9) = RPR^{-1}, \qquad Q' = (9\,6)(7\,3) = RQR^{-1}.$$

13. 对应杨图[2,1]，试把非正则杨算符 $\mathcal{Y}$ 表成正则杨算符的组合，$\mathcal{Y} = \sum t_\mu \mathcal{Y}_\mu$，其中 t_μ 是 S_3 群群空间的矢量．

解 对应杨图[2,1]有六个杨表，两个正则杨表 $\mathcal{Y}_1$ 和 $\mathcal{Y}_2$，其余都是非正则杨表

杨表$\mathscr{Y}_1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}$，　杨表$\mathscr{Y}_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1}\end{array}$，　杨表$\mathscr{Y}_a = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \\ \cline{1-1}\end{array}$，

杨表$\mathscr{Y}_b = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \\ \cline{1-1}\end{array}$，　杨表$\mathscr{Y}_c = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}$，　杨表$\mathscr{Y}_d = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1}\end{array}$.

由杨算符的对称性质和福克条件得

$$\mathscr{Y}_a = (1\,3)\mathscr{Y}_1(1\,3) = -(1\,3)\mathscr{Y}_1 = [E+(2\,3)]\mathscr{Y}_1,$$

$$\mathscr{Y}_b = (1\,2)\mathscr{Y}_2(1\,2) = -(1\,2)\mathscr{Y}_2 = [E+(2\,3)]\mathscr{Y}_2,$$

$$\mathscr{Y}_c = \mathscr{Y}_c[(1\,2)+(1\,3)] = (1\,2)\mathscr{Y}_a + (1\,3)\mathscr{Y}_b = \mathscr{Y}_1 - (2\,3)\mathscr{Y}_2,$$

$$\mathscr{Y}_d = (2\,3)\mathscr{Y}_c(2\,3) = -(2\,3)\mathscr{Y}_c = -(2\,3)\mathscr{Y}_1 + \mathscr{Y}_2,$$

四、置换群的原始幂等元

★　在有限群 G 的群代数 $\mathscr{L}$ 中，满足 $e^2 = e \in \mathscr{L}$ 的矢量称为幂等元，满足 $e_\mu e_\nu = \delta_{\mu\nu} e_\mu$ 的矢量称为互相正交的幂等元. $\mathscr{L} e_\mu = \mathscr{L}_\mu$ 称为由幂等元 e_μ 生成的左理想，$e_\mu \mathscr{L} = R_\mu$ 称为由幂等元 e_μ 生成的右理想. 互相正交的幂等元所生成的左理想没有公共矢量. 在一个左理想 $\mathscr{L}_\mu$ 中任选一组基 $x_\rho \in \mathscr{L}_\mu$，元素 S 在此基中的矩阵形式 $Sx_\rho = \sum_\tau x_\tau D_{\tau\rho}(S)$ 构成群 G 的表示，称为该左理想 $\mathscr{L}_\mu$ 所对应的表示，也称该幂等元 e_μ 所对应的表示. 若两左理想对应的表示等价，则称此两左理想等价，若左理想 $\mathscr{L}_\mu$ 对应的表示为不可约表示，则此左理想称为最小左理想，该幂等元称为原始幂等元. 幂等元 e_μ 为原始幂等元的充要条件是对于群代数中的任意矢量 $t \in \mathscr{L}$，都有 $e_\mu t e_\mu = \lambda_t e_\mu$，其中 λ_t 是依赖于 t 的常数，可为零. 两原始幂等元 e_μ 和 e_ν 等价的充要条件是至少存在一个群元素 R，使 $e_\mu R e_\nu \neq 0$. 这些结论同样适用于右理想，只是右理想 R_μ 所对应的表示定义为 $x_\rho S = \sum_\tau \bar{D}_{\rho\tau}(S) x_\tau$.

★　对置换群，杨算符正比于原始幂等元. 对应不同杨图的杨算符互相正交，由它们产生的表示互为不等价的不可约表示，因此置换群的不可约表示由杨图描写.

当 $n \leqslant 4$ 时，对应置换群 S_n 同一杨图的正则杨算符互相正交，但当 $n \geqslant 5$ 时则不一定. 在 $n \geqslant 5$ 时，对于确定的杨图$[\lambda]$，可用下面方法定义 $d_{[\lambda]}(S_n)$ 个互相正交的原始幂等元. 为了书写简单，省略指标$[\lambda]$和 S_n. 设把正则杨表 $\mathscr{Y}_\nu$ 变成正则杨表 $\mathscr{Y}_\mu$ 的置换记作 $R_{\mu\nu}$. 若 $\mathscr{Y}_\mu \mathscr{Y}_\nu \neq 0$，则 $R_{\mu\nu} = P_\nu^{(\mu)} Q_\nu^{(\mu)} = P_\mu^{(\nu)} Q_\mu^{(\nu)}$，其中 $P_\nu^{(\mu)}$ 和 $Q_\nu^{(\mu)}$ 分别是属于杨表 $\mathscr{Y}_\nu$ 的横向置换和纵向置换，而 $P_\mu^{(\nu)}$ 和 $Q_\mu^{(\nu)}$ 分别是属于杨

表 $\mathcal{Y}_\mu$ 的横向置换和纵向置换. 令

$$P_{\mu\nu} = \begin{cases} P_\nu^{(\mu)}, & \text{当 } \mathcal{Y}_\mu \mathcal{Y}_\nu \neq 0, \\ 0, & \text{当 } \mathcal{Y}_\mu \mathcal{Y}_\nu = 0, \end{cases}$$

$$y_\mu = E - \sum_{\rho=\mu+1}^{d} P_{\mu\rho} y_\rho, \qquad y_d = E, \qquad e_\mu = \frac{d}{n!} \mathcal{Y}_\mu \mathcal{Y}_\mu. \tag{6.6}$$

e_μ 是 d 个互相正交的原始幂等元. 或令

$$Q_{\mu\nu} = \begin{cases} \delta(Q_\mu^{(\nu)}) Q_\mu^{(\nu)}, & \text{当 } \mathcal{Y}_\mu \mathcal{Y}_\nu \neq 0, \\ 0, & \text{当 } \mathcal{Y}_\mu \mathcal{Y}_\nu = 0, \end{cases}$$

$$y'_\nu = E - \sum_{\rho=1}^{\nu-1} y'_\rho Q_{\rho\nu}, \quad y'_1 = E, \quad e'_\nu = \frac{d}{n!} y'_\nu \mathcal{Y}_\nu .$$

e'_ν 是另一组 d 个互相正交的原始幂等元. 置换群的恒元 E 可分别表为这两组原始幂等元之和

$$E = \sum_{[\lambda],\mu} e_\mu^{[\lambda]} = \frac{1}{n!} \sum_{[\lambda]} d_{[\lambda]} \sum_{\mu}^{d_{[\lambda]}} \mathcal{Y}_\mu^{[\lambda]} y_\mu^{[\lambda]}$$

$$= \sum_{[\lambda],\nu} e'^{[\lambda]}_\nu = \frac{1}{n!} \sum_{[\lambda]} d_{[\lambda]} \sum_{\nu}^{d_{[\lambda]}} y'^{[\lambda]}_\nu \mathcal{Y}_\nu^{[\lambda]} . \tag{6.7}$$

注意 $n!/d_{[\lambda]}$ 正是该杨图 $[\lambda]$ 各格钩形数 h_{ij} 的乘积.

14. 具体写出 S_4 群恒元按杨算符的展开式.

解 $E = \dfrac{A}{24} + \dfrac{B}{12} + \dfrac{C}{8}$. 其中

$$A = \mathcal{Y}\,\boxed{\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array}} + \mathcal{Y}\,\boxed{\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}}$$

$= 2\{E + (1\ 2)(3\ 4) + (1\ 3)(2\ 4) + (1\ 4)(2\ 3) + (1\ 2\ 3) + (1\ 3\ 2)$.

$+ (1\ 2\ 4) + (1\ 4\ 2) + (1\ 3\ 4) + (1\ 4\ 3) + (2\ 3\ 4) + (2\ 4\ 3)\}$,

$$B = \mathcal{Y}\,\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} + \mathcal{Y}\,\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$= E + (1\ 2) + (3\ 4) + (1\ 2)(3\ 4) - (1\ 3) - (2\ 1\ 3)$

$- (4\ 3\ 1) - (2\ 1\ 4\ 3) - (2\ 4) - (1\ 2\ 4) - (3\ 4\ 2) - (1\ 2\ 3\ 4)$

$$
\begin{aligned}
&+(1\ 3)(2\ 4)+(1\ 3\ 2\ 4)+(3\ 1\ 4\ 2)+(1\ 4)(3\ 2)\\
&+E+(1\ 3)+(2\ 4)+(1\ 3)(2\ 4)-(1\ 2)-(3\ 1\ 2)\\
&-(4\ 2\ 1)-(3\ 1\ 4\ 2)-(3\ 4)-(1\ 3\ 4)-(2\ 4\ 3)-(1\ 3\ 2\ 4)\\
&+(1\ 2)(3\ 4)+(1\ 2\ 3\ 4)+(2\ 1\ 4\ 3)+(1\ 4)(2\ 3)\\
=&2\{E+(1\ 2)(3\ 4)+(1\ 3)(2\ 4)+(1\ 4)(3\ 2)\}-(1\ 2\ 3)-(1\ 3\ 2)\\
&-(1\ 2\ 4)-(1\ 4\ 2)-(1\ 3\ 4)-(1\ 4\ 3)-(2\ 3\ 4)-(2\ 4\ 3),
\end{aligned}
$$

$$
C=\mathscr{Y}_{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4\\\cline{1-1}\end{array}}+\mathscr{Y}_{\begin{array}{|c|c|}\hline 1&4\\\hline 2\\\cline{1-1} 3\\\cline{1-1}\end{array}}+\mathscr{Y}_{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}}+\mathscr{Y}_{\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1} 4\\\cline{1-1}\end{array}}
+\mathscr{Y}_{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}}+\mathscr{Y}_{\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1} 4\\\cline{1-1}\end{array}}
$$

$$
\begin{aligned}
=&2\{E+(1\ 2\ 3)+(1\ 3\ 2)-(2\ 3)(1\ 4)\}-(2\ 1\ 4)-(4\ 1\ 2)\\
&-(3\ 1\ 4)-(4\ 1\ 3)-(2\ 3\ 1\ 4)+(4\ 1\ 2\ 3)-(3\ 2\ 1\ 4)+(4\ 1\ 3\ 2)\\
&+2\{E+(1\ 2\ 4)+(1\ 4\ 2)-(2\ 4)(1\ 3)\}-(2\ 1\ 3)-(3\ 1\ 2)\\
&-(4\ 1\ 3)-(3\ 1\ 4)-(2\ 4\ 1\ 3)+(3\ 1\ 2\ 4)-(4\ 2\ 1\ 3)+(3\ 1\ 4\ 2)\\
&+2\{E+(1\ 4\ 3)+(1\ 3\ 4)-(4\ 3)(1\ 2)\}-(4\ 1\ 2)-(2\ 1\ 4)\\
&-(3\ 1\ 2)-(2\ 1\ 3)-(4\ 3\ 1\ 2)+(2\ 1\ 4\ 3)-(3\ 4\ 1\ 2)+(2\ 1\ 3\ 4)\\
=&6E-2(2\ 3)(1\ 4)-2(2\ 4)(1\ 3)-2(4\ 3)(1\ 2).
\end{aligned}
$$

15.　对于置换群 S_5 的杨图[2,2,1]，计算互相正交的原始幂等元.

解　S_5 群中，对应杨图[2,2,1]有五个正则杨表 $\mathscr{Y}_\alpha$：

$$
\mathscr{Y}_1\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline 5\\\cline{1-1}\end{array}\qquad
\mathscr{Y}_2\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&5\\\hline 4\\\cline{1-1}\end{array}\qquad
\mathscr{Y}_3\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&4\\\hline 5\\\cline{1-1}\end{array}\qquad
\mathscr{Y}_4\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&5\\\hline 4\\\cline{1-1}\end{array}\qquad
\mathscr{Y}_5\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&4\\\hline 2&5\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}
$$

经过验算，除了 $\mathscr{Y}_1\mathscr{Y}_5\neq 0$ 外，其他不同正则杨算符的乘积都为零. 把杨表 $\mathscr{Y}_5$ 变成杨表 $\mathscr{Y}_1$ 的置换是 $R_{15}=(4\ 2\ 3\ 5)=(2\ 5)(5\ 4)(2\ 3)$. 由公式算得 $\mathscr{Y}_1=E-(2\ 5)$，其余 $\mathscr{Y}_\mu$ 为 E. 因此互相正交的原始幂等元为

$$e_1 = \frac{1}{24}\mathscr{Y}_1[E-(2\ 5)],\quad e_\mu = \frac{1}{24}\mathscr{Y}_\mu,\quad 2\leqslant\mu\leqslant 5.$$

也可把 R_{15}表成 $R_{15}=(3\ 4)(4\ 2)(3\ 5)$，由此得另一组互相正交的原始幂等元为

$$e'_5 = \frac{1}{24}[E-(4\ 2)(3\ 5)]\mathscr{Y}_5,\qquad e'_\nu = \frac{1}{24}\mathscr{Y}_\nu,\quad 1\leqslant\nu\leqslant 4.$$

16. 对于置换群 S_6 的杨图[4,2]，计算互相正交的原始幂等元.

解 S_6 群中，对应杨图[4,2]有九个正则杨表，自小到大依次为

```
1 2 3 4   1 2 3 5   1 2 3 6   1 2 4 5   1 2 4 6
5 6       4 6       4 5       3 6       3 5

1 2 5 6   1 3 4 5   1 3 4 6   1 3 5 6
3 4       2 6       2 5       2 4
```

经过验算，只有三对杨算符乘积不为零：

$$\mathscr{Y}_1\mathscr{Y}_8\neq 0,\quad R_{18}=(2\ 5\ 6\ 4\ 3)=(6\ 4\ 3)(2\ 5)(5\ 3),$$

$$\mathscr{Y}_2\mathscr{Y}_9\neq 0,\quad R_{29}=(2\ 4\ 6\ 5\ 3)=(6\ 5\ 3)(2\ 4)(4\ 3),$$

$$\mathscr{Y}_3\mathscr{Y}_9\neq 0,\quad R_{39}=(2\ 4\ 5\ 3)=(5\ 3)(2\ 4)(4\ 3).$$

由此算得互相正交的原始幂等元为

$$e_1 = \frac{1}{80}\mathscr{Y}_1[E-(2\ 5)(3\ 6\ 4)],$$

$$e_2 = \frac{1}{80}\mathscr{Y}_2[E-(2\ 4)(3\ 6\ 5)],$$

$$e_3 = \frac{1}{80}\mathscr{Y}_3[E-(2\ 4)(3\ 5)],$$

$$e_\mu = \frac{1}{80}\mathscr{Y}_\mu,\qquad 4\leqslant\mu\leqslant 9.$$

也可把上述几个 $R_{\mu\omega}$ 表成另一形式. $R_{18}=(4\ 3\ 2)(5\ 6)(6\ 2)$，$R_{29}=(5\ 3\ 2)(4\ 6)(6\ 2)$，$R_{39}=(3\ 2)(4\ 5)(5\ 2)$，由此算得另一组互相正交的原始幂等元为

$$e'_8 = \frac{1}{80}[E+(2\ 6)]\mathscr{Y}_8,$$

$$e'_9 = \frac{1}{80}[E + (2\ 6) + (2\ 5)]\mathcal{Y}_9,$$

$$e'_\nu = \frac{1}{80}\mathcal{Y}_\nu, \qquad 1 \leqslant \nu \leqslant 7.$$

17. 对于置换群 S_6 的杨图[3,2,1]，计算互相正交的原始幂等元.

解 S_6 群中，对应杨图[3,2,1]有 16 个正则杨表，自小到大依次为

$$\begin{array}{llllllll}
1\,2\,3 & 1\,2\,3 & 1\,2\,4 & 1\,2\,4 & 1\,2\,5 & 1\,2\,5 & 1\,2\,6 & 1\,2\,6 \\
4\,5 & 4\,6 & 3\,5 & 3\,6 & 3\,4 & 3\,6 & 3\,4 & 3\,5 \\
6 & 5 & 6 & 5 & 6 & 4 & 5 & 4
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllllll}
1\,3\,4 & 1\,3\,4 & 1\,3\,5 & 1\,3\,5 & 1\,3\,6 & 1\,3\,6 & 1\,4\,5 & 1\,4\,6 \\
2\,5 & 2\,6 & 2\,4 & 2\,6 & 2\,4 & 2\,5 & 2\,6 & 2\,5 \\
6 & 5 & 6 & 4 & 5 & 4 & 3 & 3
\end{array}$$

经过验算，有八对杨算符乘积不为零：

$$\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_{11} \neq 0, \quad \mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_{12} \neq 0, \quad \mathcal{Y}_2\mathcal{Y}_{13} \neq 0, \quad \mathcal{Y}_2\mathcal{Y}_{14} \neq 0,$$

$$\mathcal{Y}_3\mathcal{Y}_{15} \neq 0, \quad \mathcal{Y}_4\mathcal{Y}_{16} \neq 0, \quad \mathcal{Y}_5\mathcal{Y}_{15} \neq 0, \quad \mathcal{Y}_6\mathcal{Y}_{16} \neq 0.$$

$$R_{1,11} = (2\ 4\ 5\ 3) = (2\ 4)(5\ 3)(3\ 4) = (4\ 5)(3\ 2)(2\ 5),$$

$$R_{1,12} = (2\ 4\ 6\ 5\ 3) = (5\ 3)(6\ 2)(2\ 4)(6\ 3) = (3\ 2)(5\ 4)(4\ 6)(5\ 2),$$

$$R_{2,13} = (2\ 4\ 6\ 3) = (2\ 4)(6\ 3)(3\ 4) = (4\ 6)(3\ 2)(2\ 6),$$

$$R_{2,14} = (2\ 4\ 5\ 6\ 3) = (6\ 3)(5\ 2)(2\ 4)(5\ 3) = (3\ 2)(6\ 4)(4\ 5)(6\ 2),$$

$$R_{3,15} = (2\ 3\ 6\ 5\ 4) = (5\ 4)(6\ 2)(2\ 3)(6\ 4) = (4\ 2)(5\ 3)(3\ 6)(5\ 2),$$

$$R_{4,16} = (2\ 3\ 5\ 6\ 4) = (6\ 4)(5\ 2)(2\ 3)(5\ 4) = (4\ 2)(6\ 3)(3\ 5)(6\ 2),$$

$$R_{5,15} = (2\ 3\ 6\ 4) = (6\ 2)(2\ 3)(6\ 4) = (4\ 3)(3\ 6)(4\ 2),$$

$$R_{7,16} = (2\ 3\ 5\ 4) = (5\ 2)(2\ 3)(5\ 4) = (4\ 3)(3\ 5)(4\ 2),$$

由此算得互相正交的原始幂等元为

$$e_1 = \frac{1}{45}\mathcal{Y}_1[E - (2\ 4)(3\ 5) - (2\ 6)(3\ 5)],$$

$$e_2 = \frac{1}{45}\mathscr{Y}_2[E - (2\ 4)(3\ 6) - (2\ 5)(3\ 6)],$$

$$e_3 = \frac{1}{45}\mathscr{Y}_3[E - (2\ 6)(4\ 5)],$$

$$e_4 = \frac{1}{45}\mathscr{Y}_4[E - (2\ 5)(4\ 6)],$$

$$e_5 = \frac{1}{45}\mathscr{Y}_5[E - (2\ 6)],$$

$$e_7 = \frac{1}{45}\mathscr{Y}_7[E - (2\ 5)],$$

$$e_\mu = \frac{1}{45}\mathscr{Y}_\mu,\quad \mu = 6 \text{ 或 } 8 \leqslant \mu \leqslant 16.$$

另一组互相正交的原始幂等元为

$$e'_{11} = \frac{1}{45}[E + (2\ 5)]\mathscr{Y}_{11},$$

$$e'_{12} = \frac{1}{45}[E - (2\ 5)(4\ 6)]\mathscr{Y}_{12},$$

$$e'_{13} = \frac{1}{45}[E + (2\ 6)]\mathscr{Y}_{13},$$

$$e'_{14} = \frac{1}{45}[E - (2\ 6)(4\ 5)]\mathscr{Y}_{14},$$

$$e'_{15} = \frac{1}{45}[E - (2\ 5)(3\ 6) - (2\ 4)(3\ 6)]\mathscr{Y}_{15},$$

$$e'_{16} = \frac{1}{45}[E - (2\ 6)(3\ 5) - (2\ 4)(3\ 5)]\mathscr{Y}_{16},$$

$$e'_\nu = \frac{1}{45}\mathscr{Y}_\nu,\quad 1 \leqslant \nu \leqslant 10.$$

18. 对于置换群 S_6 的杨图[3,3]和杨图[4,1,1]，计算互相正交的原始幂等元.

解　S_6 群中，对应杨图[3,3]有五个正则杨表，自小到大依次为

$$\begin{matrix}1\,2\,3 & 1\,2\,4 & 1\,2\,5 & 1\,3\,4 & 1\,3\,5\\ 4\,5\,6 & 3\,5\,6 & 3\,4\,6 & 2\,5\,6 & 2\,4\,6\end{matrix}$$

因为在正则杨表中数 6 只能填在右下角，所以 S_6 群表示[3,3]的正则杨表填充是

与 S_5 群表示[3,2]的正则杨表填充对应相同的，正交原始幂等元的计算也是一样的，这里只给出计算结果.

经过验算，除了 $\mathcal{Y}_1\mathcal{Y}_5 \neq 0$ 外，其他不同正则杨算符的乘积都为零. 把杨表 $\mathcal{Y}_5$ 变成杨表 $\mathcal{Y}_1$ 的置换是

$$R_{15} = (2\ 4\ 5\ 3) = (2\ 4)(5\ 3)(3\ 4) = (4\ 5)(3\ 2)(2\ 5).$$

由公式算得互相正交的原始幂等元为

$$e_1 = \frac{1}{24}\mathcal{Y}_1[E - (2\ 4)(3\ 5)], \quad e_\mu = \frac{1}{24}\mathcal{Y}_\mu, \quad 2 \leqslant \mu \leqslant 5.$$

对应杨图[4,1,1]有 10 个正则杨表，自小到大依次为

1 2 3 4	1 2 3 5	1 2 3 6	1 2 4 5	1 2 4 6
5	4	4	3	3
6	6	5	6	5

1 2 5 6	1 3 4 5	1 3 4 6	1 3 5 6	1 4 5 6
3	2	2	2	2
4	6	5	4	3

经过验算，它们对应的杨算符已经正交.

19. 举例说明最小左理想对应的原始幂等元不是惟一的.

解　以 S_3 群为例. 设 $\mathcal{Y}_1$ 是对应杨表 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$ 的正则杨算符，左乘 S_3 群的群代数 $\mathcal{L}$，可得最小左理想 $\mathcal{L}\mathcal{Y}_1 = \mathcal{L}_1$，而 $\mathcal{Y}_2$ 是对应杨表 $\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$ 的非正则杨算符. 易见 $\mathcal{Y}_2 = (1\ 3)\mathcal{Y}_1(1\ 3) = -(1\ 3)\mathcal{Y}_1$. 因为作为群代数，$-\mathcal{L}(1\ 3) = \mathcal{L}$，所以由 $\mathcal{Y}_1$ 和 $\mathcal{Y}_2$ 生成的左理想都是 $\mathcal{L}_1$，把杨算符 $\mathcal{Y}_1$ 和 $\mathcal{Y}_2$ 分别除以 3，都是对应最小左理想 $\mathcal{L}_1$ 的原始幂等元.

五、对应杨图[λ]的置换群不可约表示

本小节对确定的杨图讨论，为书写简单，省略指标[λ].

★　设 $R_{\mu\nu}$ 是把正则杨表 $\mathcal{Y}_\nu$ 变成正则杨表 $\mathcal{Y}_\mu$ 的置换，d 是对应该杨图的正则杨表数目，$(n!/d)$ 是该杨图各格钩形数的乘积. 定义标准基为

$$b_{\mu\nu} = \left(\frac{d}{n!}\right)^2 y_\mu \mathcal{Y}_\mu R_{\mu\nu} \mathcal{Y}_\nu y_\nu = \frac{d}{n!} R_{\mu\nu} \mathcal{Y}_\nu y_\nu, \quad b_{\mu\rho} b_{\tau\nu} = \delta_{\rho\tau} b_{\mu\nu}. \tag{6.8}$$

对固定的 ν，d 个基 $b_{\mu\nu}$ 架设左理想 $\mathscr{L}_\nu$，而对固定的 μ，d 个基 $b_{\mu\nu}$ 架设右理想 $\mathscr{R}_\mu$. 元素 S 在标准基中的表示矩阵取相同形式：

$$Sb_{\mu\nu} = \sum_\rho b_{\rho\nu} D_{\rho\mu}(S), \quad b_{\mu\nu} S = \sum_\rho D_{\nu\rho}(S) b_{\mu\rho}. \tag{6.9}$$

当然，也可选择另一套标准基

$$b'_{\mu\nu} = (d/n!)^2 y'_\mu \mathscr{Y}_\mu R_{\mu\nu} y'_\nu \mathscr{Y}_\nu = \frac{d}{n!} y'_\mu \mathscr{Y}_\mu R_{\mu\nu}, \quad b'_{\mu\rho} b'_{\tau\nu} = \delta_{\rho\tau} b'_{\mu\nu}.$$

由于两组基很相似，下面只讨论前一组基.

★　在标准基中可用下面列表法计算置换 S 的表示矩阵. 设 $y_\mu = \sum \delta_k T_k$，置换 T_k^{-1} 把正则杨表 $\mathscr{Y}_\mu$ 变成杨表 $\mathscr{Y}_{\mu k}$，置换 S 把正则杨表 $\mathscr{Y}_\nu$ 变成杨表 $\mathscr{Y}_\nu(S)$. 用如下方法定义系数 $A_{\mu k}^{(\nu)}$，若存在填在杨表 $\mathscr{Y}_\nu(S)$同一行的一对数，它们也填在杨表 $\mathscr{Y}_{\mu k}$同一列，则 $A_{\mu k}^{(\nu)} = 0$，若填在杨表 $\mathscr{Y}_\nu(S)$同一行的数都不填在杨表 $\mathscr{Y}_{\mu k}$同一列，则可把杨表 $\mathscr{Y}_{\mu k}$的填数作若干次纵向对换，使它们各行的填数分别与杨表 $\mathscr{Y}_\nu(S)$对应行填数相同，根据这纵向对换的次数为偶数或奇数定义 $A_{\mu k}^{(\nu)}$为 1 或 −1. 在标准基中置换 S 的表示矩阵元素 $D_{\mu\nu}(S)$等于$\sum \delta_k A_{\mu k}^{(\nu)}$，可用列表法进行具体计算. 表中各行标以杨表代数和$\sum \delta_k \{$杨表 $\mathscr{Y}_{\mu k}\}$，各列标以杨表 $\mathscr{Y}_\nu(S)$，比较行列的杨表，计算 $A_{\mu k}^{(\nu)}$.

★　在正交基 Φ_μ 中，相邻客体对换 $P_a = (a\ a+1)$的表示矩阵 $\bar{D}(P_a)$为若干个一维和二维子矩阵的直和，计算方法如下. 如果在正则杨表 $\mathscr{Y}_\mu$ 中填 a 的格子和填 $a+1$ 的格子在同一行或同一列，则对应一维子矩阵，$\bar{D}_{\mu\mu}(P_a) = 1$ 或 −1. 反之，如果填 a 的格子和填 $a+1$ 的格子既不在同一行又不在同一列，则交换 a 和 $a+1$ 得另一正则杨表，记作 $\mathscr{Y}_{\mu_a}$. 不失普遍性，可设 $\mathscr{Y}_\mu$ 小于 $\mathscr{Y}_{\mu_a}$，即在杨表 $\mathscr{Y}_\mu$ 中，填 a 格子在填 $a+1$ 格子的右上方，设从填 a 的格子出发向左或向下走 m 步到达填 $a+1$ 的格子，则 $\bar{D}(P_a)$有二维子矩阵，矩阵元为 $-\bar{D}_{\mu\mu}(P_a) = \bar{D}_{\mu_a\mu_a}(P_a) = 1/m$，$\bar{D}_{\mu\mu_a}(P_a) = \bar{D}_{\mu_a\mu}(P_a) = [1 - m^{-2}]^{1/2}$

★　从标准基变到正交基的相似变换矩阵 X 是上三角形矩阵：

$$D(P_a)X = X\bar{D}(P_a), \quad X_{\mu\nu} = 0, \quad 当\ \mu > \nu. \tag{6.10}$$

经过相似变换矩阵 X 的组合后，可得正交基 $\Phi_{\mu\nu}$，满足

$$\phi_{\mu\nu} = \sum_\rho b_{\rho\nu} X_{\rho\mu}, \quad S\phi_{\mu\nu} = \sum_\rho \phi_{\rho\nu} \bar{D}_{\rho\mu}(S),$$

$$\Phi_{\mu\nu} = \sum_\tau (X^{-1})_{\nu\tau} \phi_{\mu\tau} = \sum_{\rho\tau} (X^{-1})_{\nu\tau} b_{\rho\tau} X_{\rho\mu},$$

$$S\Phi_{\mu\nu} = \sum_{\rho}\Phi_{\rho\nu}\bar{D}_{\rho\mu}(S), \quad \Phi_{\mu\nu}S = \sum_{\rho}\bar{D}_{\nu\rho}(S)\Phi_{\mu\rho}. \tag{6.11}$$

20. 分别在标准基和正交基下计算 S_3 群不可约表示[2,1]自乘分解的克莱布施-戈登系数.

解 S_3 群有三个不等价不可约表示，[3]是恒等表示，$[1^3]$是反对称表示. 取相邻客体对换 P_1 和 P_2 作为群 S_3 的生成元，它们的表示矩阵已经知道：

$$D^{[3]}(P_1) = D^{[3]}(P_2) = 1, \quad D^{[1^3]}(P_1) = D^{[1^3]}(P_2) = -1.$$

用列表法计算生成元在表示[2,1]中的表示矩阵. 对杨图[2,1]，正则杨算符互相正交. 把正则杨表 $\mathscr{Y}_\mu$ 填在表的第一列. 分别把 P_1 和 P_2 作用在正则杨表上，得到杨表 $\mathscr{Y}_\nu(S)$，填入表中第一行. 比较行和列两个杨表，决定系数 $A_\mu^{(\nu)}$，它就是相应的表示矩阵.

表示[2,1]	P_1		P_2	
	2 1 3	2 3 1	1 3 2	1 2 3
1 2 3	1	−1	0	1
1 3 2	0	−1	1	0

因此得生成元在各不等价不可约表示中的表示矩阵为

$$D^{[2,1]}(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D^{[2,1]}(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[2,1]表示的自直乘分解式为

$$[2,1]\times[2,1] \simeq [3]\oplus[1^3]\oplus[2,1].$$

设约化的相似变换矩阵为 X，有

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于 $P_a{}^2 = E$，两矩阵的本征值都为 ± 1. 变换前两表示矩阵本征值为 1 的本征矢量分别为

$$P_1: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad P_2: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

共同本征矢量的转置是 $X_1^T = (2\ 1\ 1\ 2)$. 两矩阵本征值为 -1 的本征矢量分别为

$$P_1: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_2: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

共同本征矢量的转置是 $X_2^T = (0\ 1\ -1\ 0)$. X_1 和 X_2 分别是 X 矩阵的第一列和第二列. 设 X 矩阵的第三和第四列为 X_3 和 X_4. 由相似变换的第一式知，X_3 是左面矩阵本征值为 1 的本征矢量，转置后得 $X_3^T = (a\ b\ b\ 2b)$，代入第二式，计算矩阵的第三列，得 $X_4^T = (2b\ b\ b\ a)$. 再代入第一式，计算矩阵的第四列，得

$$\begin{pmatrix} a \\ a-b \\ a-b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-2b \\ -2b \\ -2b \\ -a-2b \end{pmatrix},$$

算得 $a = -b$. 取 $-a = b = 1$ 得克莱布施-戈登矩阵 X 为

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

希望读者能够接受这种计算. 如果不习惯, 令 X 矩阵为

$$X=\begin{pmatrix}2 & 0 & a_1 & b_1\\ 1 & 1 & a_2 & b_2\\ 1 & -1 & a_3 & b_3\\ 2 & 0 & a_4 & b_4\end{pmatrix}.$$

代入相似变换关系直接计算, 也会得到相同的结果, 只是稍繁一些. 值得提醒的是, 由于表示不是幺正的, X 的列矩阵间并不正交.

为了写出变换前后基的组合关系, 即克莱布施-戈登系数, 我们把变换前的基记作 $|\mu,\nu\rangle$, 变换后的基记作 $|[3]\rangle$、$|[1^3]\rangle$ 和 $|[2,1],\rho\rangle$, 其中 μ、ν 和 ρ 分别取 1 和 2, 得

$$\begin{aligned}
&|[3]\rangle=2|1,1\rangle+|1,2\rangle+|2,1\rangle+2|2,2\rangle,\\
&|[1^3]\rangle=|1,2\rangle-|2,1\rangle,\\
&|[2,1],1\rangle=-|1,1\rangle+|1,2\rangle+|2,1\rangle+2|2,2\rangle,\\
&|[2,1],2\rangle=2|1,1\rangle+|1,2\rangle+|2,1\rangle-|2,2\rangle.
\end{aligned}$$

对表示 $[3]$ 和 $[1^3]$, 正交基和标准基相同. 对表示 $[2,1]$, 生成元在正交基中的表示矩阵为

$$\overline{D}^{[2,1]}(P_1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \overline{D}^{[2,1]}(P_2)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}.$$

设约化 $[2,1]$ 自直乘表示的相似变换矩阵为 Z, 可选 Z 为实正交矩阵, 有

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}Z=Z\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 3\\ -\sqrt{3} & -1 & 3 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & 3 & -1 & \sqrt{3}\\ 3 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}Z=\frac{1}{2}Z\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{3}\\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}.$$

由于 $P_a^2=E$，两矩阵的本征值都为 ±1. 变换前两表示矩阵本征值为 1 的本征矢量分别为

$$P_1:\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix};\qquad P_2:\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\-1\\-1\\\sqrt{1/3}\end{pmatrix},$$

共同本征矢量的转置是 $Z_1^{\mathrm{T}}=(1\ 0\ 0\ 1)$. 两矩阵本征值为 -1 的本征矢量分别为

$$P_1:\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix};\quad P_2:\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\\1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix},$$

共同本征矢量的转置是 $Z_2^{\mathrm{T}}=(0\ 1\ -1\ 0)$. 归一化后，$Z_1$ 和 Z_2 分别是 Z 矩阵的第一列和第二列. 由实正交矩阵的条件，可设 Z 矩阵为

$$Z=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&a&0\\0&1&0&1\\0&-1&0&1\\1&0&-a&0\end{pmatrix}.$$

代入关于 P_2 表示矩阵的约化式，由第一行第四列得 $a=-1$. 为了明显写出克莱布施-戈登系数，我们仍把变换前的基记作 $|\mu,\nu\rangle$，变换后的基记作 $|[3]\rangle$，$|[1^3]\rangle$ 和 $|[2,1],\rho\rangle$，其中 μ，ν 和 ρ 分别取 1 和 2，得

$$|[3]\rangle=\sqrt{1/2}\{|1,1\rangle+|2,2\rangle\},$$

$$|[1^3]\rangle=\sqrt{1/2}\{|1,2\rangle-|2,1\rangle\},$$

$$|[2,1],1\rangle=\sqrt{1/2}\{-|1,1\rangle+|2,2\rangle\},$$

$$|[2,1],2\rangle=\sqrt{1/2}\{|1,2\rangle+|2,1\rangle\}.$$

21.　在 S_4 群群空间，计算不可约表示[3,1]的标准基，用列表法计算在此标准基

中相邻客体对换 P_a 的表示矩阵.

解　对应 S_4 群杨图[3,1]有三个正则杨表

$$\text{杨表}\,\mathcal{Y}_1=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4\\\cline{1-1}\end{array},\quad \text{杨表}\,\mathcal{Y}_2=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array},\quad \text{杨表}\,\mathcal{Y}_3=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array},$$

相应杨算符 $\mathcal{Y}_\mu$ 互相正交. 三个正则杨表间的置换变换分别为

$$R_{12}=R_{21}=(3\ 4),\quad R_{23}=R_{32}=(2\ 3),\quad R_{13}=R_{31}^{-1}=(2\ 4\ 3).$$

因此, 略去归一化因子 1/8 后, 得标准基

$$b_{11}=\mathcal{Y}_1,\quad b_{12}=(3\ 4)\mathcal{Y}_2,\quad b_{13}=(2\ 4\ 3)\mathcal{Y}_3,$$

$$b_{21}=(3\ 4)\mathcal{Y}_1,\quad b_{22}=\mathcal{Y}_2,\quad b_{23}=(2\ 3)\mathcal{Y}_3,$$

$$b_{31}=(2\ 3\ 4)\mathcal{Y}_1,\quad b_{32}=(2\ 3)\mathcal{Y}_2,\quad b_{33}=\mathcal{Y}_3,$$

其中每一列属同一个左理想, 每一行属同一个右理想. 注意

$$(3\ 4)\mathcal{Y}_2=\mathcal{Y}_1(3\ 4),\quad (2\ 4\ 3)\mathcal{Y}_3=(2\ 4)\mathcal{Y}_3=\mathcal{Y}_1(2\ 4),$$

$$(3\ 4)\mathcal{Y}_1=\mathcal{Y}_2(3\ 4),\quad (2\ 3\ 4)\mathcal{Y}_1=(4\ 2)\mathcal{Y}_1=\mathcal{Y}_3(4\ 2),$$

$$(2\ 3)\mathcal{Y}_3=\mathcal{Y}_2(2\ 3),\quad (2\ 3)\mathcal{Y}_2=\mathcal{Y}_3(2\ 3).$$

在标准基中相邻客体对换 P_a 的表示矩阵可用列表法计算:

	对换 P_1			对换 P_2			对换 P_3		
	2 1 3 4	2 1 4 3	2 3 4 1	1 3 2 4	1 3 4 2	1 2 4 3	1 2 4 3	1 2 3 4	1 4 3 2
1 2 3 4	1	0	−1	1	0	0	0	1	0
1 2 4 3	0	1	−1	0	0	1	1	0	0
1 3 4 2	0	0	−1	0	1	0	0	0	1

即在标准基中, 相邻客体对换 P_a 在表示[3,1]中的表示矩阵为

$$D(P_1)=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix},\qquad D(P_2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$D(P_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

22. 在正交基中，计算 S_4 群相邻客体对换 P_a 在不可约表示[3,1]中的实正交表示矩阵形式，计算此表示矩阵与上题标准基中的矩阵形式间的相似变换矩阵，并具体计算正交基 $\Phi_{\mu\nu}$，要求它们在左乘和右乘群元素时都按实正交表示变换.

解 根据公式，在正交基中，S_4 群相邻客体对换 P_a 在不可约表示[3,1]中的表示矩阵为

$$\bar{D}(P_1)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\qquad \bar{D}(P_2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1/2&\sqrt{3}/2\\0&\sqrt{3}/2&1/2\end{pmatrix},$$

$$\bar{D}(P_3)=\begin{pmatrix}-1/3&\sqrt{8}/3&0\\\sqrt{8}/3&1/3&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

设相似变换 X 把在标准基中的表示 $D(P_a)$ 变成正交基中的表示 $\bar{D}(P_a)$，则 X 是上三角矩阵. 为书写方便，添系数 $\sqrt{8}$：

$$D(P_a)X=X\bar{D}(P_a),\qquad X=\begin{pmatrix}\sqrt{8}&a_1&b_1\\0&a_2&b_2\\0&0&b_3\end{pmatrix},$$

它的三个列矩阵分别记作 X_a. 计算中略去全是零的行，由

$$D(P_3)X_1=-\frac{1}{3}X_1+\frac{\sqrt{8}}{3}X_2,\qquad \begin{pmatrix}0\\\sqrt{8}\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\sqrt{8}\\0\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{8}}{3}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},$$

算得 $a_1=1$、$a_2=3$. 由

$$D(P_2)X_2=-\frac{1}{2}X_2+\frac{\sqrt{3}}{2}X_3,\qquad \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},$$

算得 $b_1=b_2=\sqrt{3}$，$b_3=2\sqrt{3}$. 最后得相似变换矩阵 X 及其逆矩阵为

$$X=\begin{pmatrix}\sqrt{8} & 1 & \sqrt{3}\\ 0 & 3 & \sqrt{3}\\ 0 & 0 & 2\sqrt{3}\end{pmatrix},\quad X^{-1}=\sqrt{1/8}\begin{pmatrix}1 & 1/3 & -1/3\\ 0 & \sqrt{8}/3 & -\sqrt{2}/3\\ 0 & 0 & \sqrt{2/3}\end{pmatrix}.$$

按照(6.11)式，先作 X 矩阵的组合，得到三个左理想的基 $\phi_{\mu\nu}$，然后再作 X^{-1}的组合，得到九个正交基 $\Phi_{\mu\nu}([3,1])$. 通常为了使用方便，分别选归一化因子 $\sqrt{1/96}$和 $2\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned}\phi_{11}&=\sqrt{1/12}b_{11}\\ &=\sqrt{1/12}\{E+(1\ 2)+(1\ 3)+(2\ 3)+(1\ 2\ 3)+(3\ 2\ 1)-(1\ 4)\\ &\quad-(2\ 1\ 4)-(3\ 1\ 4)-(2\ 3)(1\ 4)-(2\ 3\ 1\ 4)-(3\ 2\ 1\ 4)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{21}&=\sqrt{1/96}\{b_{11}+3b_{21}\}=\sqrt{1/96}\{E+3(3\ 4)\}b_{11}\\ &=\sqrt{1/96}\{E+(1\ 2)-2(1\ 3)+(2\ 3)+(1\ 2\ 3)-2(3\ 2\ 1)\\ &\quad-(1\ 4)-(2\ 1\ 4)+2(3\ 1\ 4)-(2\ 3)(1\ 4)-(2\ 3\ 1\ 4)\\ &\quad+2(3\ 2\ 1\ 4)+3(3\ 4)+3(3\ 4)(1\ 2)+3(4\ 3\ 2)+3(4\ 3\ 1\ 2)\\ &\quad-3(3\ 4\ 1)-3(3\ 4\ 2\ 1)-3(3\ 2\ 4\ 1)-3(3\ 1)(4\ 2)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{31}&=\sqrt{1/32}\{b_{11}+b_{21}+2b_{31}\}=\sqrt{1/32}\{E+(3\ 4)+2(4\ 2)\}b_{11}\\ &=\sqrt{1/32}\{E-(1\ 2)+(2\ 3)-(1\ 2\ 3)-(1\ 4)+(2\ 1\ 4)\\ &\quad-(2\ 3)(1\ 4)+(2\ 3\ 1\ 4)+(3\ 4)-(3\ 4)(1\ 2)+(4\ 3\ 2)\\ &\quad-(4\ 3\ 1\ 2)-(3\ 4\ 1)+(3\ 4\ 2\ 1)-(3\ 2\ 4\ 1)+(3\ 1)(4\ 2)\\ &\quad+2(4\ 2)+2(4\ 2\ 3)-2(2\ 4\ 1)-2(2\ 3\ 4\ 1)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{12}&=\sqrt{1/12}b_{12}=\sqrt{1/12}(3\ 4)b_{22}\\ &=\sqrt{1/12}\{(3\ 4)+(3\ 4)(1\ 2)-(3\ 4\ 1)+(3\ 4\ 2)+(3\ 4\ 1\ 2)\\ &\quad+(3\ 4\ 2\ 1)-(4\ 3\ 1)-(4\ 3\ 2\ 1)-(4\ 1)-(4\ 2\ 3\ 1)\\ &\quad-(4\ 1)(3\ 2)-(4\ 2\ 1)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{22}&=\sqrt{1/96}\{b_{12}+3b_{22}\}=\sqrt{1/96}\{(3\ 4)+3E\}b_{22}\\ &=\sqrt{1/96}\{(3\ 4)+(3\ 4)(1\ 2)-2(3\ 4\ 1)+(3\ 4\ 2)+(3\ 4\ 1\ 2)\end{aligned}$$

$$-2(3\ 4\ 2\ 1)-(4\ 3\ 1)-(4\ 3\ 2\ 1)+2(4\ 1)-(4\ 2\ 3\ 1)$$
$$-(4\ 1)(3\ 2)+2(4\ 2\ 1)+3E+3(1\ 2)+3(2\ 4)+3(1\ 2\ 4)$$
$$-3(1\ 3)-3(2\ 1\ 3)-3(2\ 4)(1\ 3)-3(2\ 4\ 1\ 3)\}$$

$$\phi_{32}=\sqrt{1/32}\{b_{12}+b_{22}+2b_{32}\}=\sqrt{1/32}\{(3\ 4)+E+2(2\ 3)\}b_{22}$$
$$=\sqrt{1/32}\{(3\ 4)-(3\ 4)(1\ 2)+(3\ 4\ 2)-(3\ 4\ 1\ 2)-(4\ 3\ 1)$$
$$+(4\ 3\ 2\ 1)-(4\ 2\ 3\ 1)+(4\ 1)(3\ 2)+E-(1\ 2)+(2\ 4)$$
$$-(1\ 2\ 4)-(1\ 3)+(2\ 1\ 3)-(2\ 4)(1\ 3)+(2\ 4\ 1\ 3)$$
$$+2(2\ 3)+2(3\ 2\ 4)-2(2\ 3\ 1)-2(2\ 4\ 3\ 1)\}$$

$$\phi_{13}=\sqrt{1/12}b_{13}=\sqrt{1/12}(2\ 4)b_{33}$$
$$=\sqrt{1/12}\{(2\ 4)+(2\ 4)(1\ 3)+(2\ 4\ 1)+(2\ 4\ 3)+(2\ 4\ 1\ 3)$$
$$+(2\ 4\ 3\ 1)-(4\ 2\ 1)-(4\ 2\ 3\ 1)-(4\ 1)-(4\ 3\ 2\ 1)$$
$$-(4\ 1)(2\ 3)-(4\ 3\ 1)\},$$

$$\phi_{23}=\sqrt{1/96}\{b_{13}+3b_{23}\}=\sqrt{1/96}\{(2\ 4)+3(2\ 3)\}b_{33}$$
$$=\sqrt{1/96}\{(2\ 4)-2(2\ 4)(1\ 3)+(2\ 4\ 1)+(2\ 4\ 3)-2(2\ 4\ 1\ 3)$$
$$+(2\ 4\ 3\ 1)-(4\ 2\ 1)+2(4\ 2\ 3\ 1)-(4\ 1)-(4\ 3\ 2\ 1)$$
$$+2(4\ 1)(2\ 3)-(4\ 3\ 1)+3(2\ 3)+3(2\ 3\ 1)+3(2\ 3\ 4)$$
$$+3(2\ 3\ 4\ 1)-3(3\ 2\ 1)-3(3\ 1)-3(3\ 4\ 2\ 1)-3(3\ 4\ 1),$$

$$\phi_{33}=\sqrt{1/32}\{b_{13}+b_{23}+2b_{33}\}=\sqrt{1/32}\{(2\ 4)+(2\ 3)+2E\}b_{33}$$
$$=\sqrt{1/32}\{(2\ 4)-(2\ 4\ 1)+(2\ 4\ 3)-(2\ 4\ 3\ 1)-(4\ 2\ 1)$$
$$+(4\ 1)-(4\ 3\ 2\ 1)+(4\ 3\ 1)+(2\ 3)-(2\ 3\ 1)+(2\ 3\ 4)$$
$$-(2\ 3\ 4\ 1)-(3\ 2\ 1)+(3\ 1)-(3\ 4\ 2\ 1)+(3\ 4\ 1)$$
$$+2E+2(3\ 4)-2(1\ 2)-2(3\ 4)(1\ 2)\},$$

$$\Phi_{11}([3,1])=\sqrt{1/6}\{3\phi_{11}-\phi_{12}-\phi_{13}\}$$
$$=\sqrt{1/72}\{3b_{11}-(3\ 4)b_{22}-(2\ 4)b_{33}\}$$
$$=\sqrt{1/72}\{3E+3(1\ 2)+3(1\ 3)+3(2\ 3)+3(1\ 2\ 3)+3(3\ 2\ 1)$$
$$-(1\ 4)-(2\ 1\ 4)-(3\ 1\ 4)-(2\ 3)(1\ 4)-(2\ 3\ 1\ 4)-(3\ 2\ 1\ 4)$$

$$-(3\,4)-(3\,4)(1\,2)-(3\,4\,1)-(3\,4\,2)-(3\,4\,1\,2)-(3\,4\,2\,1)$$
$$-(2\,4)-(2\,4)(1\,3)-(2\,4\,1)-(2\,4\,3)-(2\,4\,1\,3)-(2\,4\,3\,1)\},$$

$$\begin{aligned}\Phi_{21}([3,1]) &= \sqrt{1/6}\{3\phi_{21}-\phi_{22}-\phi_{23}\}\\ &= (1/24)\{3[E+3(3\,4)]b_{11}-[(3\,4)+3E]b_{22}-[(2\,4)+3(2\,3)]b_{33}\}\\ &= (1/6)\{-(1\,4)-(2\,1\,4)-(2\,3)(1\,4)-(2\,3\,1\,4)-(3\,4\,1)\\ &\quad -(3\,4\,2\,1)-(3\,2\,4\,1)-(3\,1)(4\,2)-(2\,4)-(3\,4\,1\,2)\\ &\quad -(1\,2\,4)-(2\,3\,4)+2(3\,1\,4)+2(3\,2\,1\,4)+2(3\,4)\\ &\quad +2(3\,4)(1\,2)+2(4\,3\,2)+2(4\,3\,1\,2)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{31}([3,1]) &= \sqrt{1/6}\{3\phi_{31}-\phi_{32}-\phi_{33}\}\\ &= \sqrt{1/192}\{3[E-(3\,4)+2(4\,2)]b_{11}-[(3\,4)+E+2(2\,3)]b_{22}\\ &\quad -[(2\,4)+(2\,3)+2E]b_{33}\}\\ &= \sqrt{1/12}\{-(1\,4)+(2\,1\,4)-(2\,3)(1\,4)+(2\,3\,1\,4)-(3\,4\,1)\\ &\quad +(3\,4\,2\,1)-(3\,2\,4\,1)+(3\,1)(4\,2)+(4\,2)+(4\,2\,3)\\ &\quad -(2\,4\,1)-(2\,3\,4\,1)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{12}([3,1]) &= \sqrt{1/3}\{2\phi_{12}-\phi_{13}\} = (1/6)\{2(3\,4)b_{22}-(2\,4)b_{33}\}\\ &= (1/6)\{2(3\,4)+2(3\,4)(1\,2)+2(3\,4\,1)+2(3\,4\,2)\\ &\quad +2(3\,4\,1\,2)+2(3\,4\,2\,1)-(4\,3\,1)-(4\,3\,2\,1)-(4\,1)\\ &\quad -(4\,2\,3\,1)-(4\,1)(3\,2)-(4\,2\,1)-(2\,4)-(2\,4)(1\,3)\\ &\quad -(2\,4\,1)-(2\,4\,3)-(2\,4\,1\,3)-(2\,4\,3\,1)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{22}([3,1]) &= \sqrt{1/3}\{2\phi_{22}-\phi_{23}\}\\ &= \sqrt{1/288}\{2[(3\,4)+3E]b_{22}-[(2\,4)+3(2\,3)]b_{33}\}\\ &= \sqrt{1/288}\{2(3\,4)+2(3\,4)(1\,2)-(3\,4\,1)-(3\,4\,2)\\ &\quad -(3\,4\,1\,2)-(3\,4\,2\,1)-(4\,3\,1)-(4\,3\,2\,1)+5(4\,1)\\ &\quad -4(4\,2\,3\,1)-4(4\,1)(3\,2)+5(4\,2\,1)+6E+6(1\,2)\\ &\quad +5(2\,4)+5(1\,2\,4)-3(1\,3)-3(2\,1\,3)-4(2\,4)(1\,3)\\ &\quad -4(2\,4\,1\,3)-(2\,4\,3)-(2\,4\,3\,1)-3(2\,3)-3(2\,3\,1)\},\end{aligned}$$

$$\Phi_{32}([3,1]) = \sqrt{1/3}\{2\phi_{32}-\phi_{33}\}$$

$$= \sqrt{1/96}\{2[(3\,4) + E + 2(2\,3)]b_{22}$$
$$- [(2\,4) + (2\,3) + 2E]b_{33}\}$$
$$= \sqrt{1/96}\{(3\,4\,2) - (3\,4\,1\,2) + (2\,4) - (1\,2\,4) + (4\,2\,1)$$
$$- (4\,1) + (3\,4\,2\,1) - (3\,4\,1) - 2(4\,2\,3\,1) + 2(4\,1)(3\,2)$$
$$- 2(2\,4)(1\,3) + 2(2\,4\,1\,3) - 3(4\,3\,1) - 3(1\,3) + 3(2\,1\,3)$$
$$+ 3(4\,3\,2\,1) - 3(2\,3\,1) - 3(2\,4\,3\,1) + 3(2\,3) - 3(3\,2\,4)\},$$

$$\Phi_{13}([3,1]) = \phi_{13} = \sqrt{1/12}(2\,4)b_{33}$$
$$= \sqrt{1/12}\{(2\,4) + (2\,4)(1\,3) + (2\,4\,1) + (2\,4\,3) + (2\,4\,1\,3)$$
$$+ (2\,4\,3\,1) - (4\,2\,1) - (4\,2\,3\,1) - (4\,1) - (4\,3\,2\,1)$$
$$- (4\,1)(2\,3) - (4\,3\,1)\},$$

$$\Phi_{23}([3,1]) = \phi_{23} = \sqrt{1/96}\{(2\,4) + 3(2\,3)\}b_{33}$$
$$= \sqrt{1/96}\{(2\,4) + (2\,4\,1) + (2\,4\,3) + (2\,4\,3\,1) - (4\,2\,1)$$
$$- (4\,1) - (4\,3\,2\,1) - 2(2\,4)(1\,3) - 2(2\,4\,1\,3) + 2(4\,2\,3\,1)$$
$$+ 2(4\,1)(2\,3) - (4\,3\,1) + 3(2\,3) + 3(2\,3\,1) + 3(2\,3\,4)$$
$$+ 3(2\,3\,4\,1) - 3(3\,2\,1) - 3(3\,1) - 3(3\,4\,2\,1) - 3(3\,4\,1)\},$$

$$\Phi_{33}([3,1]) = \phi_{33} = \sqrt{1/32}\{(2\,4) + (2\,3) + 2E\}b_{33}$$
$$= \sqrt{1/32}\{(2\,4) - (2\,4\,1) + (2\,4\,3) - (2\,4\,3\,1) - (4\,2\,1)$$
$$+ (4\,1) - (4\,3\,2\,1) + (4\,3\,1) + (2\,3) - (2\,3\,1) + (2\,3\,4)$$
$$- (2\,3\,4\,1) - (3\,2\,1) + (3\,1) - (3\,4\,2\,1) + (3\,4\,1)$$
$$+ 2E + 2(3\,4) - 2(1\,2) - 2(3\,4)(1\,2)\}.$$

23. 在 S_4 群的群空间，计算不可约表示[2,1,1]的标准基和正交基，计算在此两组基中相邻客体对换 P_a 的表示矩阵.

解 对应 S_3 群杨图[2,1,1]有三个正则杨表

$$\text{杨表}\mathscr{Y}_1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad \text{杨表}\mathscr{Y}_2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad \text{杨表}\mathscr{Y}_3 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} 3 \\ \cline{1-1}\end{array}.$$

相应杨算符 $\mathscr{Y}_\mu$ 互相正交. 三个正则杨表间的置换变换分别为 $R_{12} = (2\,3)$，$R_{13} =$

(2 3 4)和 $R_{23}=(3\ 4)$，由此得标准基

$$b_{11}=\mathscr{Y}_1,\quad b_{12}=(2\ 3)\mathscr{Y}_2,\quad b_{13}=(2\ 3\ 4)\mathscr{Y}_3=-(4\ 2)\mathscr{Y}_3,$$

$$b_{21}=(2\ 3)\mathscr{Y}_1,\quad b_{22}=\mathscr{Y}_2,\quad b_{23}=(3\ 4)\mathscr{Y}_3,$$

$$b_{31}=(2\ 4\ 3)\mathscr{Y}_1=-(2\ 4)\mathscr{Y}_1,\quad b_{32}=(3\ 4)\mathscr{Y}_2,\quad b_{33}=\mathscr{Y}_3.$$

在标准基中相邻客体对换 P_a 的表示矩阵可用列表法计算：

	对换 P_1	对换 P_2	对换 P_3
	2 1　2 3　2 4 3　 1　 1 4　 4　 3	1 3　1 2　1 4 2　 3　 3 4　 4　 2	1 2　1 4　1 3 4　 2　 2 3　 3　 4
1 2 3 4	1　−1　1	0　1　0	−1　0　0
1 3 2 4	0　−1　0	1　0　0	0　0　1
1 4 2 3	0　0　−1	0　0　−1	0　1　0

即在标准基中，相邻客体对换 P_a 在表示[3,1]中的表示矩阵为

$$D(P_1)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad D(P_2)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$D(P_3)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

根据公式，在正交基中，P_a 在不可约表示[3,1]中的表示矩阵为

$$D(P_1)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad \overline{D}(P_2)=\begin{pmatrix}-1/2 & \sqrt{3}/2 & 0\\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$\overline{D}(P_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & \sqrt{8}/3 \\ 0 & \sqrt{8}/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

由 $D(P_a)X = X\overline{D}(P_a)$ 算得相似变换矩阵 X 及其逆矩阵为

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{1/3} & -\sqrt{1/6} \\ 0 & 2/\sqrt{3} & \sqrt{1/6} \\ 0 & 0 & \sqrt{3/2} \end{pmatrix}, \quad X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -\sqrt{1/12} \\ 0 & 0 & \sqrt{2/3} \end{pmatrix}.$$

按照(6.11)式，用此相似变换矩阵组合，再补上归一化因子$\sqrt{1/8}$，就可得到正交基：

$$\begin{aligned}
\Phi_{11}([2,1,1]) &= \sqrt{1/32}\{2b_{11} - b_{12} + b_{13}\} \\
&= \sqrt{1/32}\{2b_{11} - (2\ 3)b_{22} - (4\ 2)b_{33}\} \\
&= \sqrt{1/32}\{-(1\ 3) - (1\ 4) + (1\ 3\ 4) + (4\ 3\ 1) - (2\ 1\ 3) - (2\ 1\ 4) \\
&\quad + (2\ 1\ 3\ 4) + (2\ 1\ 4\ 3) - (2\ 3) + (3\ 2\ 4) - (3\ 1) \\
&\quad + (3\ 1\ 2\ 4) - (4\ 2) + (4\ 2\ 3) - (2\ 4\ 1) + (4\ 1\ 2\ 3) \\
&\quad + 2E - 2(3\ 4) + 2(1\ 2) - 2(1\ 2)(3\ 4)\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{21}([2,1,1]) &= \sqrt{1/96}\{2b_{11} + 4b_{21} - b_{12} - 2b_{22} + b_{13} + 2b_{23}\} \\
&= \sqrt{1/96}\{2[E + 2(2\ 3)]b_{11} - [(2\ 3) + 2E]b_{22} \\
&\quad + [-(4\ 2) + 2(3\ 4)]b_{33}\} \\
&= \sqrt{1/96}\{-(3\ 2\ 4) - (3\ 2\ 1\ 4) + (3\ 1\ 2\ 4) + (3\ 1\ 4) + (2\ 4) \\
&\quad - (1\ 2\ 4) - (1\ 4) + (4\ 2\ 1) - 2(2\ 3)(1\ 4) + 2(2\ 3\ 1\ 4) \\
&\quad - 2(3\ 2\ 4\ 1) + 2(3\ 1)(2\ 4) - 3(1\ 3) + 3(1\ 3\ 4) + 3(2\ 1\ 3) \\
&\quad - 3(2\ 1\ 3\ 4) + 3(2\ 3) - 3(2\ 3\ 1) - 3(2\ 3\ 4) + 3(2\ 3\ 4\ 1)\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{31}([2,1,1]) &= \sqrt{1/12}\{-2b_{11} + 2b_{21} + 6b_{31} + b_{12} - b_{22} \\
&\quad - 3b_{32} - b_{13} + b_{23} + 3b_{33}\} \\
&= \sqrt{1/12}\{2[-E + (2\ 3) - 3(2\ 4)]b_{11} - [-(2\ 3) + E + 3(3\ 4)]b_{22} \\
&\quad + [(4\ 2) + (3\ 4) + 3E]b_{33}\}
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{1/12}\{(1\ 4) - (4\ 3\ 1) - (2\ 1\ 4) + (2\ 1\ 4\ 3) - (2\ 3)(1\ 4)$$
$$+ (2\ 3\ 1\ 4) - (2\ 4) + (2\ 4)(1\ 3) + (2\ 4\ 1)$$
$$+ (2\ 4\ 3) - (2\ 4\ 1\ 3) - (2\ 4\ 3\ 1)\},$$

$$\Phi_{12}([2,1,1]) = \sqrt{1/96}\{3b_{12} - b_{13}\}$$
$$= \sqrt{1/96}\{3(2\ 3)b_{22} + (4\ 2)b_{33}\}$$
$$= \sqrt{1/96}\{(4\ 2) - (4\ 2\ 1) - (4\ 2\ 3) + (4\ 2\ 1\ 3) + (2\ 4\ 1)$$
$$- (4\ 1) - (4\ 1\ 2\ 3) + (4\ 1\ 3) - 2(2\ 3)(1\ 4) + 2(3\ 2\ 4\ 1)$$
$$- 2(2\ 3\ 1\ 4) + 2(3\ 1)(2\ 4) + 3(2\ 3\ 1) - 3(3\ 1) - 3(3\ 1\ 2\ 4)$$
$$+ 3(3\ 1\ 4) + 3(2\ 3) - 3(3\ 2\ 1) - 3(3\ 2\ 4) + 3(3\ 2\ 1\ 4)\},$$

$$\Phi_{22}([2,1,1]) = \sqrt{1/288}\{3b_{12} + 6b_{22} - b_{13} - 2b_{23}\}$$
$$= \sqrt{1/288}\{3[(2\ 3) + 2E]b_{22} - [-(4\ 2) + 2(3\ 4)]b_{33}\}$$
$$= \sqrt{1/288}\{-(3\ 2\ 4) + (3\ 2\ 1\ 4) - (4\ 2\ 3) + (4\ 2\ 1\ 3) + (4\ 1\ 2\ 3)$$
$$- (4\ 1\ 3) + (3\ 1\ 2\ 4) - (3\ 1\ 4) - 2(3\ 4) + 2(3\ 4)(1\ 2)$$
$$+ 3(2\ 3) - 3(3\ 2\ 1) - 3(2\ 3\ 1) + 3(3\ 1) - 4(2\ 3)(1\ 4)$$
$$+ 4(3\ 2\ 4\ 1) + 4(2\ 3\ 1\ 4) - 4(3\ 1)(2\ 4) - 5(1\ 4) - 5(2\ 4)$$
$$+ 5(1\ 2\ 4) + 5(4\ 2\ 1) - 6E - 6(1\ 2)\},$$

$$\Phi_{32}([2,1,1]) = (1/6)\{-3b_{12} + 3b_{22} + 9b_{32} + b_{13} - b_{23} - 3b_{33}\}$$
$$= (1/6)\{3[-(2\ 3) + E + 3(3\ 4)]b_{22} - [(4\ 2) + (3\ 4) + 3E]b_{33}\}$$
$$= (1/6)\{(2\ 3)(1\ 4) + (3\ 2\ 4) - (3\ 2\ 4\ 1) - (3\ 2\ 1\ 4) - (2\ 3\ 1\ 4)$$
$$- (3\ 1\ 2\ 4) + (3\ 1)(2\ 4) - (3\ 1\ 4) - (1\ 4) - (2\ 4)$$
$$+ (1\ 2\ 4) + (4\ 2\ 1) + 2(3\ 4) - 2(3\ 4)(1\ 2) - 2(3\ 4\ 1)$$
$$- 2(3\ 4\ 2) + 2(3\ 4\ 1\ 2) + 2(3\ 4\ 2\ 1)\},$$

$$\Phi_{13}([2,1,1]) = \sqrt{1/12}b_{13} = -\sqrt{1/12}(4\ 2)b_{33}$$
$$= \sqrt{1/12}\{-(4\ 2) + (4\ 2\ 1) + (4\ 2)(1\ 3) + (4\ 2\ 3) - (4\ 2\ 3\ 1).$$
$$- (4\ 2\ 1\ 3) - (2\ 4\ 1) + (4\ 1) + (2\ 4\ 1\ 3) + (4\ 1\ 2\ 3)$$
$$- (4\ 1)(2\ 3) - (4\ 1\ 3)\}$$

$$\Phi_{23}([2,1,1]) = (1/6)\{b_{13} + 2b_{23}\} = (1/6)\{-(4\ 2) + 2(3\ 4)\}b_{33}$$

$$= (1/6)\{-(4\ 2) + (4\ 2\ 1) + (4\ 2)(1\ 3) + (4\ 2\ 3) - (4\ 2\ 3\ 1) - (4\ 2\ 1\ 3) + (2\ 4\ 1) - (4\ 1) - (2\ 4\ 1\ 3) - (4\ 1\ 2\ 3) + (4\ 1)(2\ 3) + (4\ 1\ 3) + 2(3\ 4) - 2(3\ 4)(1\ 2) - 2(4\ 3\ 1) - 2(4\ 3\ 2) + 2(4\ 3\ 1\ 2) + 2(4\ 3\ 2\ 1)\},$$

$$\Phi_{33}([2,1,1]) = \sqrt{1/72}\{-b_{13} + b_{23} + 3b_{33}\}$$

$$= \sqrt{1/72}\{(4\ 2) + (3\ 4) + 3E\}b_{33}$$

$$= \sqrt{1/72}\{(4\ 2) - (4\ 2\ 1) - (4\ 2)(1\ 3) - (4\ 2\ 3) + (4\ 2\ 3\ 1) + (4\ 2\ 1\ 3) - (2\ 4\ 1) + (4\ 1) + (2\ 4\ 1\ 3) + (4\ 1\ 2\ 3) - (4\ 1)(2\ 3) - (4\ 1\ 3) + (3\ 4) - (3\ 4)(1\ 2) - (4\ 3\ 1) - (4\ 3\ 2) + (4\ 3\ 1\ 2) + (4\ 3\ 2\ 1) + 3E - 3(1\ 2) - 3(1\ 3) - 3(2\ 3) + 3(1\ 2\ 3) + 3(3\ 2\ 1)\}.$$

24. 在 S_4 群的群空间，计算不可约表示[2,2]的标准基和正交基，计算在此两组基中相邻客体对换 P_a 的表示矩阵.

解 对应 S_3 群杨图[2,2]有两个正则杨表

杨表$\mathscr{Y}_1$ =

1	2
3	4

杨表$\mathscr{Y}_2$ =

1	3
2	4

杨算符 $\mathscr{Y}_1$ 和 $\mathscr{Y}_2$ 互相正交. 联系两个正则杨表的置换变换为 $R_{12} = R_{21} = (2\ 3)$. 因此，略去归一化因子 1/12 后，得标准基

$$b_{11} = \mathscr{Y}_1, \qquad b_{12} = (2\ 3)\mathscr{Y}_2 = \mathscr{Y}_1(2\ 3),$$

$$b_{21} = (2\ 3)\mathscr{Y}_1 = \mathscr{Y}_2(2\ 3), \qquad b_{22} = \mathscr{Y}_2,$$

在标准基中相邻客体对换 P_a 的表示矩阵可用列表法计算：

	对换 P_1		对换 P_2		对换 P_3	
	21 34	23 14	13 24	12 34	12 43	14 23
12 34	1	−1	0	1	1	−1
13 24	0	−1	1	0	0	−1

即在标准基中，相邻客体对换 P_a 在表示[2,2]中的表示矩阵为

$$D(P_1)=D(P_3)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix},\qquad D(P_2)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

根据公式，在正交基中，P_a 在不可约表示[2,2]中的表示矩阵为

$$\bar{D}(P_1)=\bar{D}(P_3)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad \bar{D}(P_2)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}.$$

由 $D(P_a)X=X\bar{D}(P_a)$ 算得相似变换矩阵 X 及其逆矩阵为

$$X=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{1/3}\\ 0 & 2/\sqrt{3}\end{pmatrix},\qquad X^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1/2\\ 0 & \sqrt{3}/2\end{pmatrix}.$$

按照(6.11)式，补上归一化因子$\sqrt{1/12}$，得正交基：

$$\begin{aligned}
\Phi_{11}([2,2])=&\sqrt{1/48}\{2b_{11}-b_{12}\}=\sqrt{1/48}\{2b_{11}-(2\ 3)b_{22}\}\\
=&(1/4)\{2E+2(1\ 2)+2(3\ 4)+2(1\ 2)(3\ 4)+2(1\ 3)(2\ 4)\\
&+2(1\ 3\ 2\ 4)+2(3\ 1\ 4\ 2)+2(3\ 2)(1\ 4)-(1\ 3)-(2\ 1\ 3)\\
&-(4\ 3\ 1)-(2\ 1\ 4\ 3)-(2\ 4)-(1\ 2\ 4)-(3\ 4\ 2)\\
&-(1\ 2\ 3\ 4)-(2\ 3)-(2\ 3\ 1)-(3\ 2\ 4)-(3\ 1\ 2\ 4)\\
&-(2\ 1\ 3\ 4)-(3\ 4\ 1)-(2\ 1\ 4)-(1\ 4)\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{21}([2,2])=&\sqrt{1/144}\{2b_{11}+4b_{21}-b_{12}-2b_{22}\}\\
=&\sqrt{1/144}\{2[E+2(2\ 3)]b_{11}-[(2\ 3)+2E]b_{22}\}\\
=&(1/4)\{-(1\ 3)+(2\ 1\ 3)+(4\ 3\ 1)-(2\ 1\ 4\ 3)-(2\ 4)\\
&+(1\ 2\ 4)+(3\ 4\ 2)-(1\ 2\ 3\ 4)+(2\ 3)+(2\ 1\ 3\ 4)-(2\ 3\ 1)\\
&-(2\ 1\ 4)-(3\ 2\ 4)-(3\ 4\ 1)+(3\ 1\ 2\ 4)+(1\ 4)\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{12}([2,2])=&(1/4)b_{12}=(1/4)(2\ 3)b_{22}\\
=&(1/4)\{(2\ 3)+(2\ 3\ 1)+(3\ 2\ 4)+(3\ 1\ 2\ 4)-(3\ 2\ 1)\\
&-(3\ 1)-(3\ 2\ 1\ 4)-(3\ 1\ 4)-(2\ 3\ 4)-(2\ 3\ 4\ 1)-(2\ 4)\\
&-(2\ 4\ 1)+(2\ 1\ 3\ 4)+(3\ 4\ 1)+(2\ 1\ 4)+(1\ 4)\},
\end{aligned}$$

$$\Phi_{22}([2,2]) = \sqrt{1/48}\{b_{12} + 2b_{22}\} = \sqrt{1/48}\{(2\ 3) + 2E\}b_{22}$$

$$= \sqrt{1/48}\{(2\ 3) - (2\ 3\ 1) - (3\ 2\ 4) + (3\ 1\ 2\ 4) - (3\ 2\ 1) + (3\ 1) + (3\ 2\ 1\ 4) - (3\ 1\ 4) - (2\ 3\ 4) + (2\ 3\ 4\ 1) + (2\ 4) - (2\ 4\ 1) + (2\ 1\ 3\ 4) - (3\ 4\ 1) - (2\ 1\ 4) + (1\ 4) + 2E - 2(1\ 3)(2\ 4) - 2(1\ 2) - 2(3\ 1\ 4\ 2) - 2(3\ 4) - 2(1\ 3\ 2\ 4) + 2(1\ 2)(3\ 4) + 2(2\ 3)(1\ 4)\}.$$

25. 试计算具有正四面体对称性分子(例如甲烷)伸展振动波函数的对称基.

解 甲烷分子具有正四面体对称性，碳原子处于正四面体的中心，而四个氢原子处于正四面体的四个顶点，在图中分别记作 O 和 A_μ，$1\leqslant\mu\leqslant 4$. 碳氢键 OA_μ 的伸展振动用四个振动量子数描写，状态记作 $|a_1a_2a_3a_4\rangle$. 由于对称性，四个振动键的振动频率 ω 是相同的，此状态的能量为 $E=\sum_{j=1}^{4}(a_j+2)\hbar\omega$.

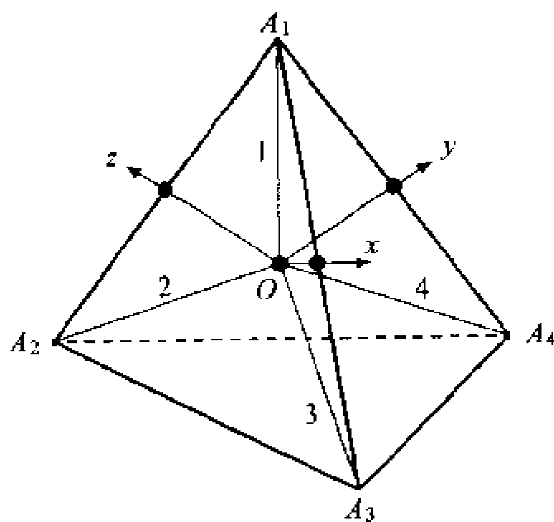


图 6.1　具有正四面体对称性分子的图形表示

正四面体的对称群是 T_d 群，它与置换群 S_4 同构. 群元素之间的对应关系可用下面方法建立起来. 设 T_d 群元素 R 把正四面体的四个顶点 A_j 分别变到 A_{r_j} 的位置，则可以把 R 与下面置换对应起来：

$$R \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{pmatrix}.$$

特别是从图 6.1 中可以看出，与相邻客体对换 P_a 相对应的 T_d 群元素如下. 绕 $(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)/\sqrt{2}$ 方向转动 π 角并作空间反演的变换对应 P_1，绕 $(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_3)/\sqrt{2}$ 方向转动 π 角并作空间反演的变换对应 P_2，绕 $(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)/\sqrt{2}$ 方向转动 π 角并作空间反演的变换对应 P_3. 由于两群同构，可以不必区分 T_d 群和置换群的元素.

在 21-24 题中，我们已经得到了 S_4 群群空间分属各不等价不可约表示的正交基 $\Phi_{\mu\nu}([\lambda])$，再补上两个一维表示的基

$$\Phi([4]) = E + (1\ 2) + (1\ 3) + (1\ 4) + (2\ 3) + (2\ 4) + (3\ 4)$$

$$+ (1\ 2)(3\ 4) + (1\ 3)(2\ 4) + (1\ 4)(2\ 3) + (1\ 2\ 3) + (1\ 3\ 2) + (1\ 2\ 4)$$
$$+ (1\ 4\ 2) + (1\ 3\ 4) + (1\ 4\ 3) + (2\ 3\ 4) + (2\ 4\ 3) + (1\ 2\ 3\ 4)$$
$$+ (1\ 2\ 4\ 3) + (1\ 3\ 4\ 2) + (1\ 3\ 2\ 4) + (1\ 4\ 2\ 3) + (1\ 4\ 3\ 2),$$

$$\Phi([1^4]) = E - (1\ 2) - (1\ 3) - (1\ 4) - (2\ 3) - (2\ 4) - (3\ 4)$$
$$+ (1\ 2)(3\ 4) + (1\ 3)(2\ 4) + (1\ 4)(2\ 3) + (1\ 2\ 3) + (1\ 3\ 2) + (1\ 2\ 4)$$
$$+ (1\ 4\ 2) + (1\ 3\ 4) + (1\ 4\ 3) + (2\ 3\ 4) + (2\ 4\ 3) - (1\ 2\ 3\ 4)$$
$$- (1\ 2\ 4\ 3) - (1\ 3\ 4\ 2) - (1\ 3\ 2\ 4) - (1\ 4\ 2\ 3) - (1\ 4\ 3\ 2).$$

把这些算符作用在振动状态$|a_1a_2a_3a_4\rangle$上，就得到具有正四面体对称性分子伸展振动波函数的对称基：

$$R\Phi_{\mu\nu}([\lambda])|a_1a_2a_3a_4\rangle = \sum_{\rho} \bar{D}^{[\lambda]}_{\rho\mu}(R)\Phi_{\rho\nu}([\lambda])|a_1a_2a_3a_4\rangle.$$

至于置换群元素 R 对振动状态$|a_1a_2a_3a_4\rangle$的作用可用下式计算. 设置换 R 为

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

则

$$R\ |a_1a_2a_3a_4\rangle = |a_{s_1}a_{s_2}a_{s_3}a_{s_4}\rangle.$$

注意置换 R 对状态的作用，只是改变振动量子数 a_j 的排列次序，并不改变它们的取值. 在实际计算中，如果四个振动量子数 a_j 互不相同，则存在 24 个独立状态，它们所张的空间与 S_4 群的群空间相同，我们得到 24 个分属各不等价不可约表示的对称基. 如果四个振动量子数 a_j 中有若干个取值相同，则线性独立的状态数减少，在 24 个对称基中会出现线性相关的态，或等于零的态.

26. 用列表法计算 S_5 群生成元(1 2)和(1 2 3 4 5)在不可约表示[2,2,1]中的表示矩阵.

解 利用 15 题结果，正交的正则杨算符是 $\mathscr{Y}_1[E-(2\ 5)]$和 $\mathscr{Y}_\mu$，$2\leqslant\mu\leqslant5$. 现在用列表法计算元素(1 2)和(1 2 3 4 5)在此表示中的表示矩阵.

元素(1 2)	2 1 3 4 5	2 1 3 5 4	2 3 1 4 5	2 3 1 5 4	2 4 1 5 3
1 2 1 5 3 4 − 3 4 5 2	1 − 0	0 − 0	−1 − 0	0 − 0	0 + 1
1 2 3 5 4	0	1	0	−1	1
1 3 2 4 5	0	0	−1	0	0
1 3 2 5 4	0	0	0	−1	0
1 4 2 5 3	0	0	0	0	−1

元素(1 2 3 4 5)	2 3 4 5 1	2 3 4 1 5	2 4 3 5 1	2 4 3 1 5	2 5 3 1 4
1 2 1 5 3 4 − 3 4 5 2	1 − 0	−1 − 0	0 − 1	0 − 0	0 − 0
1 2 3 5 4	1	0	−1	0	0
1 3 2 4 5	1	−1	−1	1	0
1 3 2 5 4	1	0	0	0	1
1 4 2 5 3	0	0	1	0	0

由表中得元素(1 2)和(1 2 3 4 5)在表示[2,2,1]中的表示矩阵为

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix}
1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

六、计算置换群不可约表示特征标的图解方法

★　置换群的不可约表示用杨图$[\lambda]$描写，而类用配分数(l)描写，计算类(l)在表示$[\lambda]$中的特征标的图解方法如下．把描写类的非零配分数l_j按任意次序排列，并顺序编号．把较小的l_j排在前面会便于计算．排定后，用l_1个1，l_2个2等，顺序按满足下面条件的所谓正则填充法填入杨图$[\lambda]$：

1）每个数字填完后，已填格子必须构成正则杨图，即上面和左面对齐，上面行的格数不小于下面行的格数，左面列的格数不小于右面列的格数．

2）填充同一数字的格子必须相连，且由填该数的最左下方的格子开始，沿向右或向上的方向，可以不回头地一次走遍填以该数的全部格子．这些格子所占行数决定该数字的填充宇称，行数为奇数时填充宇称为1，行数为偶数时填充宇称为-1．

如果能按正则填充法把全部数字都填入杨图，称为一次正则填充．在一次正则填充中，每个数字的填充宇称的乘积称为该次正则填充的填充宇称，最后把各次正则填充的填充宇称相加，即得类(l)在表示$[\lambda]$中的特征标$\chi^{[\lambda]}\{(l)\}$．如果不能按正则填充法把全部数字都填入杨图，则$\chi^{[\lambda]}\{(l)\}=0$．恒元单独构成类$(1^n)$，它的正则填充就是把$n$个自然数按正则杨表规则填入杨图，因此特征标正是正则杨表的数目，即表示的维数．通常恒元的特征标用钩形规则计算，而不用图解方法计算．

★　互为转置的杨图互称为关连杨图，它们的正则填充结果分别互为转置．但数字填充的列数变成了行数．因为把l个数按正则填充的规则填入杨图时，数字所占的行数和列数之和等于$(l+1)$，所以该数字在两个关连杨图的正则填充中的填充宇称之乘积等于$(-1)^{l+1}$，因此偶置换的类在两个关连杨图的表示中的特征标相同，而奇置换的类的特征标互差一负号．与恒等表示$[n]$互为关连杨图的表示是反对称表示$[1^n]$，在两个互为关连杨图的表示中，一个表示等价于另一个表示和反对称表示$[1^n]$的直乘．

27. 分别计算 S_6 群相邻客体对换 P_a 在下面两个等价的不可约表示中的实正交表示矩阵形式，并计算它们间的相似变换矩阵 X：

$$[2^3] \simeq [1^6] \times [3,3].$$

解 对应杨图$[2^3]$和杨图$[3,3]$的正则杨表分别为

12	12	13	13	14	123	124	125	134	135
34	35	24	25	25	456	356	346	256	246
56	46	56	46	36					

可见两组正则杨表互为转置，但逆序排列．按照公式，相邻客体对换 P_a 在表示$[2^3]$和表示$[1^6]\times[3,3]$中的表示矩阵分别为

表示$[2^3]$　　　　表示$[1^6]\times[3,3]$

$$P_1:\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$P_2:\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&0&\sqrt{3}&0&0\\0&-1&0&\sqrt{3}&0\\\sqrt{3}&0&1&0&0\\0&\sqrt{3}&0&1&0\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix},\quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&0&0&0&0\\0&1&0&-\sqrt{3}&0\\0&0&1&0&-\sqrt{3}\\0&-\sqrt{3}&0&-1&0\\0&0&-\sqrt{3}&0&-1\end{pmatrix},$$

$$P_3:\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&0&0&0&0\\0&-3&0&0&0\\0&0&-3&0&0\\0&0&0&-1&\sqrt{8}\\0&0&0&\sqrt{8}&1\end{pmatrix},\quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-\sqrt{8}&0&0&0\\-\sqrt{8}&-1&0&0&0\\0&0&-3&0&0\\0&0&0&-3&0\\0&0&0&0&3\end{pmatrix},$$

$$P_4:\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0\\ \sqrt{3} & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{3} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix},\quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & -\sqrt{3} & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{3}\\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix},$$

$$P_5:\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

两组矩阵中，对应矩阵可通过两次变换得到，先把所有非对角元改号，再关于反对角线(自左下角至右上角)作转置. 因为表示$[2^3]$的非对角元只在12，13，24，34和45行列出现，所以改变第一和第四行和列的符号就可使它们全改号. 由此可见，相似变换矩阵可表为两矩阵的乘积，$X=YZ$，Y是对角矩阵，第一和第四对角元为 -1，其余对角元为1，Z只在反对角线上的元素不为零，而为1，即

$$X^{-1}[2^3]X=[1^6]\times[3,3],\quad X=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

这方法对所有互为关连杨图的表示都适用.

28. 用图解方法计算置换群 S_5 表示$[2,2,1]$的特征标.

解　列表计算各类在表示$[2,2,1]$中的特征标.

类	(1^5)	$(1^3,2)$	$(1,2^2)$	$(1^2,3)$	$(2,3)$	$(1,4)$	(5)
正则填充	略	1 4 2 4 3	1 3 2 3 2	1 2 3 3 3	1 1 2 2 2	1 2 2 2 2	无
填充宇称		-1	1	-1	-1	1	
$\chi^{[3,2]}[(l)]$	5	-1	1	-1	-1	1	0

29. 用图解方法计算 S_6 群各类在下列不可约表示中的特征标：

(1) 表示[3,2,1]，(2) 表示[3,3]，(3) 表示$[2^3]$.

解 在表中，用图解方法计算 S_6 群在若干表示中的特征标，表中列出了允许的正则填充，空缺代表无正则填充. 恒元(1^n)的正则填充略去. 杨图$[2^3]$是杨图[3,3]的关连杨图，它们的正则填充可由在表示[3,3]的正则填充转置得到，不再列出. 注意表示[3,2,1]的杨图是自关连杨图，奇置换的类在此表示中的特征标为零.

S_6 群不可约表示特征标

类	[3,2,1]	[3,3]	$[2^3]$	正则填充					
(1^6)	16	5	5	略					
$(2,1^4)$	0	1	−1		1 2 3 4 5 5	1 2 4 3 5 5	1 3 4 2 5 5	1 2 5 3 4 5	1 3 5 2 4 5
$(2^2,1^2)$	0	1	1			1 2 4 3 3 4	1 3 3 2 4 4	1 3 4 2 3 4	
(2^3)	0	−3	3	1 2 3 4 4 4	1 4 4 2 4 3		1 2 3 4 4 4	1 2 4 3 4 4	1 3 4 2 4 4
$(3,1^3)$	−2	−1	−1			1 1 3 2 2 3	1 2 2 1 3 3	1 2 3 1 2 3	
(3,2,1)	0	1	−1	1 2 2 3 3 3	1 3 3 2 3 2		1 2 2 3 3 3		
(3^2)	−2	2	2	1 1 1 2 2 2	1 2 2 1 2 1		1 1 1 2 2 2	1 1 2 1 2 2	
$(4,1^2)$	0	−1	1			1 2 3 3 3 3			
(4,2)	0	−1	−1			1 1 2 2 2 2			
(5,1)	1	0	0	1 2 2 2 2 2					
(6)	0	0	0						

30. 用图解法计算 S_3 群、S_4 群、S_5 群、S_6 群和 S_7 群的特征标表.

解 这里不再列出正则填充的具体形式，只列出计算结果. 反对称表示$[1^n]$的特征标表明各类置换的偶奇性. 表中 $n(l)$表各类(l)中所包含元素数目. 为节省篇幅，互为关连杨图的表示只列出一个.

S_3 群不可约表示特征标

类	$n(l)$	$[1^3]$	$[2,1]$
(1^3)	1	1	2
$(2,1)$	3	−1	0
(3)	2	1	−1

S_4 群不可约表示特征标

类	$n(l)$	$[1^4]$	$[3,1]$	$[2,2]$
(1^4)	1	1	3	2
$(2,1^2)$	6	−1	1	0
(2^2)	3	1	−1	2
$(3,1)$	8	1	0	−1
(4)	6	−1	−1	0

S_5 群不可约表示特征标

类	$n(l)$	$[1^5]$	$[4,1]$	$[3,2]$	$[3,1^2]$
(1^5)	1	1	4	5	6
$(2,1^3)$	10	−1	2	1	0
$(2^2,1)$	15	1	0	1	−2
$(3,1^2)$	20	1	1	−1	0
$(3,2)$	20	−1	−1	1	0
$(4,1)$	30	−1	0	−1	0
(5)	24	1	−1	0	1

S_6 群不可约表示特征标

类	$n(l)$	$[1^6]$	$[5,1]$	$[4,2]$	$[4,1^2]$	$[3,3]$	$[3,2,1]$
(1^6)	1	1	5	9	10	5	16
$(2,1^4)$	15	−1	3	3	2	1	0
$(2^2,1^2)$	45	1	1	1	−2	1	0
(2^3)	15	−1	−1	3	−2	−3	0
$(3,1^3)$	40	1	2	0	1	−1	−2
$(3,2,1)$	120	−1	0	0	−1	1	0
(3^2)	40	1	−1	0	1	2	−2
$(4,1^2)$	90	−1	1	−1	0	−1	0
$(4,2)$	90	1	−1	1	0	−1	0
$(5,1)$	144	1	0	−1	0	0	1
(6)	120	−1	−1	0	1	0	0

S_7 群不可约表示特征标

类	$n(l)$	$[1^7]$	$[6,1]$	$[5,2]$	$[5,1^2]$	$[4,3]$	$[4,2,1]$	$[4,1^3]$	$[3^2,1]$
(1^7)	1	1	6	14	15	14	35	20	21
$(2,1^5)$	21	−1	4	6	5	4	5	0	1
$(2^2,1^3)$	105	1	2	2	−1	2	−1	−4	1
$(2^3,1)$	105	−1	0	2	−3	0	1	0	−3
$(3,1^4)$	70	1	3	2	3	−1	−1	2	3
$(3,2,1^2)$	420	−1	1	0	−1	1	−1	0	1
$(3,2^2)$	210	1	−1	2	−1	−1	−1	2	1
$(3^2,1)$	280	1	0	−1	0	2	−1	2	0
$(4,1^3)$	210	−1	2	0	1	−2	−1	0	1
$(4,2,1)$	630	1	0	0	−1	0	1	0	−1
$(4,3)$	420	−1	−1	0	1	1	−1	0	−1
$(5,1^2)$	504	1	1	−1	0	−1	0	0	1
$(5,2)$	504	−1	−1	1	0	−1	0	0	1
$(6,1)$	840	−1	0	−1	0	0	1	0	0
(7)	720	1	−1	0	1	0	0	−1	0

七、置换群不可约表示的内积

★　置换群 S_n 不可约表示的直乘称为置换群表示的内积，它们一般是置换群 S_n 的可约表示，可按 S_n 群不可约表示分解，得到置换群的克莱布施-戈登级数．与通常有限群一样，置换群的克莱布施-戈登级数可用表示的特征标公式来计算，没有专门的图解方法．计算的公式是

$$[\lambda]\times[\tau]\simeq\bigoplus_{\omega}a([\lambda],[\tau],[\omega])\,[\omega],$$

$$a([\lambda],[\tau],[\omega])=\frac{1}{n!}\sum_{R\in S_n}\chi^{[\lambda]}(R)\chi^{[\tau]}(R)\chi^{[\omega]}(R). \qquad (6.12)$$

其中用到了置换群表示的特征标是实数．因此，系数 $a([\lambda],[\tau],[\omega])$ 关于三个表示是对称的．

★　置换群的克莱布施-戈登级数有几个明显的共同性质．设$[\lambda]$和$[\tilde{\lambda}]$互为关连

杨图，则有

$$[n]\times[\lambda]=[\lambda],\ [1^n]\times[\lambda]\simeq[\tilde{\lambda}],\ [\lambda]\times[\tilde{\tau}]\simeq[\tilde{\lambda}]\times[\tau],$$

$$\begin{aligned}a([\lambda],[\tau],[\omega])&=a([\tilde{\lambda}],[\tilde{\tau}],[\omega])=a([\tilde{\lambda}],[\tau],[\tilde{\omega}])\\&=a([\lambda],[\tilde{\tau}],[\tilde{\omega}]).\end{aligned}\tag{6.13}$$

两不可约表示直乘分解中包含恒等表示的充要条件是两表示等价，两不可约表示直乘分解中包含反对称表示的充要条件是两表示对应的杨图互为关连杨图，而且在这直乘分解中恒等表示或反对称表示只出现一次.

31. 利用表示的特征标计算 S_3 群、S_4 群、S_5 群、S_6 群和 S_7 群各不可约表示直乘分解的克莱布施-戈登级数.

解 由于公式(6.13)，我们只需计算独立的克莱布施-戈登级数，由它们可得其他的克莱布施-戈登级数. 因计算方法很清楚，这里只列出计算结果.

S_3 群：

$$[2,1]\times[2,1]\simeq[3]\oplus[1^3]\oplus[2,1].$$

S_4 群：

$$[3,1]\times[3,1]\simeq[4]\oplus[3,1]\oplus[2^2]\oplus[2,1^2],$$

$$[3,1]\times[2^2]\simeq[3,1]\oplus[2,1^2],$$

$$[2^2]\times[2^2]\simeq[4]\oplus[2^2]\oplus[1^4].$$

S_5 群：

$$[4,1]\times[4,1]\simeq[5]\oplus[4,1]\oplus[3,2]\oplus[3,1^2],$$

$$[4,1]\times[3,2]\simeq[4,1]\oplus[3,2]\oplus[3,1^2]\oplus[2^2,1],$$

$$[4,1]\times[3,1^2]\simeq[4,1]\oplus[3,2]\oplus[3,1^2]\oplus[2^2,1]\oplus[2,1^3],$$

$$[3,2]\times[3,2]\simeq[5]\oplus[4,1]\oplus[3,2]\oplus[3,1^2]\oplus[2^2,1]\oplus[2,1^3],$$

$$[3,2]\times[3,1^2]\simeq[4,1]\oplus[3,2]\oplus2[3,1^2]\oplus[2^2,1]\oplus[2,1^3],$$

$$\begin{aligned}[3,1^2]\times[3,1^2]\simeq&[5]\oplus[4,1]\oplus2[3,2]\oplus[3,1^2]\oplus2[2^2,1]\oplus[2,1^3]\\&\oplus[1^5].\end{aligned}$$

S_6 群：

$$[5,1]\times[5,1]\simeq[6]\oplus[5,1]\oplus[4,2]\oplus[4,1^2],$$

$$[5,1]\times[4,2]\simeq[5,1]\oplus[4,2]\oplus[4,1^2]\oplus[3^2]\oplus[3,2,1],$$

$$[5,1]\times[4,1^2]\simeq[5,1]\oplus[4,2]\oplus[4,1^2]\oplus[3,2,1]\oplus[3,1^3],$$

$$[5,1]\times[3^2]\simeq[4,2]\oplus[3,2,1],$$

$$[5,1]\times[3,2,1]\simeq[4,2]\oplus[4,1^2]\oplus[3^2]\oplus 2[3,2,1]\oplus[2^3]\oplus[3,1^3]\oplus[2^2,1^2],$$

$$[4,2]\times[4,2]\simeq[6]\oplus[5,1]\oplus 2[4,2]\oplus[4,1^2]\oplus 2[3,2,1]\oplus[2^3]\oplus[3,1^3],$$

$$[4,2]\times[4,1^2]\simeq[5,1]\oplus[4,2]\oplus 2[4,1^2]\oplus[3^2]\oplus 2[3,2,1]\oplus[3,1^3]\oplus[2^2,1^2],$$

$$[4,2]\times[3^2]\simeq[5,1]\oplus[4,1^2]\oplus[3^2]\oplus[3,2,1]\oplus[2^2,1^2],$$

$$[4,2]\times[3,2,1]\simeq[5,1]\oplus 2[4,2]\oplus 2[4,1^2]\oplus[3^2]\oplus 3[3,2,1]\oplus[2^3]\oplus 2[3,1^3]\oplus 2[2^2,1^2]\oplus[2,1^4],$$

$$[4,1^2]\times[4,1^2]\simeq[6]\oplus[5,1]\oplus 2[4,2]\oplus[4,1^2]\oplus[3^2]\oplus 2[3,2,1]\oplus[2^3]\oplus[3,1^3]\oplus[2^2,1^2]\oplus[2,1^4],$$

$$[4,1^2]\times[3^2]\simeq[4,2]\oplus[4,1^2]\oplus[3,2,1]\oplus[2^3]\oplus[3,1^3],$$

$$[4,1^2]\times[3,2,1]\simeq[5,1]\oplus 2[4,2]\oplus 2[4,1^2]\oplus[3^2]\oplus 4[3,2,1]\oplus[2^3]\oplus 2[3,1^3]\oplus 2[2^2,1^2]\oplus[2,1^4],$$

$$[3^2]\times[3^2]\simeq[6]\oplus[4,2]\oplus[2^3]\oplus[3,1^3],$$

$$[3^2]\times[3,2,1]\simeq[5,1]\oplus[4,2]\oplus[4,1^2]\oplus 2[3,2,1]\oplus[3,1^3]\oplus[2^2,1^2]\oplus[2,1^4],$$

$$[3,2,1]\times[3,2,1]\simeq[6]\oplus 2[5,1]\oplus 3[4,2]\oplus 4[4,1^2]\oplus 2[3^2]\oplus 5[3,2,1]\oplus 2[2^3]\oplus 4[3,1^3]\oplus 3[2^2,1^2]\oplus 2[2,1^4]\oplus[1^6].$$

S_7 群:

$$[6,1]\times[6,1]=[7]\oplus[6,1]\oplus[5,2]\oplus[5,1^2],$$

$$[6,1]\times[5,2]=[6,1]\oplus[5,2]\oplus[5,1^2]\oplus[4,3]\oplus[4,2,1],$$

$$[6,1]\times[5,1^2]=[6,1]\oplus[5,2]\oplus[5,1^2]\oplus[4,2,1]\oplus[4.1^3],$$

$$[6,1]\times[4,3]=[5,2]\oplus[4,3]\oplus[4,2,1]\oplus[3^2,1]$$

$$[6,1]\times[4,2,1]=[5,2]\oplus[5,1^2]\oplus[4,3]\oplus 2[4,2,1]\oplus[4,1^3]\oplus[3^2,1]\oplus[3,2,1^2]\oplus[3,2^2],$$

$$[6,1]\times[4,1^3]=[5,1^2]\oplus[4,2,1]\oplus[4,1^3]\oplus[3,2,1^2]\oplus[3,1^4],$$

$[6,1]\times[3^2,1]=[4,3]\oplus[4,2,1]\oplus[3^2,1]\oplus[3,2,1^2]\oplus[3,2^2]$,

$[5,2]\times[5,2]=[7]\oplus[6,1]\oplus 2[5,2]\oplus[5,1^2]\oplus[4,3]\oplus 2[4,2,1]$
$\quad\oplus[4,1^3]\oplus[3^2,1]\oplus[3,2^2]$,

$[5,2]\times[5,1^2]=[6,1]\oplus[5,2]\oplus 2[5,1^2]\oplus[4,3]\oplus 2[4,2,1]\oplus[4,1^3]$
$\quad\oplus[3^2,1]\oplus[3,2,1^2]$,

$[5,2]\times[4,3]=[6,1]\oplus[5,2]\oplus[5,1^2]\oplus[4,3]\oplus 2[4,2,1]\oplus[3^2,1]$
$\quad\oplus[3,2^2]\oplus[3,2,1^2]$,

$[5,2]\times[4,2,1]=[6,1]\oplus 2[5,2]\oplus 2[5,1^2]\oplus 2[4,3]\oplus 4[4,2,1]$
$\quad\oplus 2[4,1^3]\oplus 2[3^2,1]\oplus 2[3,2^2]\oplus 3[3,2,1^2]\oplus[2^3,1]\oplus[3,1^4]$,

$[5,2]\times[4,1^3]=[5,2]\oplus[5,1^2]\oplus 2[4,2,1]\oplus 2[4,1^3]\oplus[3^2,1]\oplus[3,2^2]$
$\quad\oplus 2[3,2,1^2]\oplus[3,1^4]\oplus[2^2,1^3]$,

$[5,2]\times[3^2,1]=[5,2]\oplus[5,1^2]\oplus[4,3]\oplus 2[4,2,1]\oplus[4,1^3]\oplus 2[3^2,1]$
$\quad\oplus[3,2^2]\oplus 2[3,2,1^2]\oplus[2^3,1]\oplus[2^2,1^3]$,

$[5,1^2]\times[5,1^2]=[7]\oplus[6,1]\oplus 2[5,2]\oplus[5,1^2]\oplus[4,3]\oplus 2[4,2,1]$
$\quad\oplus[4,1^3]\oplus[3,2^2]\oplus[3,2,1^2]\oplus[3,1^4]$,

$[5,1^2]\times[4,3]=[5,2]\oplus[5,1^2]\oplus[4,3]\oplus 2[4,2,1]\oplus[4,1^3]\ominus[3^2,1]$
$\quad\oplus[3,2^2]\oplus[3,2,1^2]$,

$[5,1^2]\times[4,2,1]=[6,1]\oplus 2[5,2]\oplus 2[5,1^2]\oplus 2[4,3]\oplus 4[4,2,1]$
$\quad\oplus 2[4,1^3]\oplus 3[3^2,1]\oplus 2[3,2^2]\oplus 3[3,2,1^2]\oplus[2^3,1]$
$\quad\oplus[3,1^4]\oplus[2^2,1^3]$,

$[5,1^2]\times[4,1^3]=[6,1]\oplus[5,2]\oplus[5,1^2]\oplus[4,3]\oplus 2[4,2,1]\oplus[4,1^3]$
$\quad\oplus[3^2,1]\oplus[3,2^2]\oplus 2[3,2,1^2]\oplus[2^3,1]\oplus[3,1^4]$
$\quad\oplus[2^2,1^3]\oplus[2,1^5]$,

$[5,1^2]\times[3^2,1]=[5,2]\oplus[4,3]\oplus 3[4,2,1]\oplus[4,1^3]\oplus[3^2,1]\oplus 2[3,2^2]$
$\quad\oplus 2[3,2,1^2]\oplus[2^3,1]\oplus[3,1^4]$,

$[4,3]\times[4,3]=[7]\oplus[6,1]\oplus[5,2]\oplus[5,1^2]\oplus[4,3]\oplus[4,2,1]$
$\quad\oplus[4,1^3]\oplus[3^2,1]\oplus[3,2^2]\oplus[3,2,1^2]\oplus[2^3,1]$,

$[4,3]\times[4,2,1]=[6,1]\oplus 2[5,2]\oplus 2[5,1^2]\oplus[4,3]\oplus 4[4,2,1]$
$\quad\oplus 2[4,1^3]\oplus 2[3^2,1]\oplus 2[3,2^2]\oplus 3[3,2,1^2]\oplus[2^3,1]$

$$\oplus [3,1^4] \oplus [2^2,1^3],$$

$$[4,3]\times[4,1^3] = [5,1^2] \oplus [4,3] \oplus 2[4,2,1] \oplus 2[4,1^3] \oplus [3^2,1] \oplus [3,2^2]$$
$$\oplus 2[3,2,1^2] \oplus [2^3,1] \oplus [3,1^4],$$

$$[4,3]\times[3^2,1] = [6,1] \oplus [5,2] \oplus [5,1^2] \oplus [4,3] \oplus 2[4,2,1] \oplus [4,1^3]$$
$$\oplus [3^2,1] \oplus [3,2^2] \oplus 2[3,2,1^2] \oplus [2^3,1] \oplus [3,1^4] \oplus [2^2,1^3],$$

$$[4,2,1]\times[4,2,1] = [7] \oplus 2[6,1] \oplus 4[5,2] \oplus 4[5,1^2] \oplus 4[4,3]$$
$$\oplus 9[4,2,1] \oplus 5[4,1^3] \oplus 5[3^2,1] \oplus 5[3,2^2] \oplus 8[3,2,1^2] \oplus 3[2^3,1]$$
$$\oplus 3[3,1^4] \oplus 3[2^2,1^3] \oplus [2,1^5],$$

$$[4,2,1]\times[4,1^3] = [6,1] \oplus 2[5,2] \oplus 2[5,1^2] \oplus 2[4,3] \oplus 5[4,2,1]$$
$$\oplus 2[4,1^3] \oplus 3[3^2,1] \oplus 3[3,2^2] \oplus 5[3,2,1^2] \oplus 2[2^3,1]$$
$$\oplus 2[3,1^4] \oplus 2[2^2,1^3] \oplus [2,1^5],$$

$$[4,2,1]\times[3^2,1] = [6,1] \oplus 2[5,2] \oplus 3[5,1^2] \oplus 2[4,3] \oplus 5[4,2,1]$$
$$\oplus 3[4,1^3] \oplus 3[3^2,1] \oplus 3[3,2^2] \oplus 5[3,2,1^2] \oplus 2[2^3,1]$$
$$\oplus 2[3,1^4] \oplus 2[2^2,1^3] \oplus [2,1^5],$$

$$[4,1^3]\times[4,1^3] = [7] \oplus [6,1] \oplus 2[5,2] \oplus [5,1^2] \oplus 2[4,3] \oplus 2[4,2,1]$$
$$\oplus [4,1^3] \oplus 2[3^2,1] \oplus 2[3,2^2] \oplus 2[3,2,1^2] \oplus 2[2^3,1] \oplus [3,1^4]$$
$$\oplus 2[2^2,1^3] \oplus [2,1^5] \oplus [1^7],$$

$$[4,1^3]\times[3^2,1] = [5,2] \oplus [5,1^2] \oplus [4,3] \oplus 3[4,2,1] \oplus 2[4,1^3] \oplus 2[3^2,1]$$
$$\oplus 2[3,2^2] \oplus 3[3,2,1^2] \oplus [2^3,1] \oplus [3,1^4] \ominus [2^2,1^3],$$

$$[3^2,1]\times[3^2,1] = [7] \oplus [6,1] \oplus 2[5,2] \oplus [5,1^2] \oplus [4,3] \oplus 3[4,2,1]$$
$$\oplus 2[4,1^3] \oplus [3^2,1] \oplus 2[3,2^2] \oplus 3[3,2,1^2] \oplus [2^3,1]$$
$$\oplus 2[3,1^4] \oplus [2^2,1^3] \oplus [2,1^5],$$

32. 计算 S_5 群不可约表示[3,2]自直乘分解的克莱布施-戈登系数.

解 这是计算有限群高维可约表示分解的一个典型例子. 通常对这种分解，总是尽可能找一个或几个互相对易的元素，希望它们的本征值在每个不可约表示中都不简并，因此在这些元素对角化的表象，用这些元素的本征值就可以区分每个不可约表示的基. 这方法已在第三章计算正二十面体对称群的不可约表示直乘分解的例子中详尽地介绍过. 对置换群 S_n，当 $n\geqslant 5$ 时，不可约表示维数比较高，几个互相对易元素的本征值往往不足以区分不可约表示的基. 在本例中，若取 $W=(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$作为生成元，最多只能区分五个不同的基. 但 S_5 群存在六维不可约表

示$[3,1^2]$. 尽管这样，取 W 对角化的表象仍会简化计算. 但本例为了作为更复杂情况的一个典型例子，不取 W 对角化的表象，而取前面给出的正交基，以相邻客体对换 P_a 作为生成元来计算. 这样做的一个好处是生成元的表示矩阵是已知的，不必再作相似变换使 W 表示矩阵对角化. 本例还有一个典型意义，就是参加直乘的两个表示是相同的，可以要求约化后的新基关于乘积表示的态是对称的或是反对称的. 这提供检验计算结果的一个判据.

组合前的状态用符号$|\mu,\nu\rangle$标记，μ 和 ν 取 1 至 5 的数值. 当状态基有确定对称性时，选用符号$|\mu,\nu\rangle_S=|\mu,\nu\rangle+|\nu,\mu\rangle$和$|\mu,\nu\rangle_A=|\mu,\nu\rangle-|\nu,\mu\rangle$. 当 $\mu=\nu$ 时，只有对称态，不用下标 S. 组合后的状态用符号$|[\lambda],\rho\rangle$标记，其中 ρ 的取值依赖于表示$[\lambda]$的维数. 这方法的大致思路如下. 由于所取表象，P_1 的表示矩阵是对角化的，用 P_1 的本征值来区分状态基，当然有简并. P_1 的本征值为 1 的态称为 A 类态，它的一般形式是

$$\begin{aligned} &a_1|1,1\rangle+a_2|1,2\rangle+a_3|2,1\rangle+a_4|2,2\rangle+a_5|1,3\rangle \\ &\quad+a_6|3,1\rangle+a_7|2,3\rangle+a_8|3,2\rangle+a_9|3,3\rangle+a_{10}|4,4\rangle \\ &\quad+a_{11}|4,5\rangle+a_{12}|5,4\rangle+a_{13}|5,5\rangle, \end{aligned} \tag{a}$$

P_1 的本征值为 -1 的态称为 B 类态，展开式是

$$\begin{aligned} &b_1|1,4\rangle+b_2|4,1\rangle+b_3|1,5\rangle+b_4|5,1\rangle+b_5|2,4\rangle \\ &\quad+b_6|4,2\rangle+b_7|2,5\rangle+b_8|5,2\rangle+b_9|3,4\rangle+b_{10}|4,3\rangle \\ &\quad+b_{11}|3,5\rangle+b_{12}|5,3\rangle. \end{aligned} \tag{b}$$

生成元 P_a 对此态的作用，由下面公式计算：

$$\begin{aligned} P_a|[\lambda],\rho\rangle &= \sum_\tau |[\lambda],\tau\rangle D^{[\lambda]}_{\tau\rho}(P_a), \\ P_a|\mu,\nu\rangle &= \sum_{\mu'\nu'} |\mu',\nu'\rangle D^{[3,2]}_{\mu'\mu}(P_a)D^{[3,2]}_{\nu'\nu}(P_a), \end{aligned} \tag{c}$$

其中 P_a 的表示矩阵是已知的. 对每个不可约表示，选一个态作为计算的起点，要求它是尽可能多的生成元的共同本征态. 在本例中，选包括 P_1 在内的三个生成元的共同本征态作为计算的出发点. 根据 P_1 的本征值，写出它们最一般的展开式. 用其他本征算符 P_a 作用，利用公式(c)和正交归一条件，把此态的展开系数完全确定下来，再用余下的生成元作用，计算其他态的展开式. 属同一个不可约表示的态关于乘积表示的交换具有相同的对称性质. 由舒尔定理，属不等价不可约表示的态互相正交. 计算中要不断用这些正交归一条件，对称性条件，和它是

A 类态还是B 类态的属性进行检验.

首先，P_a 在表示[3,2]中的表示矩阵为

$$P_1:\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix},\quad P_2:\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0&0&0\\0&-1&0&\sqrt{3}&0\\0&0&-1&0&\sqrt{3}\\0&\sqrt{3}&0&1&0\\0&0&\sqrt{3}&0&1\end{pmatrix},$$

$$P_3:\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&\sqrt{8}&0&0&0\\\sqrt{8}&1&0&0&0\\0&0&3&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&-3\end{pmatrix},\quad P_4:\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0&0&0\\0&-1&\sqrt{3}&0&0\\0&\sqrt{3}&1&0&0\\0&0&0&-1&\sqrt{3}\\0&0&0&\sqrt{3}&1\end{pmatrix},\qquad (d)$$

而表示[5]是恒等表示，一维，基$|[5]\rangle$取(a)形式. P_a 在表示[5]中的表示矩阵都是1. 按照公式(c)和(d)，把 P_2 作用在$|[5]\rangle$上，得

$$\begin{aligned}
P_2|[5]\rangle &= |[5]\rangle\\
&= a_1|1,1\rangle + a_2[(-1/2)|1,2\rangle + (\sqrt{3}/2)|1,4\rangle]\\
&\quad + a_3[(-1/2)|2,1\rangle + (\sqrt{3}/2)|4,1\rangle] + [a_4/4 + 3a_{10}/4]|2,2\rangle\\
&\quad + (\sqrt{3}/4)[-a_4 + a_{10}](|2,4\rangle + |4,2\rangle)\\
&\quad + [3a_4/4 + a_{10}/4]|4,4\rangle + a_5[(-1/2)|1,3\rangle + (\sqrt{3}/2)|1,5\rangle]\\
&\quad + a_6[(-1/2)|3,1\rangle + (\sqrt{3}/2)|5,1\rangle] + [a_7/4 + 3a_{11}/4]|2,3\rangle\\
&\quad + (\sqrt{3}/4)[-a_7 + a_{11}](|2,5\rangle + |4,3\rangle)\\
&\quad + [3a_7/4 + a_{11}/4]|4,5\rangle + [a_8/4 + 3a_{12}/4]|3,2\rangle\\
&\quad + (\sqrt{3}/4)[-a_8 + a_{12}](|5,2\rangle + |3,4\rangle)\\
&\quad + [3a_8/4 + a_{12}/4]|5,4\rangle + [a_9/4 + 3a_{13}/4]|3,3\rangle
\end{aligned}$$

$$+(\sqrt{3}/4)[-a_9+a_{13}](|3,5\rangle+|5,3\rangle)$$

$$+[3a_9/4+a_{13}/4]|5,5\rangle,$$

比较各项的系数，特别是新产生的项的系数，得 $a_2=a_3=a_5=a_6=0$，$a_4=a_{10}$，$a_7=a_{11}$，$a_8=a_{12}$和 $a_9=a_{13}$，即

$$|[5]\rangle=a_1|1,1\rangle+a_4(|2,2\rangle+|4,4\rangle)+a_7(|2,3\rangle+|4,5\rangle)$$
$$+a_8(|3,2\rangle+|5,4\rangle)+a_9(|3,3\rangle+|5,5\rangle), \tag{e}$$

再用 P_3 作用，得

$$P_3|[5]\rangle=|[5]\rangle$$
$$=[a_1/9+8a_4/9]|1,1\rangle+(\sqrt{8}/9)[-a_1+a_4](|1,2\rangle+|2,1\rangle)$$
$$+[8a_1/9+a_4/9]|2,2\rangle+a_4|4,4\rangle+a_9(|3,3\rangle+|5,5\rangle)$$
$$+a_7[(1/3)|2,3\rangle+(\sqrt{8}/3)|1,3\rangle-|4,5\rangle]$$
$$+a_8[(1/3)|3,2\rangle+(\sqrt{8}/3)|3,1\rangle-|5,4\rangle],$$

由此得 $a_1=a_4$，$a_7=a_8=0$，即

$$|[5]\rangle=a_1(|1,1\rangle+|2,2\rangle+|4,4\rangle)+a_9(|3,3\rangle+|5,5\rangle). \tag{f}$$

最后用 P_4 作用，得

$$P_4|[5]\rangle=|[5]\rangle$$
$$=a_1|1,1\rangle+[a_1/4+3a_9/4](|2,2\rangle+|4,4\rangle)$$
$$+(\sqrt{3}/4)[-a_1+a_9](|2,3\rangle+|3,2\rangle+|4,5\rangle+|5,4\rangle)$$
$$+[3a_1/4+a_9/4](|3,3\rangle+|5,5\rangle).$$

由此得 $a_1=a_9$，归一化后得

$$|[5]\rangle=\frac{1}{\sqrt{5}}(|1,1\rangle+|2,2\rangle+|3,3\rangle+|4,4\rangle+|5,5\rangle).$$

表示[4,1]是四维的，生成元的表示矩阵为

$$P_1:\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\quad P_2:\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-1&\sqrt{3}\\0&0&\sqrt{3}&1\end{pmatrix},$$

$$P_3:\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&-1&\sqrt{8}&0\\0&\sqrt{8}&1&0\\0&0&0&3\end{pmatrix},\quad P_4:\ \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&\sqrt{15}&0&0\\\sqrt{15}&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$|[4,1],1\rangle$是 A 类态，逐个用 P_1、P_2 和 P_3 作用后，得表式(f)：

$$|[4,1],1\rangle = a_1(|1,1\rangle + |2,2\rangle + |4,4\rangle) + a_9(|3,3\rangle + |5,5\rangle).$$

要求它与态 $|[5]\rangle$正交，得

$$|[4,1],1\rangle = (30)^{-1/2}(2|1,1\rangle + 2|2,2\rangle - 3|3,3\rangle + 2|4,4\rangle - 3|5,5\rangle).$$

再用 P_4 作用，得

$$\begin{aligned}P_4|[4,1],1\rangle &= (-1/4)|[4,1],1\rangle + (\sqrt{15}/4)|[4,1],2\rangle\\&= (30)^{-1/2}\{2|1,1\rangle + [1/2-9/4](|2,2\rangle + |4,4\rangle)\\&\quad + [3/2-3/4](|3,3\rangle + |5,5\rangle)\\&\quad + \sqrt{3}[-1/2-3/4](|2,3\rangle + |3,2\rangle + |4,5\rangle + |5,4\rangle)\}.\end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned}|[4,1],2\rangle &= (4/\sqrt{15})\{P_4|[4,1],1\rangle + (1/4)|[4,1],1\rangle\}\\&= (4/\sqrt{450})\{(2+1/2)|1,1\rangle + [-7/4+1/2](|2,2\rangle + |4,4\rangle)\\&\quad + [3/4-3/4](|3,3\rangle + |5,5\rangle)\\&\quad - (5\sqrt{3}/4)(|2,3\rangle + |3,2\rangle + |4,5\rangle + |5,4\rangle)\}\\&= (3\sqrt{2})^{-1}\{2|1,1\rangle - |2,2\rangle - |4,4\rangle - \sqrt{3}|2,3\rangle_S - \sqrt{3}|4,5\rangle_S\}.\end{aligned}$$

以后的计算非常类似，我们只列出方法和结果. 把 P_3 作用在$|[4,1],2\rangle$上，得

$$P_3|[4,1],2\rangle = (-1/3)|[4,1],2\rangle + (\sqrt{8}/3)|[4,1],3\rangle,$$

由此得

$$\begin{aligned}|[4,1],3\rangle = 6^{-1}\{&2|2,2\rangle - 2|4,4\rangle - \sqrt{2}|1,2\rangle_S\\&-\sqrt{6}|1,3\rangle_S - \sqrt{3}|2,3\rangle_S + \sqrt{3}|4,5\rangle_S\}.\end{aligned}$$

把 P_2 作用在$|[4,1],3\rangle$上，得

$$P_2 \mid [4,1],3\rangle = (-1/2) \mid [4,1],3\rangle + (\sqrt{3}/2) \mid [4,1],4\rangle,$$

由此得

$$\begin{aligned} \mid [4,1],4\rangle = 6^{-1}\{ & -\sqrt{2} \mid 1,4\rangle_S - \sqrt{6} \mid 1,5\rangle_S - 2 \mid 2,4\rangle_S \\ & + \sqrt{3} \mid 2,5\rangle_S + \sqrt{3} \mid 3,4\rangle_S\}. \end{aligned}$$

注意，$|[4,1],4\rangle$是 B 类态.

生成元在表示[3,2]中的表示矩阵已在(d)式给出. $|[3,2],1\rangle$是 A 类态，逐个用 P_1 和 P_2 作用后，得表式(e)：

$$\begin{aligned} \mid [3,2],1\rangle = & a_1 \mid 1,1\rangle + a_4(\mid 2,2\rangle + \mid 4,4\rangle) + a_7(\mid 2,3\rangle + \mid 4,5\rangle) \\ & + a_8(\mid 3,2\rangle + \mid 5,4\rangle) + a_9(\mid 3,3\rangle + \mid 5,5\rangle). \end{aligned}$$

再用 P_4 作用，得

$$\begin{aligned} P_4 \mid [3,2],1\rangle = & \mid [3,2],1\rangle \\ = & a_1 \mid 1,1\rangle + (1/4)[a_4 - \sqrt{3}a_7 - \sqrt{3}a_8 + 3a_9](\mid 2,2\rangle + \mid 4,4\rangle) \\ & + (1/4)[3a_4 + \sqrt{3}a_7 + \sqrt{3}a_8 + a_9](\mid 3,3\rangle + \mid 5,5\rangle) \\ & + (1/4)[-\sqrt{3}a_4 - a_7 + 3a_8 + \sqrt{3}a_9](\mid 2,3\rangle + \mid 4,5\rangle) \\ & + (1/4)[-\sqrt{3}a_4 + 3a_7 - a_8 + \sqrt{3}a_9](\mid 3,2\rangle + \mid 5,4\rangle). \end{aligned}$$

解得 $a_7 = a_8 = \sqrt{3}(a_9 - a_4)/2$. 要求此态与$|[5]\rangle$和$|[4,1],1\rangle$正交，得

$$a_1 + 2a_4 + 2a_9 = 0, \qquad 2a_1 + 4a_4 - 6a_9 = 0.$$

解得 $a_1 = -2a_4$ 和 $a_9 = 0$，再由归一化条件得

$$\mid [3,2],1\rangle = 6^{-1}(4 \mid 1,1\rangle - 2 \mid 2,2\rangle - 2 \mid 4,4\rangle + \sqrt{3} \mid 2,3\rangle_S + \sqrt{3} \mid 4,5\rangle_S).$$

然后用 P_3 作用，得

$$P_3 \mid [3,2],1\rangle = (-1/3) \mid [3,2],1\rangle + (\sqrt{8}/3) \mid [3,2],2\rangle,$$

由此得

$$\begin{aligned} \mid [3,2],2\rangle = (6\sqrt{2})^{-1}\{ & 4 \mid 2,2\rangle - 4 \mid 4,4\rangle - 2\sqrt{2} \mid 1,2\rangle_S + \sqrt{6} \mid 1,3\rangle_S \\ & + \sqrt{3} \mid 2,3\rangle_S - \sqrt{3} \mid 4,5\rangle_S\}. \end{aligned}$$

把 P_4 作用在 $|[3,2],2\rangle$ 上，得

$$P_4 \mid [3,2],2\rangle = (-1/2) \mid [3,2],2\rangle + (\sqrt{3}/2) \mid [3,2],3\rangle,$$

由此得

$$\mid [3,2],3\rangle = (2\sqrt{6})^{-1}\{\mid 2,2\rangle + 3 \mid 3,3\rangle - \mid 4,4\rangle - 3 \mid 5,5\rangle + \sqrt{2} \mid 1,2\rangle_S\}.$$

把 P_2 作用在 $|[3,2],2\rangle$ 上，得

$$P_2 \mid [3,2],2\rangle = (-1/2) \mid [3,2],2\rangle + (\sqrt{3}/2) \mid [3,2],4\rangle,$$

由此得

$$\mid [3,2],4\rangle = (6\sqrt{2})^{-1}\{-2\sqrt{2} \mid 1,4\rangle_S + \sqrt{6} \mid 1,5\rangle_S - 4 \mid 2,4\rangle_S$$

$$-\sqrt{3} \mid 2,5\rangle_S - \sqrt{3} \mid 3,4\rangle_S\}.$$

$|[3,2],4\rangle$ 是 B 类态. 用 P_4 作用，得

$$P_4 \mid [3,2],4\rangle = (-1/2) \mid [3,2],4\rangle + (\sqrt{3}/2) \mid [3,2],5\rangle,$$

由此得

$$\mid [3,2],5\rangle = (2\sqrt{6})^{-1}\{\sqrt{2} \mid 1,4\rangle_S - \mid 2,4\rangle_S - 3 \mid 3,5\rangle_S\}.$$

表示 $[3,1^2]$ 是六维的，生成元的表示矩阵为

$$P_1: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$P_2: \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$P_3:\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{8} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \sqrt{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{8} & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_4:\ \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{15} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \sqrt{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{15} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$|[3,1^2],1\rangle$是 A 类态，逐个用 P_1 和 P_2 作用后，得表式(e)：

$$|[3,1^2],1\rangle = a_1|1,1\rangle + a_4(|2,2\rangle + |4,4\rangle) + a_7(|2,3\rangle + |4,5\rangle)$$
$$+ a_8(|3,2\rangle + |5,4\rangle) + a_9(|3,3\rangle + |5,5\rangle).$$

再用 P_4 作用时$|[3,1^2],1\rangle$改号，得

$$\begin{aligned} P_4|[3,1^2],1\rangle &= -|[3,1^2],1\rangle \\ &= a_1|1,1\rangle + (1/4)[a_4 - \sqrt{3}a_7 - \sqrt{3}a_8 + 3a_9](|2,2\rangle + |4,4\rangle) \\ &\quad + (1/4)[3a_4 + \sqrt{3}a_7 + \sqrt{3}a_8 + a_9](|3,3\rangle + |5,5\rangle) \\ &\quad + (1/4)[-\sqrt{3}a_4 - a_7 + 3a_8 + \sqrt{3}a_9](|2,3\rangle + |4,5\rangle) \\ &\quad + (1/4)[\sqrt{3}a_4 + 3a_7 - a_8 + \sqrt{3}a_9](|3,2\rangle + |5,4\rangle). \end{aligned}$$

解得 $a_1=0$，$a_4=-a_9=\sqrt{3}(a_7+a_8)/2$. 要求此态与$|[2^2,1],1\rangle$正交，必须 $a_4=a_9=0$，于是 $a_7=-a_8$，即态$|[3,1^2],1\rangle$是反对称的组合. 归一化后得

$$|[3,1^2],1\rangle = 2^{-1}(|2,3\rangle_A + |4,5\rangle_A).$$

然后用 P_3 作用，得

$$P_3 \mid [3,1^2],1\rangle = (-1/3) \mid [3,1^2],1\rangle + (\sqrt{8}/3) \mid [3,1^2],2\rangle,$$

由此得

$$\mid [3,1^2],2\rangle = (2\sqrt{2})^{-1}\{\sqrt{2} \mid 1,3\rangle_A + \mid 2,3\rangle_A - \mid 4,5\rangle_A\}.$$

把 P_4 作用在$\mid [3,1^2],2\rangle$上，得

$$P_4 \mid [3,1^2],2\rangle = (-1/4) \mid [3,1^2],2\rangle + (\sqrt{15}/4) \mid [3,1^2],3\rangle,$$

由此得

$$\mid [3,1^2],3\rangle = (2\sqrt{10})^{-1}\{2\sqrt{2} \mid 1,2\rangle_A + \sqrt{6} \mid 1,3\rangle_A - \sqrt{3} \mid 2,3\rangle_A + \sqrt{3} \mid 4,5\rangle_A\}.$$

把 P_2 作用在$\mid [3,1^2],2\rangle$上，得

$$P_2 \mid [3,1^2],2\rangle = (-1/2) \mid [3,1^2],2\rangle + (\sqrt{3}/2) \mid [3,1^2],4\rangle,$$

由此得

$$\mid [3,1^2],4\rangle = (2\sqrt{2})^{-1}\{\sqrt{2} \mid 1,5\rangle_A - \mid 2,5\rangle_A + \mid 3,4\rangle_A\}.$$

$\mid [3,1^2],4\rangle$是 B 类态. 把 P_4 作用在$\mid [3,1^2],4\rangle$上，得

$$P_4 \mid [3,1^2],4\rangle = (-1/4) \mid [3,1^2],4\rangle + (\sqrt{15}/4) \mid [3,1^2],5\rangle,$$

由此得

$$\mid [3,1^2],5\rangle = (2\sqrt{10})^{-1}\{2\sqrt{2} \mid 1,4\rangle_A + \sqrt{6} \mid 1,5\rangle_A + \sqrt{3} \mid 2,5\rangle_A - \sqrt{3} \mid 3,4\rangle_A\}.$$

把 P_3 作用在$\mid [3,1^2],5\rangle$上，得

$$P_3 \mid [3,1^2],5\rangle = (-1/3) \mid [3,1^2],5\rangle + (\sqrt{8}/3) \mid [3,1^2],6\rangle,$$

由此得

$$\mid [3,1^2],6\rangle = (2\sqrt{5})^{-1}\{2 \mid 2,4\rangle_A - \sqrt{3} \mid 2,5\rangle_A - \sqrt{3} \mid 3,4\rangle_A\}.$$

表示$[2^2,1]$是五维的，生成元的表示矩阵为

$$P_1:\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix},\quad P_2:\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&0&\sqrt{3}&0&0\\0&-1&0&\sqrt{3}&0\\\sqrt{3}&0&1&0&0\\0&\sqrt{3}&0&1&0\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix},$$

$$P_3:\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3&0&0&0&0\\0&-3&0&0&0\\0&0&-3&0&0\\0&0&0&-1&\sqrt{8}\\0&0&0&\sqrt{8}&1\end{pmatrix},\quad P_4:\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&\sqrt{3}&0&0&0\\\sqrt{3}&1&0&0&0\\0&0&-1&\sqrt{3}&0\\0&0&\sqrt{3}&1&0\\0&0&0&0&-2\end{pmatrix},$$

态$|[2^2,1],5\rangle$是 P_1、P_2 和 P_4 的共同本征态，它是计算属表示$[2^2,1]$的态的出发点. $|[2^2,1],5\rangle$是 B 类态，取表式(b)，用 P_2 作用后，得

$$\begin{aligned}
P_2|[2^2,1],5\rangle &= -|[2^2,1],5\rangle \\
&= (b_1/2)[\sqrt{3}|1,2\rangle+|1,4\rangle]+(b_2/2)[\sqrt{3}|2,1\rangle+|4,1\rangle] \\
&\quad +(b_3/2)[\sqrt{3}|1,3\rangle+|1,5\rangle]+(b_4/2)[\sqrt{3}|3,1\rangle+|5,1\rangle] \\
&\quad +(\sqrt{3}/4)[b_5+b_6](-|2,2\rangle+|4,4\rangle) \\
&\quad +(1/4)[-b_5+3b_6]|2,4\rangle+(1/4)[3b_5-b_6]|4,2\rangle \\
&\quad +(\sqrt{3}/4)[b_7+b_{10}](-|2,3\rangle+|4,5\rangle) \\
&\quad +(1/4)[-b_7+3b_{10}]|2,5\rangle+(1/4)[3b_7-b_{10}]|4,3\rangle \\
&\quad +(\sqrt{3}/4)[b_8+b_9](-|3,2\rangle+|5,4\rangle) \\
&\quad +(1/4)[-b_8+3b_9]|5,2\rangle+(1/4)[3b_8-b_9]|3,4\rangle \\
&\quad +(\sqrt{3}/4)[b_{11}+b_{12}](-|3,3\rangle+|5,5\rangle) \\
&\quad +(1/4)[-b_{11}+3b_{12}]|3,5\rangle+(1/4)[3b_{11}-b_{12}]|5,3\rangle,
\end{aligned}$$

解得 $b_1=b_2=b_3=b_4=0$，$b_5=-b_6$，$b_7=-b_{10}$，$b_8=-b_9$ 和 $b_{11}=-b_{12}$，即

$$|[2^2,1],5\rangle = b_5|2,4\rangle_A + b_7(|2,5\rangle - |4,3\rangle) + b_8(|5,2\rangle - |3,4\rangle) + b_{11}|3,5\rangle_A. \qquad (g)$$

再用 P_4 作用，得

$$\begin{aligned} P_4|[2^2,1],5\rangle &= -|[2^2,1],5\rangle \\ &= (1/4)[b_5 - \sqrt{3}b_7 + \sqrt{3}b_8 - 3b_{11}]|2,4\rangle_A \\ &\quad + (1/4)[-\sqrt{3}b_5 - b_7 - 3b_8 + \sqrt{3}b_{11}]|2,5\rangle \\ &\quad + (1/4)[\sqrt{3}b_5 - 3b_7 - b_8 - \sqrt{3}b_{11}]|5,2\rangle \\ &\quad + (1/4)[-\sqrt{3}b_5 + 3b_7 + b_8 + \sqrt{3}b_{11}]|3,4\rangle \\ &\quad + (1/4)[\sqrt{3}b_5 + b_7 + 3b_8 - \sqrt{3}b_{11}]|4,3\rangle \\ &\quad + (1/4)[3b_5 + \sqrt{3}b_7 - \sqrt{3}b_8 + b_{11}]|3,5\rangle_A. \end{aligned}$$

解得 $b_5 = -b_{11} = \sqrt{3}(b_7 - b_8)/2$. 要求与 $|[3,1^2],6\rangle$ 正交，得 $b_5 = b_{11} = 0$ 和 $b_7 = b_8$. 归一化后得对称化的展开式

$$|[2^2,1],5\rangle = (1/2)\{|3,4\rangle_S - |2,5\rangle_S\}.$$

再用 P_3 作用，得

$$P_3|[2^2,1],5\rangle = (1/3)|[2^2,1],5\rangle + (\sqrt{8}/3)|[2^2,1],4\rangle,$$

解得

$$|[2^2,1],4\rangle = (2\sqrt{2})^{-1}\{\sqrt{2}|1,5\rangle_S + |2,5\rangle_S + |3,4\rangle_S\}.$$

把 P_4 作用在 $|[2^2,1],4\rangle$ 上，得

$$P_4|[2^2,1],4\rangle = (1/2)|[2^2,1],4\rangle + (\sqrt{3}/2)|[2^2,1],3\rangle,$$

由此得

$$|[2^2,1],3\rangle = (2\sqrt{2})^{-1}\{\sqrt{2}|1,4\rangle_S - |2,4\rangle_S + |3,5\rangle_S\}.$$

把 P_2 作用在 $|[2^2,1],4\rangle$ 上，得

$$P_2|[2^2,1],4\rangle = (1/2)|[2^2,1],4\rangle + (\sqrt{3}/2)|[2^2,1],2\rangle,$$

由此得

$$|[2^2,1],2\rangle=(2\sqrt{2})^{-1}\{\sqrt{2}|1,3\rangle_S-|2,3\rangle_S+|4,5\rangle_S\}.$$

最后把 P_4 作用在 $|[2^2,1],2\rangle$上，得

$$P_4|[2^2,1],2\rangle=(1/2)|[2^2,1],2\rangle+(\sqrt{3}/2)|[2^2,1],1\rangle,$$

由此得

$$|[2^2,1],1\rangle=(2\sqrt{2})^{-1}\{|2,2\rangle-|3,3\rangle-|4,4\rangle+|5,5\rangle+\sqrt{2}|1,2\rangle_S\}.$$

表示$[2,1^3]$是四维的，生成元的表示矩阵为

$$P_1:\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\quad P_2:\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&\sqrt{3}&0&0\\\sqrt{3}&1&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix},$$

$$P_3:\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3&0&0&0\\0&-1&\sqrt{8}&0\\0&\sqrt{8}&1&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix},\quad P_4:\ \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-4&0&0&0\\0&-4&0&0\\0&0&-1&\sqrt{15}\\0&0&\sqrt{15}&1\end{pmatrix},$$

态$|[2,1^3],4\rangle$是 P_1，P_2 和 P_3 的共同本征态，它是计算属表示$[2,1^3]$的态的出发点。$|[2,1^3],4\rangle$是 B 类态，用 P_2 作用后得表式(g)：

$$\begin{aligned}|[2,1^3],4\rangle=\ &b_5|2,4\rangle_A+b_7(|2,5\rangle-|4,3\rangle)\\&+b_8(|5,2\rangle-|3,4\rangle)+b_{11}|3,5\rangle_A.\end{aligned}$$

再用 P_3 作用，得

$$\begin{aligned}P_3|[2,1^3],4\rangle=\ &-|[2,1^3],4\rangle\\=\ &(b_5/3)[\sqrt{8}|1,4\rangle_A-|2,4\rangle_A]\\&-(b_7/3)[\sqrt{8}|1,5\rangle+|2,5\rangle]\\&(b_8/3)[\sqrt{8}|5,1\rangle+|5,2\rangle]\\&-b_7|4,3\rangle-b_8|3,4\rangle-b_{11}|3,5\rangle_A.\end{aligned}$$

解得 $b_5 = b_7 = b_8 = 0$. 归一化后得反对称化的展开式

$$|[2,1^3],4\rangle = \sqrt{1/2}\,|3,5\rangle_A.$$

然后用 P_4 作用，得

$$P_4|[2,1^3],4\rangle = (1/4)|[2,1^3],4\rangle + (\sqrt{15}/4)|[2,1^3],3\rangle,$$

解得

$$|[2,1^3],3\rangle = \sqrt{1/10}\,\{\sqrt{3}|2,4\rangle_A + |2,5\rangle_A + |3,4\rangle_A\}.$$

把 P_3 作用在 $|[2,1^3],3\rangle$ 上，得

$$P_3|[2,1^3],3\rangle = (1/3)|[2,1^3],3\rangle + (\sqrt{8}/3)|[2,1^3],2\rangle,$$

由此得

$$|[2,1^3],2\rangle = (2\sqrt{5})^{-1}\{\sqrt{6}|1,4\rangle_A - \sqrt{2}|1,5\rangle_A - |2,5\rangle_A + |3,4\rangle_A\}.$$

最后把 P_2 作用在 $|[2,1^3],2\rangle$ 上，得

$$P_2|[2,1^3],2\rangle = (1/2)|[2,1^3],2\rangle + (\sqrt{3}/2)|[2,1^3],1\rangle,$$

由此得

$$|[2,1^3],1\rangle = (2\sqrt{5})^{-1}\{\sqrt{6}|1,2\rangle_A - \sqrt{2}|1,3\rangle_A + |2,3\rangle_A - |4,5\rangle_A\}.$$

八、置换群不可约表示的外积

★ 第三章第三节我们讨论过分导表示和诱导表示，现在把这方法应用到置换群来．群 $G = S_{n+m}$ 中有子群 $H = S_n \times S_m$，它是关于 $(n+m)$ 客体中前 n 个客体间和后 m 个客体间的置换变换构成的群．群 G 的阶是 $g = (n+m)!$，子群 H 的阶是 $h = n!\,m!$，指数是 $n = g/h$．左陪集 R_jH 的代表元素 R_j 是把前 n 个客体置换到 $(n+m)$ 个客体中的某 n 个不同位置的置换．

群 G 的群代数记作 $\mathscr{L}$，不可约表示用 $(n+m)$ 格的杨图 $[\omega]$ 描写，对应的原始幂等元记作 $e^{[\omega]}$，由它产生的最小左理想是 $\mathscr{L}e^{[\omega]}$．子群 H 的群代数记作 $\mathscr{L}^{nm}$，不可约表示用两个杨图的直乘 $[\lambda]\times[\mu]$ 来描写，两个杨图的格数分别为 n 和 m，此表示对应的幂等元记作 $e^{[\lambda]}e^{[\mu]}$，它在子群中产生的最小左理想是 $\mathscr{L}^{nm}e^{[\lambda]}e^{[\mu]}$.

★ 群 G 不可约表示 $[\omega]$ 关于子群的分导表示，可按子群不可约表示 $[\lambda]\times[\mu]$

来分解，

$$X^{-1}[\omega]X = \oplus a^{\omega}_{\lambda\mu}[\lambda]\times[\mu],$$

$$d_{[\omega]}(S_{n+m}) = \sum a^{\omega}_{\lambda\mu} d_{[\lambda]}(S_n) d_{[\mu]}(S_m).$$

在群代数中，上式表明存在 $a^{\omega}_{\lambda\mu}$ 个线性无关的矢量 $e^{[\lambda]}e^{[\mu]}t_a e^{[\omega]}$，它把群 G 的最小左理想 $\mathscr{L}e^{[\omega]}$ 映照到子群 H 的最小左理想中去

$$\mathscr{L}^{nm}e^{[\lambda]}e^{[\mu]}t_a e^{[\omega]} \subset \mathscr{L}e^{[\omega]}.$$

把这子空间的基用 $\mathscr{L}e^{[\omega]}$ 基的线性组合表出，组合系数构成 X 矩阵的列矩阵.

★　把子群 H 不可约表示 $[\lambda]\times[\mu]$ 的幂等元 $e^{[\lambda]}e^{[\mu]}$ 看作群 G 的幂等元，一般不是原始的，由它产生的左理想 $\mathscr{L}e^{[\lambda]}e^{[\mu]}$ 对应群 G 的可约表示，是子群 H 表示 $[\lambda]\times[\mu]$ 关于群 G 的诱导表示，这里称为置换群表示的外积，$[\lambda]\otimes[\mu]$. 这表示可按群 G 不可约表示 $[\omega]$ 来分解，

$$Y^{-1}([\lambda]\otimes[\mu])Y = \oplus b^{\omega}_{\lambda\mu}[\omega],$$

$$\frac{(n+m)!}{n!m!}d_{[\lambda]}(S_n)d_{[\mu]}(S_m) = \sum b^{\omega}_{\lambda\mu} d_{[\omega]}(S_{n+m}).$$

在群代数中，上式表明存在 $b^{\omega}_{\lambda\mu}$ 个线性无关的矢量 $e^{[\omega]}t'_a e^{[\lambda]}e^{[\mu]}$，它把群 G 的左理想 $\mathscr{L}e^{[\lambda]}e^{[\mu]}$ 映照到最小左理想中去

$$\mathscr{L}e^{[\omega]}t'_a e^{[\lambda]}e^{[\mu]} \subset \mathscr{L}e^{[\lambda]}e^{[\mu]}.$$

把这子空间的基用 $\mathscr{L}e^{[\lambda]}e^{[\mu]}$ 基的线性组合表出，组合系数构成 Y 矩阵的列矩阵. 由于左理想和右理想的地位是平等的，这样两组线性无关的矢量数是相等的，$b^{\omega}_{\lambda\mu} = a^{\omega}_{\lambda\mu}$，这就是费罗宾尼斯定理(见第三章).

★　虽然特征标方法可以计算重数 $b^{\omega}_{\lambda\mu}$，但对置换群，两不可约表示外积的分解可用图解规则来计算，这规则称为立特武德-理查森(Littlewood-kichardson)规则. 计算方法如下.

对表示 $[\lambda]\otimes[\mu]$，任取其中一个杨图，通常取格数较多的杨图，例如 $[\lambda]$，作为基础，将另一个杨图 $[\mu]$ 的各行格子分别填以行数，即第 j 行填以数 j. 然后，自第一行开始，自上而下逐行把杨图 $[\mu]$ 的格子补到杨图 $[\lambda]$ 上，每补完一行格子，都要求满足如下条件：

1) 每行格子补完后的图是正则杨图.
2) 填相同数的格子不填在同一列.
3) 自第一行开始，逐行地自右向左读杨图中补上的格子，在读的过程的每一步，始终保持填数大的格子数目不大于填数小的格子数目.

这样补得的全部可能的杨图[ω]，就是在表示外积[λ]$\otimes$[μ]中出现的 S_{n+m} 群不可约表示. 如果在满足上述规则的条件下，同一个杨图[ω]得到若干次，这次数正是该表示在约化表示中的重数. 由于费罗宾尼斯定理，立特武德-理查森规则也可用来计算群 S_{n+m} 不可约表示[ω]关于子群 $S_n\times S_m$ 的分导表示，按子群不可约表示[λ]×[μ]的分解，计算中 n 格的杨图[λ]和 m 格的杨图[μ]分别取遍所有可能的杨图，但它们必须能通过立特武德-理查森规则构造出给定的($n+m$)格杨图[ω]来.

33. 用立特武德-理查森规则计算下列置换群表示外积的约化:

(1) $[3,2,1]\otimes[3]$,　(2) $[3,2]\otimes[2,1]$,　(3) $[2,1]\otimes[4,2^3]$.

解 (1)

$$[3,2,1]\times[3]\simeq[6,2,1]\oplus[5,3,1]\oplus[5,2,2]\oplus[5,2,1,1]\oplus[4,3,2]\oplus[4,3,1,1]\oplus[4,2,2,1]\oplus[3,3,2,1].$$

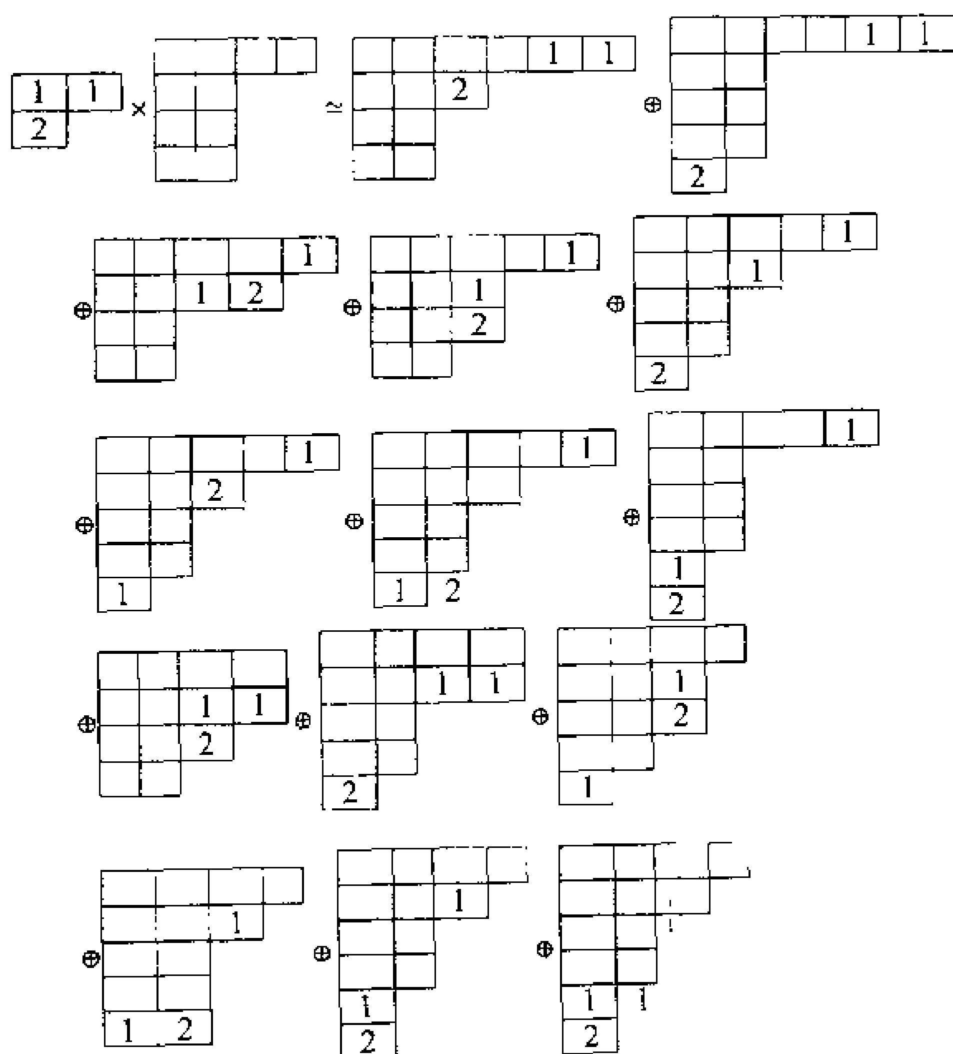
$$\frac{9!}{6!\ 3!}\times16\times1=1344=105+162+120+189+168+216+216+168.$$

(2)

$$[3,2]\times[2,1]\simeq[5,3]\oplus[5,2,1]\oplus[4,4]\oplus 2[4,3,1]\oplus[4,2,2]$$
$$\oplus[4,2,1,1]\oplus[3,3,2]\oplus[3,3,1,1]\oplus[3,2,2,1].$$

$$\frac{8!}{5!\ 3!}\times 5\times 2=560=28+64+14+2\times 70+56+90+42+56+70.$$

(3)



$$[2,1]\times[4,2,2,2]\simeq[6,3,2,2]\oplus[6,2,2,2,1]\oplus[5,4,2,2]$$
$$\oplus[5,3,3,2]\oplus 2[5,3,2,2,1]\oplus[5,2,2,2,2]\oplus[5,2,2,2,1,1]$$
$$\oplus[4,4,3,2]\oplus[4,4,2,2,1]\oplus[4,3,3,2,1]\oplus[4,3,2,2,2]$$
$$\oplus[4,3,2,2,1,1]\oplus[4,2,2,2,2,1].$$

$$\frac{13!}{3!\ 10!}\times 2\times 300=171600=12012+9009+12870+11583+2\times 21450$$
$$+5005+10296+8580+12870+15015+8580+17160+5720.$$

34. 用立特武德-理查森规则计算，S_6 群下列不可约表示关于子群 $S_3\otimes S_3$ 的分

导表示，按子群不可约表示的约化：

(1) [4,2]，(2) [2,2,1,1]，(3) [3,3].

解 (1)

$$[4,2] \simeq [3] \times [3] \oplus [3] \times [2,1] \oplus [2,1] \times [3] \oplus [2,1] \times [2,1].$$

$$9 = 1 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 1 + 2 \times 2.$$

(2)

$$[2^2,1^2] \simeq [2,1] \times [2,1] \oplus [2,1] \times [1^3] \oplus [1^3] \times [2,1] \oplus [1^3] \times [1^3].$$

$$9 = 2 \times 2 + 2 \times 1 + 1 \times 2 + 1 \times 1.$$

(3)

$$[3,3] \simeq [3] \times [3] \oplus [2,1] \times [2,1].$$

$$5 = 1 \times 1 + 2 \times 2.$$

35. 试由 S_3 群的二维不可约表示[2,1]诱导出 S_4 群的表示，具体计算 S_4 群生成元在诱导表示中的表示矩阵.

解 用符号表出 S_3 群生成元在二维表示[2,1]中的表示矩阵

$$A = D^{[2,1]}(1\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = D^{[2,1]}(1\ 2\ 3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix},$$

表示空间的基记作 ϕ_μ，$\mu = 1$ 和 2，则有

$$(1\ 2)\phi_\mu = \sum_{\nu=1}^{2} \phi_\nu A_{\nu\mu}, \quad (1\ 2\ 3)\phi_\mu = \sum_{\nu=1}^{2} \phi_\nu B_{\nu\mu}.$$

这二维空间只对 S_3 群不变. S_3 群是 S_4 群的子群，指数是 4. 把二维空间扩充到八维空间，使空间对 S_4 群保持不变：

$$\psi_{1\mu} = \phi_\mu,\ \psi_{2\mu} = (1\ 4)\phi_\mu,\ \psi_{3\mu} = (2\ 4)\phi_\mu,\ \psi_{4\mu} = (3\ 4)\phi_\mu.$$

容易计算

$$(1\ 2)\psi_{1\mu} = (1\ 2)\phi_\mu = \sum_{\nu=1}^{2} \psi_{1\nu} A_{\nu\mu},$$

$$(1\ 2)\psi_{2\mu} = (4\ 2)(2\ 1)\phi_\mu = \sum_{\nu=1}^{2} \psi_{3\nu} A_{\nu\mu},$$

$$(1\ 2)\psi_{3\mu} = (4\ 1)(1\ 2)\phi_\mu = \sum_{\nu=1}^{2} \psi_{2\nu} A_{\nu\mu},$$

$$(1\ 2)\psi_{4\mu} = (3\ 4)(1\ 2)\phi_\mu = \sum_{\nu=1}^{2} \psi_{4\nu} A_{\nu\mu},$$

$$(1\ 2\ 3\ 4)\psi_{1\mu} = (4\ 1)(1\ 2\ 3)\phi_\mu = \sum_{\nu=1}^{2} \psi_{2\nu} B_{\nu\mu},$$

$$(1\ 2\ 3\ 4)\psi_{2\mu} = (2\ 3\ 4)\phi_\mu = (4\ 2)(2\ 1)(1\ 2\ 3)\phi_\mu = \sum_{\nu=1}^{2} \psi_{3\nu} (AB)_{\nu\mu},$$

$$(1\ 2\ 3\ 4)\psi_{3\mu} = (3\ 4)(1\ 2)\phi_\mu = \sum_{\nu=1}^{2} \psi_{4\nu} A_{\nu\mu},$$

$$(1\ 2\ 3\ 4)\psi_{4\mu} = (1\ 2\ 3)\phi_\mu = \sum_{\nu=1}^{2} \psi_{1\nu} B_{\nu\mu},$$

因此得 S_4 群生成元(1 2)和(1 2 3 4)在诱导表示中的表示矩阵为

$$D(1\ 2) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{pmatrix}, \quad D(1\ 2\ 3\ 4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & B \\ B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & AB & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 \end{pmatrix}.$$

它是 S_4 群的可约表示，可分解为表示[3,1]，[2,2]和[2,1,1]的直和.

第七章　SU(N)群

一、SU(N)群的不等价不可约表示

★　所有N维幺模幺正矩阵u的集合，按照矩阵乘积，构成SU(N)群. 它是(N^2-1)阶单连通的紧致李群，秩为($N-1$)，李代数记作A_{N-1}. 在自身表示中的生成元为

$$
\begin{aligned}
(T_{ab}^{(1)})_{cd} &= \frac{1}{2}(\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc}), \quad a<b,\\
(T_{ab}^{(2)})_{cd} &= -\frac{i}{2}(\delta_{ac}\delta_{bd}-\delta_{ad}\delta_{bc}), \quad a<b,\\
(T_{a}^{(3)})_{cd} &= \begin{cases} \delta_{cd}[2a(a-1)]^{-1/2}, & \text{当}\quad c<a,\\ -\delta_{cd}[(a-1)/(2a)]^{1/2}, & \text{当}\quad c=a, \quad 2\leqslant a\leqslant N,\\ 0, & \text{当}\quad c>a, \end{cases}
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

其中指标a和b是生成元的序指标，而c和d是矩阵的行列指标. 矩阵$T_{ab}^{(1)}$是对称矩阵，关于序指标也对称，矩阵$T_{ab}^{(2)}$是反对称矩阵，关于序指标也反对称，它们各有$N(N-1)/2$个，矩阵$T_a^{(3)}$是对角矩阵，有($N-1$)个，合起来共有(N^2-1)个. $T_a^{(3)}$矩阵互相对易，构成嘉当子代数. 通常把生成元统一编号，次序为$T_{12}^{(1)}$，$T_{12}^{(2)}$，$T_2^{(3)}$，$T_{13}^{(1)}$，$T_{13}^{(2)}$，$T_{23}^{(1)}$，$T_{23}^{(2)}$，$T_3^{(3)}$，等依此类推. $SU(N)$群任意元素u可表为指数矩阵形式：

$$
u=e^{-iH}=\exp\left\{-i\sum_{A=1}^{N^2-1}\omega_A T_A\right\}, \quad \mathrm{tr}(T_A T_B)=\frac{1}{2}\delta_{AB},
$$

$$
H=\sum_{A=1}^{N^2-1}\omega_A T_A=\sum_{a<b}\{\omega_{ab}^{(1)}T_{ab}^{(1)}+\omega_{ab}^{(2)}T_{ab}^{(2)}\}+\sum_{a=2}^{N}\omega_a^{(3)}T_a^{(3)}. \tag{7.2}
$$

★　SU(N)群的n阶协变张量$\boldsymbol{T}_{a_1\cdots a_n}$按SU($N$)群$n$个自身表示的直乘变换

$$
(O_u\boldsymbol{T})_{a_1\cdots a_n}=\sum_{d_1\cdots d_n}u_{a_1d_1}\cdots u_{a_nd_n}\boldsymbol{T}_{d_1\cdots d_n}. \tag{7.3}
$$

张量基$(\Theta_{b_1\cdots b_n})_{a_1\cdots a_n}$则按下式变换

$$
\begin{aligned}
(\Theta_{b_1\cdots b_n})_{a_1\cdots a_n} &= \delta_{a_1 b_1}\cdots\delta_{a_n b_n}, \\
(O_u\Theta_{b_1\cdots b_n})_{a_1\cdots a_n} &= \sum_{d_1\cdots d_n} u_{a_1 d_1}\cdots u_{a_n d_n}(\Theta_{b_1\cdots b_n})_{d_1\cdots d_n} \\
&= u_{a_1 b_1}\cdots u_{a_n b_n} \\
&= \sum_{d_1\cdots d_n}(\Theta_{d_1\cdots d_n})_{a_1\cdots a_n} u_{d_1 b_1}\cdots u_{d_n b_n}. \qquad (7.4)
\end{aligned}
$$

在张量或张量基的变换中，变换矩阵是以矩阵元素形式出现的，它们的乘积次序可以交换，因此张量指标间的对称性质在SU(N)变换中保持不变，从而可以根据张量指标的对称性质，把张量空间分解为不可约张量子空间的直和.

★　为了描写张量指标之间的对称性质，首先要搞清楚张量指标间的置换变换算符 R 对张量和张量基的作用规律. R 是一个线性算符，它作用在张量 $\boldsymbol{T}$ 上得到新的张量 $\boldsymbol{T}'$，它们的分量间有一定的联系. 先举一简单例子. 设

$$
R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3) = (1\ 2)(2\ 3).
$$

则

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{T}'_{a_1a_2a_3} &= (2\ 3)\boldsymbol{T}_{a_1a_2a_3} = \boldsymbol{T}_{a_1a_3a_2}, \\
R\boldsymbol{T}_{a_1a_2a_3} &= (1\ 2)\boldsymbol{T}'_{a_1a_2a_3} = \boldsymbol{T}'_{a_2a_1a_3} = \boldsymbol{T}_{a_2a_3a_1} \neq \boldsymbol{T}_{a_3a_1a_2}.
\end{aligned}
$$

而对张量基正好相反，

$$
(2\ 3)\Theta_{b_1b_2b_3} = \Theta_{b_1b_3b_2},
$$

$$
R\Theta_{b_1b_2b_3} = (1\ 2)\Theta_{b_1b_3b_2} = \Theta_{b_3b_1b_2} \neq \Theta_{b_2b_3b_1}.
$$

这两种运算是一致的，但很容易混淆. 当把张量 $\boldsymbol{T}$ 按张量基 Θ_{ab} 展开后，张量的性质表现在基上. 置换算符 R 作为线性算符，它只作用在张量基上，而不作用在系数上，

$$
\begin{aligned}
(R\boldsymbol{T})_{a_1a_2a_3} &= R\sum_{(b)} T_{b_1b_2b_3}(\Theta_{b_1b_2b_3})_{a_1a_2a_3} \\
&= \sum_{(b)} T_{b_1b_2b_3}(R\Theta_{b_1b_2b_3})_{a_1a_2a_3} \\
&= \sum_{(b)} T_{b_1b_2b_3}(\Theta_{b_3b_1b_2})_{a_1a_2a_3} = \boldsymbol{T}_{a_2a_3a_1}.
\end{aligned}
$$

一般说来，设

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix},$$

则

$$(RT)_{a_1 \cdots a_n} = T_{a_{r_1} \cdots a_{r_n}},$$

$$R\Theta_{b_1 \cdots b_n} = \Theta_{b_{s_1} \cdots b_{s_n}}. \tag{7.5}$$

容易证明 SU(N)变换和张量指标间的置换变换 R 的作用次序可以交换

$$RO_u T = O_u R T. \tag{7.6}$$

这性质常称为外尔互反性(Weyl reciprocity). 这是用杨算符分解张量空间的理论基础.

★ 张量空间 $\mathscr{T}$ 一般是可约的，对应不可约表示的张量子空间可由杨算符投影得到，$\mathscr{T}_\mu^{[\lambda]} = \mathscr{Y}_\mu^{[\lambda]}\mathscr{T}$, 因此 SU($N$)群的不等价不可约表示可用杨图描写，由不同杨图描写的表示互相不等价，由相同杨图不同正则杨表描写的表示互相等价，对应的张量子空间互相线性无关，但分属两子空间的张量一般不正交. 属张量子空间 $\mathscr{T}_\mu^{[\lambda]}$ 的张量都可表为如下张量的线性组合：

$$\mathscr{Y}_\mu^{[\lambda]}\Theta_{a_1 \cdots a_n} = \mathscr{Y}_\mu^{[\lambda]} S\Theta_{b_1 \cdots b_n}, \quad b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n. \tag{7.7}$$

此张量可用张量杨表描写，它是在正则杨表 $\mathscr{Y}_\mu^{[\lambda]}$ 填 j 的格子中填入 a_j 所得到的杨表，其中 $1 \leqslant j \leqslant n$.

由于杨算符满足一定的对称性质和福克条件，张量杨表间有若干线性关系. 例如对应正则杨表 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$ 的杨算符 $\mathscr{Y}$, 有

$$\mathscr{Y}\Theta_{abc} = -\mathscr{Y}(1\ 3)\Theta_{abc} = -\mathscr{Y}\Theta_{cba},$$

$$\mathscr{Y}\Theta_{abc} = \mathscr{Y}\{(2\ 1) + (2\ 3)\}\Theta_{abc} = \mathscr{Y}\Theta_{bac} + \mathscr{Y}\Theta_{acb},$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c \\ \cline{1-1}\end{array} = -\begin{array}{|c|c|}\hline c & b \\ \hline a \\ \cline{1-1}\end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c \\ \cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline b & a \\ \hline c \\ \cline{1-1}\end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline a & c \\ \hline b \\ \cline{1-1}\end{array} \tag{7.8}$$

对更复杂的杨图，张量杨表间也有类似(7.8)式的关系，这些关系与杨算符具体形式无关. 由前一关系知，在张量杨表中同一列的填数反对称，因此同一列有相同填数的张量杨表为零. 各列中较小填数可通过此反对称关系移到较上面的格子. 同样，各行中较小的填数可由后一个关系移到较左面的格子. 最后得到的杨

表中，同一列上面的填数小于下面的填数，同一行左面的填数不大于右面的填数，这样的张量杨表称为正则张量杨表，所有张量杨表都可表为正则张量杨表的线性组合．正则张量杨表构成张量子空间 $\mathcal{T}_{\mu}^{[\lambda]}$ 的一组完备基，它们一般不正交归一．填数不同的正则张量杨表互相正交，填数相同但填法不同的正则张量杨表可能不正交．要找正交归一的基则需把填数相同的正则张量杨表作适当的线性组合和归一化．

正则张量杨表构成张量子空间 $\mathcal{T}_{\mu}^{[\lambda]}$ 完备基的问题还可从另一角度来讨论．设 $\mathcal{Y}_{\mu}^{[\lambda]}$ 是正则杨算符，则显然下面张量对应正则张量杨表

$$\mathcal{Y}_{\nu}^{[\lambda]}\Theta_{b_1\cdots b_n}, \qquad b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n. \tag{7.9}$$

设 $R_{\mu\nu}$ 是把正则杨表 $\mathcal{Y}_{\nu}^{[\lambda]}$ 变成正则杨表 $\mathcal{Y}_{\mu}^{[\lambda]}$ 的置换．因为

$$\mathcal{Y}_{\mu}^{[\lambda]}R_{\mu\nu}\Theta_{b_1\cdots b_n} = R_{\mu\nu}\{\mathcal{Y}_{\nu}^{[\lambda]}\Theta_{b_1\cdots b_n}\}, \tag{7.10}$$

不难检验，花括号中的张量在张量子空间 $\mathcal{Y}_{\nu}^{[\lambda]}\mathcal{T}$ 中的张量杨表刚好和等式左面的张量在张量子空间 $\mathcal{Y}_{\mu}^{[\lambda]}\mathcal{T}$ 中的张量杨表相同，也就是说，在 $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$ 的条件下，它们都是正则张量杨表．既然 $\mathcal{Y}_{\mu}^{[\lambda]}R_{\mu\nu}$ 是置换群 S_n 右理想的一组完备基，$\mathcal{Y}_{\mu}^{[\lambda]}S$ 可以按它们展开，(7.7)式给出的张量杨表就都可表为(7.10)式的正则张量杨表的线性组合．另一方面，由(7.10)式还可看到，在对应给定杨图[λ]的各张量子空间 $\mathcal{T}_{\mu}^{[\lambda]}$ 中，用相同正则张量杨表给出的基，在张量指标的置换变换中，构成置换群 S_n 的不可约表示[λ]的标准基．

n 阶对称张量对应的表示用一行的杨图[n]描写，n 阶反对称张量对应的表示用一列的杨图[1^n]描写，N 阶反对称张量对应恒等表示，用杨图[1^N]描写．用大于 N 行的杨图描写的张量子空间是零空间．用两个杨图[λ]和[μ]描写的两不可约表示的直乘分解，可用立特武德-理查森规则计算，但在分解式中如出现有大于 N 行的杨图，应把它去掉．用 N 行的杨图[λ]描写的表示等价于去掉填满 N 行的那些列所得的杨图[λ']描写的表示，[λ]$\simeq$[λ']．

★　逆变张量按 u^* 的直乘来变换．逆变张量空间也可以用杨算符投影来分解，得到的表示用带星号的杨图[λ]*标记，它是[λ]表示的复共轭表示．对于既有协变指标又有逆变指标的混合张量，先要把它分解为无迹张量之和．对无迹混合张量，分别对协变指标和逆变指标用杨算符投影，得到用一对杨图[λ]\[μ]*描写的无迹混合张量．当两个杨图[λ]和[μ]的行数和大于 N 时，所描写的无迹混合张量空间是零空间．

用一列杨图[1^n]*描写的反对称逆变张量可通过 N 阶完全反对称张量 $\epsilon_{a_1\cdots a_N}$ 化为用一列杨图[1^{N-n}]描写的反对称协变张量．一般说来，用一对杨图

$[\lambda]\backslash[\mu]^*$ 描写的混合张量，可把杨图 $[\mu]^*$ 第一列（设为 m 格）改为 $(N-m)$ 格，直接与原来的杨图 $[\lambda]$ 拼接，即

$$[\lambda]\backslash[\mu]^* \simeq [\lambda']\backslash[\mu']^*,$$

其中杨图 $[\mu']$ 比杨图 $[\mu]$ 少了含 m 格的第一列，而杨图 $[\lambda']$ 比杨图 $[\lambda]$ 多了含 $(N-m)$ 格的第一列．这方法可继续应用或逆向应用，直至逆（或协）变指标全都变成协（或逆）变指标．表示 $[\mu]^*$ 等价于满足如下性质的表示 $[\lambda]$：把杨图 $[\mu]$ 倒过来，并与杨图 $[\lambda]$ 拼接，可得一个 N 行的长方形．

★　用杨图 $[\lambda]$ 描写的 SU(N) 群表示的维数 $d_{[\lambda]}(\mathrm{SU}(N))$ 为两个对应杨图 $[\lambda]$ 的杨表中各填数乘积之商

$$d_{[\lambda]}(\mathrm{SU}(N)) = \prod_{jk}\frac{N-j+k}{h_{jk}} = \frac{Y_A^{[\lambda]}}{Y_h^{[\lambda]}}, \tag{7.11}$$

其中分子的杨表 $Y_A^{[\lambda]}$ 中第 j 行第 k 列的格子填以 $(N-j+k)$，分母的杨表 $Y_h^{[\lambda]}$ 中各格填以该格的钩形数 h_{jk}，即该格所在行右面的格子数加上该格所在列下面的格子数再加一．

1．计算 SU(3) 群和 SU(6) 群用下列杨图标记的不可约表示的维数：

$$[3],\quad [2,1],\quad [3,3],\quad [4,2],\quad [5,1].$$

解

$$d_{[3]}(\mathrm{SU}(3)) = \frac{3\ 4\ 5}{3\ 2\ 1} = 10, \qquad d_{[3]}(\mathrm{SU}(6)) = \frac{6\ 7\ 8}{3\ 2\ 1} = 56,$$

$$d_{[2,1]}(\mathrm{SU}(3)) = \frac{\begin{array}{l}3\ 4\\ 2\end{array}}{\begin{array}{l}3\ 1\\ 1\end{array}} = 8, \qquad d_{[2,1]}(\mathrm{SU}(6)) = \frac{\begin{array}{l}6\ 7\\ 5\end{array}}{\begin{array}{l}3\ 1\\ 1\end{array}} = 70,$$

$$d_{[3,3]}(\mathrm{SU}(3)) = \frac{\begin{array}{l}3\ 4\ 5\\ 2\ 3\ 4\end{array}}{\begin{array}{l}4\ 3\ 2\\ 3\ 2\ 1\end{array}} = 10, \qquad d_{[3}(\mathrm{SU}(6)) = \frac{\begin{array}{l}6\ 7\ 8\\ 5\ 6\ 7\end{array}}{\begin{array}{l}4\ 3\ 2\\ 3\ 2\ 1\end{array}} = 490,$$

$$d_{[4,2]}(\mathrm{SU}(3)) = \frac{\begin{array}{l}3\ 4\ 5\ 6\\ 2\ 3\end{array}}{\begin{array}{l}5\ 4\ 2\ 1\\ 2\ 1\end{array}} = 27, \qquad d_{[3}(\mathrm{SU}(6)) = \frac{\begin{array}{l}6\ 7\ 8\ 9\\ 5\ 6\end{array}}{\begin{array}{l}5\ 4\ 2\ 1\\ 2\ 1\end{array}} = 1134,$$

$$d_{[5,1]}(\mathrm{SU}(3)) = \frac{\begin{array}{l}3\ 4\ 5\ 6\ 7\\ 2\end{array}}{\begin{array}{l}6\ 4\ 3\ 2\ 1\\ 1\end{array}} = 35,\quad d_{[5,1]}(\mathrm{SU}(6)) = \frac{\begin{array}{l}6\ 7\ 8\ 9\ 10\\ 5\end{array}}{\begin{array}{l}6\ 4\ 3\ 2\ 1\\ 1\end{array}} = 1050,$$

2. 对 SU(3)群和 SU(6)群，分别计算下列表示直乘分解的克莱布施-戈登级数，并用维数公式检验：(1) $[2,1]\otimes[3,0]$，(2) $[3,0]\otimes[3,0]$，(3) $[3,0]\otimes[3,3]$，(4) $[4,2]\otimes[2,1]$.

解 (1)

$$\begin{array}{l}0\ 0\\ 0\end{array} \otimes 1\ 1\ 1 \simeq \begin{array}{l}0\ 0\ 1\ 1\ 1\\ 0\end{array} \oplus \begin{array}{l}0\ 0\ 1\ 1\\ 0\ 1\end{array} \oplus \begin{array}{l}0\ 0\ 1\ 1\\ 0\\ 1\end{array} \oplus \begin{array}{l}0\ 0\ 1\\ 0\ 1\\ 1\end{array}$$

$$\mathrm{SU}(3): 8\times 10 = 80 = 35+27+10+8,$$

$$\mathrm{SU}(6): 70\times 56 = 3920 = 1050+1134+840+896.$$

(2)

$$0\ 0\ 0 \otimes 1\ 1\ 1 \simeq 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1 \oplus \begin{array}{l}0\ 0\ 0\ 1\ 1\\ 1\end{array} \oplus \begin{array}{l}0\ 0\ 0\ 1\\ 1\ 1\end{array} \oplus \begin{array}{l}0\ 0\ 0\\ 1\ 1\ 1\end{array},$$

$$\mathrm{SU}(3): 10\times 10 = 100 = 28+35+27+10,$$

$$\mathrm{SU}(6): 56\times 56 = 3136 = 462+1050+1134+490.$$

(3)

$$1\ 1\ 1 \oplus \begin{array}{l}0\ 0\ 0\\ 0\ 0\ 0\end{array} \simeq \begin{array}{l}0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\\ 0\ 0\ 0\end{array} \oplus \begin{array}{l}0\ 0\ 0\ 1\ 1\\ 0\ 0\ 0\\ 1\end{array} \oplus \begin{array}{l}0\ 0\ 0\ 1\\ 0\ 0\ 0\\ 1\ 1\end{array} \oplus \begin{array}{l}0\ 0\ 0\\ 0\ 0\ 0\\ 1\ 1\ 1\end{array},$$

$$\mathrm{SU}(3): 10\times 10 = 100 = 64+27+8+1,$$

$$\mathrm{SU}(6): 56\times 490 = 27440 = 9240+11340+5880+980.$$

(4)

$$\begin{array}{l}0\,0\,0\,0\\0\,0\end{array}\oplus\begin{array}{l}1\,1\\2\end{array}\simeq\begin{array}{l}0\,0\,0\,0\,1\,1\\0\,0\,2\end{array}\oplus\begin{array}{l}0\,0\,0\,0\,1\,1\\0\,0\\2\end{array}\oplus\begin{array}{l}0\,0\,0\,0\,1\\0\,0\,1\,2\end{array}$$

$$\oplus\begin{array}{l}0\,0\,0\,0\,1\\0\,0\,1\\2\end{array}\oplus\begin{array}{l}0\,0\,0\,0\,1\\0\,0\,2\\1\end{array}\oplus\begin{array}{l}0\,0\,0\,0\,1\\0\,0\\1\,2\end{array}\oplus\begin{array}{l}0\,0\,0\,0\,1\\0\,0\\1\\2\end{array}$$

$$\oplus\begin{array}{l}0\,0\,0\,0\\0\,0\,1\,1\\2\end{array}\oplus\begin{array}{l}0\,0\,0\,0\\0\,0\,1\\1\,2\end{array}\oplus\begin{array}{l}0\,0\,0\,0\\0\,0\,1\\1\\2\end{array}\oplus\begin{array}{l}0\,0\,0\,0\\0\,0\\1\,1\\2\end{array},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{SU}(3):27\times 8&=216\\&=64+35+35+2\times 27+10+0+10+8+0+0,\\\mathrm{SU}(6):1134\times 70&=79380\\&=9240+11550+5880+2\times 11340+6000+5670\\&\quad+4704+5880+4536+3240.\end{aligned}$$

3. 设 $\mathscr{T}$ 是 SU(3) 群的三阶张量空间，正则杨算符 $\mathscr{Y}$ 对应的正则杨表是 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$，试用正则张量杨表方法，具体写出张量子空间 $\mathscr{Y}\mathscr{T}$ 的完备基.

解 先写出杨算符 $\mathscr{Y}$ 对张量基作用的展开式：

$$\begin{aligned}\mathscr{Y}\Theta_{abc}&=\{E+(1\ 2)-(1\ 3)-(1\ 2)(1\ 3)\}\Theta_{abc}\\&=\Theta_{abc}+\Theta_{bac}-\Theta_{cba}-\Theta_{bca}.\end{aligned}$$

对 SU(3) 群的表示 [2,1]，张量杨表可分两类，一类是有两个填数相同，这样的张量杨表两两成对，互差负号，其中(左面)一个是正则张量杨表

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}=\mathscr{Y}\Theta_{112}=2\Theta_{112}-\Theta_{211}-\Theta_{121},$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}=\mathscr{Y}\Theta_{113}=2\Theta_{113}-\Theta_{311}-\Theta_{131},$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}=\mathscr{Y}\Theta_{122}=\Theta_{122}+\Theta_{212}-2\Theta_{221},$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|}\hline 3&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}=\mathscr{Y}\Theta_{223}=2\Theta_{223}-\Theta_{322}-\Theta_{232},$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|}\hline 3&3\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}=\mathscr{Y}\Theta_{133}=\Theta_{133}+\Theta_{313}-2\Theta_{331},$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|}\hline 3&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}=\mathscr{Y}\Theta_{233}=\Theta_{233}+\Theta_{323}-2\Theta_{332}.$$

另一类是三个填数都不同，其中两个是正则张量杨表，其他张量杨表可通过(7.8)式表为正则张量杨表的线性组合.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|}\hline 3&2\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}=\mathscr{Y}\Theta_{123}=\Theta_{123}+\Theta_{213}-\Theta_{321}-\Theta_{231},$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}=\mathscr{Y}\Theta_{132}=\Theta_{132}+\Theta_{312}-\Theta_{231}-\Theta_{321},$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}=\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}-\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$$
$$=\mathscr{Y}\Theta_{213}=\Theta_{213}+\Theta_{123}-\Theta_{312}-\Theta_{132}.$$

子空间 $\mathscr{W}$ 是八维的，八个基可用正则张量杨表表达. 如果规定原来的基 Θ_{abc} 是正交归一的，从上式可知，最后两个正则张量杨表不正交，而且模(自内积)也与其它正则张量杨表不同.

4. 对于 SU(3)群的不可约表示[3,1]，试把所有非零张量杨表表为正则张量杨表的线性组合.

解： 对 SU(3)群，张量杨表中的填数只能取 1，2 和 3，而且相同的数不能填在同一列. 非零的张量杨表可分三类. 一是有三个填数相同的张量杨表，按(7.8)式有

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a&a&a\\\hline b\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|c|}\hline b&a&a\\\hline a\\\cline{1-1}\end{array},$$

当 $a<b$ 时左面的张量杨表是正则张量杨表，而 $a>b$ 时右面的张量杨表是正则

张量杨表. 这样的正则张量杨表共有 $3\times2=6$ 个. 二是两两填数相同的张量杨表, 有

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a&a&b\\\hline b\\\cline{1-1}\end{array}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline a&b&a\\\hline b\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|c|}\hline b&b&a\\\hline a\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|c|}\hline b&a&b\\\hline a\\\cline{1-1}\end{array}$$

当 $a<b$ 时第一个张量杨表是正则张量杨表, 而 $a>b$ 时第三个张量杨表是正则张量杨表. 这样的正则张量杨表共有 3 个. 三是有一对填数相同的张量杨表, 其中共有六个正则张量杨表, 下面按照(7.8)式把其他张量杨表展开为正则张量杨表的线性组合.

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&1&2\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&2&1\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&1&3\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&3&1\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&1&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&1&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}-\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&3\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&3&2\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&2&2\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array},$$

$$\begin{aligned}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}&=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&2&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&1&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\\&=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}-\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array},\end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&3&3\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&2&3\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&3&2\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array},$$

$$\begin{aligned}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}&=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&3&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&1&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}=-\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&3&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\\&=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}-\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}.\end{aligned}$$

SU(3)群的不可约表示[3,1]是 15 维表示, 共有 15 个正则张量杨表.

5．设 $\mathscr{T}$ 是 SU(3)群的四阶张量空间，正则杨算符 $\mathscr{Y}$ 对应的杨表为 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$，试在张量子空间 $\mathscr{YT}$ 中写出所有正则张量杨表的具体展开式.

解： 先把杨算符 $\mathscr{Y}$ 对张量基的作用具体写出来：

$$\begin{aligned}\mathscr{Y}\Theta_{abcd} &= \{E + (1\ 2) + (1\ 4) + (2\ 4) + (1\ 2\ 4) + (1\ 4\ 2) - (1\ 3) \\ &\quad - (2\ 1\ 3) - (4\ 1\ 3) - (2\ 4)(1\ 3) - (2\ 4\ 1\ 3) - (4\ 2\ 1\ 3)\}\Theta_{abcd} \\ &= \Theta_{abcd} + \Theta_{bacd} + \Theta_{dbca} + \Theta_{adcb} + \Theta_{dacb} + \Theta_{bdca} \\ &\quad - \Theta_{cbad} - \Theta_{bcad} - \Theta_{dbac} - \Theta_{cdab} - \Theta_{dcab} - \Theta_{bdac}.\end{aligned}$$

根据上题的计算，正则张量杨表分三类. 第一类正则张量杨表有三个填数相同，共有六个：

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & a & a \\ \hline b \\ \cline{1-1}\end{array} = -\begin{array}{|c|c|c|}\hline b & a & a \\ \hline a \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$$= \mathscr{Y}\Theta_{aaba} = 6\Theta_{aaba} - 2\Theta_{baaa} - 2\Theta_{abaa} - 2\Theta_{aaab}.$$

当 $a<b$ 时左面那个是正则张量杨表，$a>b$ 时右面那个是正则张量杨表，设原来的张量基 Θ_{abcd} 是正交归一的，则此正则张量杨表的模平方为 48. 第二类正则张量杨表的填数两两相等，共有三个：

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a & a & b \\ \hline b \\ \cline{1-1}\end{array} = \mathscr{Y}\Theta_{aabb} = 2\Theta_{aabb} + 2\Theta_{baba} + 2\Theta_{abba} - 2\Theta_{baab} - 2\Theta_{abab} - 2\Theta_{bbaa}.$$

其中 a 和 b 的取值为 1，2 和 3，且 $a<b$. 正则张量杨表的模平方为 24. 第三类正则张量杨表，有一对填数相同，另两个填数不同. 这样的正则张量杨表共有六个：

$$\begin{aligned}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & a \\ \hline b \\ \cline{1-1}\end{array} &= \mathscr{Y}\Theta_{11ba} - 2\Theta_{11ba} + 2\Theta_{a1b1} + 2\Theta_{1ab1} - \Theta_{b11a} \\ &\quad - \Theta_{1b1a} - \Theta_{a11b} - \Theta_{ba11} - \Theta_{ab11} - \Theta_{1a1b}, \\ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & a & a \\ \hline b \\ \cline{1-1}\end{array} &= \mathscr{Y}\Theta_{1aba} = 2\Theta_{1aba} + 2\Theta_{a1ba} + 2\Theta_{aab1} \\ &\quad - 2\Theta_{ba1a} - 2\Theta_{ab1a} - 2\Theta_{aa1b},\end{aligned}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} = \mathscr{Y}\Theta_{1223} = \Theta_{1223}+\Theta_{2123}+\Theta_{3221}+\Theta_{1322}$$

$$+\Theta_{3122}+\Theta_{2321}-2\Theta_{2213}-2\Theta_{3212}-2\Theta_{2312},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} = \mathscr{Y}\Theta_{1233} = \Theta_{1233}+\Theta_{2133}+\Theta_{3231}+\Theta_{1332}$$

$$+\Theta_{3132}+\Theta_{2331}-2\Theta_{3213}-2\Theta_{2313}-2\Theta_{3312}.$$

其中 a 和 b 不相等，分别取 2 和 3. 第二式包含两个正则张量杨表，它们的模平方为 24，其余四个正则张量杨表的模平方为 18. 填数相同的两正则张量杨表互相不正交.

6. 把下面 SU(6)群的无迹混合张量表示变换成协变张量表示，并计算这些表示的维数：

(1) $[3,2,1]^*$，　(2) $[3,2,1]\backslash[3,3]^*$，　(3) $[4,3,1]\backslash[3,2]^*$.

解　(1) $[3,2,1]^* \simeq [1^3]\backslash[2,1]^* \simeq [2^3,1]\backslash[1]^* \simeq [3^3,2,1]$,

$$d_{[3,2,1]}(\mathrm{SU}(6)) = \frac{\begin{array}{l}6\ 7\ 8\\ 5\ 6\\ 4\end{array}}{\begin{array}{l}5\ 3\ 1\\ 3\ 1\\ 1\end{array}} = 896, \qquad d_{[3^3,2,1]}(\mathrm{SU}(6)) = \frac{\begin{array}{l}6\ 7\ 8\\ 5\ 6\ 7\\ 4\ 5\ 6\\ 3\ 4\\ 2\end{array}}{\begin{array}{l}7\ 5\ 3\\ 6\ 4\ 2\\ 5\ 3\ 1\\ 3\ 1\\ 1\end{array}} = 896.$$

(2) $[3,2,1]\backslash[3,3]^* \simeq [4,3,2,1]\backslash[2,2]^* \simeq [5,4,3,2]\backslash[1,1]^* \simeq [6,5,4,3]$,

$$d_{[6,5,4,3]}(\mathrm{SU}(6)) = \frac{\begin{array}{l}6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\\ 4\ 5\ 6\ 7\\ 3\ 4\ 5\end{array}}{\begin{array}{l}9\ 8\ 7\ 5\ 3\ 1\\ 7\ 6\ 5\ 3\ 1\\ 5\ 4\ 3\ 1\\ 3\ 2\ 1\end{array}} = 147840.$$

(3) $[4,3,1]\backslash[3,2]^* \simeq [5,4,2,1]\backslash[2,1]^* \simeq [6,5,3,2]\backslash[1]^* \simeq [7,6,4,3,1]$,

$$d_{[7,6,4,3,1]}(\mathrm{SU}(6)) = \frac{\begin{array}{l} 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12 \\ 5\ 6\ 7\ 8\ \ 9\ 10 \\ 4\ 5\ 6\ 7 \\ 3\ 4\ 5 \\ 2 \end{array}}{\begin{array}{l} 11\ 9\ 8\ 6\ 4\ 3\ 1 \\ 9\ 7\ 6\ 4\ 2\ 1 \\ 6\ 4\ 3\ 1 \\ 4\ 2\ 1 \\ 1 \end{array}} = 612500.$$

7. 按下列步骤证明：

$$\sum_{A=1}^{N^2-1} (T_A)_{ac}(T_A)_{bd} = \frac{1}{2}\delta_a^d\delta_b^c - \frac{1}{2N}\delta_a^c\delta_b^d.$$

其中$(T_A)_{ac}$是 SU(N)群自身表示的生成元.

(1) 定义 SU(N) 群(2 2) 阶混合张量

$$\boldsymbol{T}_{ab}^{cd} \equiv \sum_{A=1}^{N^2-1} (T_A)_{ac}(T_A)_{bd},$$

证明它在 SU(N) 变换中保持不变.

(2) SU(N) 群不变的(2 2) 阶混合张量只能是 $\delta_a^c\delta_b^d$ 和 $\delta_a^d\delta_b^c$ 的线性组合.

(3) 把 $\boldsymbol{T}_{ab}{}^{cd}$ 按 δ 函数展开，确定组合系数，最后证明上式.

证　定义由 SU(N) 群自身表示生成元 T_A 构成的 SU(N) 群(2 2) 阶混合张量

$$\boldsymbol{T}_{ab}^{cd} = \sum_{A=1}^{N^2-1} (T_A)_{ac}(T_A)_{bd},$$

可以证明它在 SU(N)变换中是不变张量，

$$\begin{aligned} O_u \boldsymbol{T}_{ab}^{cd} &= \sum_{A=1}^{N^2-1} (uT_Au^{-1})_{ac}(uT_Au^{-1})_{bd} \\ &= \sum_{A,B,C=1}^{N^2-1} (T_B)_{ac}(T_C)_{bd} D_{BA}^{ad}(u) D_{CA}^{ad}(u) = \boldsymbol{T}_{ab}^{cd}. \end{aligned}$$

因此它只能表为对 SU(N)群不变的混合张量 δ_a^c 的乘积，即

$$\sum_{A=1}^{N^2-1}(T_A)_{ac}(T_A)_{bd} = p\delta_a^c\delta_b^d + q\delta_a^d\delta_b^c.$$

由于 T_A 是无迹矩阵，取 $a=c$，并对 a 求和，得 $Np+q=0$. 再取 $a=b=c=d=N$，因为

$$(T_A)_{NN} = \begin{cases} 0, & \text{当 } A \neq N^2-1 \\ -\left(\dfrac{N-1}{2N}\right)^{1/2}, & \text{当 } A = N^2-1. \end{cases}$$

所以 $p+q=(N-1)/(2N)$，解得 $p=-(2N)^{-1}$ 和 $q=1/2$. 证完.

二、SU(N)群生成元的谢瓦莱基和表示的盖尔范德基

★ 把 SU(N)群的生成元重新组合，得到一组新的生成元，它们在自身表示中取如下形式：H_a 是对角的，只有相邻两个对角元为 1 和 -1，E_{ab}，$a\neq b$，只有 a 行 b 列矩阵元素为 1，其余矩阵元素都为零. 特别选出如下 $3(N-1)$ 个生成元，称为谢瓦莱(Chevalley)基：

$$\begin{aligned}
(H_a)_{cd} &= \delta_{cd}(\delta_{ac} - \delta_{(a+1)c}), \\
(E_a)_{cd} &= (E_{a(a+1)})_{cd} = \delta_{ac}\delta_{(a+1)d}, \quad 1 \leqslant a \leqslant N-1, \\
(F_a)_{cd} &= (E_{(a+1)a})_{cd} = \delta_{(a+1)c}\delta_{ad},
\end{aligned} \tag{7.12}$$

显然其余的生成元 $(E_{ab})_{cd}=\delta_{ac}\delta_{bd}$，$a\neq b$，都可表为 E_a 或 F_a 的对易关系形式，当 $a<b$ 时有

$$E_{ab} = [[\cdots[[E_a, E_{a+1}], E_{a+2}]\cdots], E_{b-1}],$$

$$E_{ba} = [[\cdots[[F_{b-1}, F_{b-2}], F_{b-3}]\cdots], F_a].$$

生成元之间这样的对易关系在任何表示中都成立，因此对 SU(N)群任一表示，只需要知道 $3(N-1)$ 个谢瓦莱基的矩阵形式，就知道所有其他生成元的矩阵形式. 谢瓦莱基满足如下对易关系：

$$
\begin{aligned}
&[H_a, H_b] = 0, \qquad [E_a, F_b] = \delta_{ab} H_a, \\
&[H_a, E_b] = 2\delta_{ab} E_b - \delta_{a(b+1)} E_b - \delta_{a(b-1)} E_b, \\
&[H_a, F_b] = -2\delta_{ab} F_b + \delta_{a(b+1)} F_b + \delta_{a(b-1)} F_b, \\
&[E_a, [E_a, E_{a+1}]] = [F_a, [F_a, F_{a+1}]] = 0, \\
&[E_a, E_b] = [F_a, F_b] = 0, \qquad 当 \mid a - b \mid \geqslant 2.
\end{aligned} \tag{7.13}
$$

特别要注意，对给定的 a，三个生成元 H_a、E_a和F_a满足 SU(2)群生成元 $2T_3$和$T_{\pm}$间的标准对易关系：

$$
[E_a, F_a] = H_a, \qquad [H_a, E_a] = 2E_a, \qquad [H_a, F_a] = -2F_a,
$$

因而构成的 SU(2)子代数，记作 $\mathscr{A}_a$. 子代数 $\mathscr{A}_a$在计算 SU(N)群不可约表示的状态基和生成元的表示矩阵中起重要作用.

★　在 SU(N)群的给定不可约表示$[\lambda]$中，取 H_a的共同本征状态$|\boldsymbol{m}\rangle$作为基，

$$
H_a \mid \boldsymbol{m}\rangle = m_a \mid \boldsymbol{m}\rangle. \tag{7.14}
$$

对应的本征值 m_a构成$(N-1)$维矢量，称为权矢量，简称权. 如果一个权对应多个线性无关的状态，则此权称为重权，否则称为单权. 把 E_a称为升权算符，F_a称为降权算符.

由(7.14)式知，正则张量杨表正是这样的基$|\boldsymbol{m}\rangle$，m_a等于正则张量杨表中填 a 的格子数减去填$(a+1)$的格子数，因此都是整数. 若有几个正则张量杨表，它们的填数相同但填法不同，则它们对应重权，一般需要作线性组合后才能构成正交归一的基$|\boldsymbol{m}\rangle$，单权时一般也需要归一化. F_a作用在正则张量杨表上得到若干张量杨表之和，其中每一个张量杨表都是由原来的正则张量杨表，把其中一个填 a 的格子改填成$(a+1)$而得到，从而使权矢量的分量中，m_a减少 2，m_{a+1}和m_{a-1}都增加 1，其余不变. 这些张量杨表又都可化为正则张量杨表的线性组合. E_a的作用正相反，它把填$(a+1)$的格子改填成 a.

SU(N)群的任一不可约表示$[\lambda]$中，有一个对应单权的正则张量杨表，它各格的填数都等于该格子所在行的行数. 因此 E_a作用在此正则张量杨表上必使两个a 填在同一列，从而得零. 这样的正则张量杨表称为最高权态，对应的权称为最高权，记作 $\boldsymbol{M}$，

$$
E_a \mid \boldsymbol{M}\rangle = 0, \qquad H_a \mid \boldsymbol{M}\rangle = M_a \mid \boldsymbol{M}\rangle, \qquad M_a = \lambda_a - \lambda_{a+1} \geqslant 0. \tag{7.15}
$$

在一个不可约表示中，任何状态都可由最高权态$|\boldsymbol{M}\rangle$通过若干个降权算符的作用

得到.

★ 对 SU(N)群的任一不可约表示[λ], 可以画出一个方块权图, 其中每一个状态基都对应一个标以权矢量的方块. 对应最高权态的方块画在第一行, 每用降算符作用一次, 对应的方块位置降低一行, 遇到重权则对每一个独立的态都要画一个方块, 用序指标区分, 放在同一行. 方块中填入数的各分量,分量为负时常表为 $-m_a=\overline{m}_a$.

从最高权出发, 每次看到有正的权分量 $m_a>0$, 就用 F_a 降 m_a 次, 得到子代数 $\mathscr{A}_a$ 的一个(m_a+1)多重态, F_a 的矩阵元也与在 SU(2)的(m_a+1)多重态中的对应值相同. 如果涉及的状态都是单权, 而且正则张量杨表已归一化, 有

$$
F_a\,|\boldsymbol{m}-n\boldsymbol{r}_a\rangle=\{(m_a-n)(n+1)\}^{1/2}\,|\boldsymbol{m}-(n+1)\boldsymbol{r}_a\rangle,
$$

$$
(\boldsymbol{r}_a)_b=\begin{cases}2, & \text{当 } b=a,\\ -1, & \text{当 } b=a\pm1,\\ 0, & \text{当 } |b-a|>1.\end{cases} \tag{7.16}
$$

在有重权时, 相应状态需作适当的组合. 这样的做法一直进行到所有的权分量都不大于零为止.

对应重权状态, 通常按某一个子代数 $\mathscr{A}_a$ 的多重态来定义, 而属其他子代数 $\mathscr{A}_b$ 的多重态则需按正交归一的要求来组合, 或利用$[E_a,F_b]=\delta_{ab}H_a$的条件来计算. 具体算法可从下面习题中看出. 对没有重权的表示, 计算变得十分简单. 最后画得的方块权图, 各行包含的方块(状态)数, 随行数增加, 开始逐渐增大(至少不减少), 然后逐渐减少(至少不增大), 上下对称, 形成纺锤形.

★ SU(N)群不可约表示的正交归一基是盖尔范德(Gelfand)首先提出来的, 常称盖尔范德基, 对于重权的状态, 他规定首先按 $\mathscr{A}_1$ 子代数的多重态来选择, 如果还有重权, 再按 $\mathscr{A}_2$ 子代数的多重态来选择, 以此类推. 他还给出了在 SU(N)群不可约表示[λ]中谢瓦莱基矩阵形式的解析表达式. 盖尔范德基用 $N(N+1)/2$ 个参数 μ_{jk} 描写, $1\leqslant j\leqslant k\leqslant N$. 这组参数排列成一个倒置的三角形:

$$
|\mu_{jk}\rangle=\left|\begin{array}{ccccccc}
\mu_{1N} & & \mu_{2N} & \cdots & \mu_{(N-1)N} & & \mu_{NN}\\
& \mu_{1(N-1)} & & \cdots & & \mu_{(N-1)(N-1)} & \\
& & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
& & \mu_{12} & & \mu_{22} & & \\
& & & \mu_{11} & & &
\end{array}\right|
$$

对 SU(N)群不可约表示[λ]的一个权为 $\boldsymbol{m}$ 的基，有

$$
\begin{aligned}
&\mu_{jN} = \lambda_j, \qquad \mu_{NN} = 0, \\
&\mu_{jk} \geqslant \mu_{j(k-1)} \geqslant \mu_{(j+1)k}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant k \leqslant N,
\end{aligned} \tag{7.17}
$$

$$
\begin{aligned}
H_a \mid \mu_{jk}\rangle &= m_a \mid \mu_{jk}\rangle \\
E_a \mid \mu_{jk}\rangle &= \sum_{b=1}^{a} A_{ba}(\mu_{jk}) \mid \mu_{jk} + \delta_{jb}\delta_{ka}\rangle, \\
F_a \mid \mu_{jk}\rangle &= \sum_{b=1}^{a} A_{ba}(\mu_{jk} - \delta_{jb}\delta_{ka}) \mid \mu_{jk} - \delta_{jb}\delta_{ka}\rangle. \\
m_a &= -\sum_{b=1}^{a+1}\mu_{b(a+1)} + 2\sum_{b=1}^{a}\mu_{ba} - \sum_{b=1}^{a-1}\mu_{b(a-1)}, \\
A_{ba}(\mu_{jk}) &= \left\{-\prod_{t=1}^{a-1}(\mu_{t(a-1)} - \mu_{ba} - t + b - 1)\right\}^{1/2} \\
&\quad \times \left\{\frac{\prod_{p=1}^{a+1}(\mu_{p(a+1)} - \mu_{ba} - p + b)}{\prod_{u\neq b, u=1}^{a}(\mu_{ua} - \mu_{ba} - u + b)(\mu_{ua} - \mu_{ba} - u + b - 1)}\right\}^{1/2}.
\end{aligned} \tag{7.18}
$$

即 H_a的本征值等于盖尔范德基中倒数第a 行的参数之和的两倍减去倒数第$a-1$行和第 $a+1$ 行的参数之和. E_a(F_a)作用在盖尔范德基上得到基的线性组合，新基的参数是把原基中倒数第 a 行的某一个参数，在满足(7.17)的条件下，增加(减少)一.

8. 画出 SU(3)群的不可约表示[3]的方块权图，并计算降算符不为零的矩阵元. 对方块权图中的每一个权，请计算相应的正则张量杨表，并标出归一化系数.

解　由[λ] = [3 0]算出该表示的最高权为(3, 0)，对应正则张量杨表是 | 1 | 1 | 1 |. 表示[3 0]描写完全对称张量，没有重权，因而每一个权都只用一个方块表出. 方块权图由最高权态开始，因为第一个分量是 3，可用 F_1降三次，得权(1,1)，($\bar{1}$,2)和($\bar{3}$,3). 构成 $\mathscr{A}_1$子代数的四重态，F_1的矩阵元分别是$\sqrt{3}$，2 和 $\sqrt{3}$，已注在图中. 新产生的三个权，第一个分量已考虑过了，第二个分量都为正，又可分别用 F_2作用，得到$\mathscr{A}_2$子代数的多重态. 由权(1,1)得二重态，新权为(2,

$\bar{1})$，F_2的矩阵元为 1．由权$(\bar{1},2)$得三重态，新权为$(0,0)$和$(1,\bar{2})$，F_2的矩阵元都为$\sqrt{2}$．由权$(\bar{3},3)$得四重态，新权为$(\bar{2},1)$，$(\bar{1},\bar{1})$和$(0,\bar{3})$，F_2的矩阵元分别为$\sqrt{3}$，2 和$\sqrt{3}$．在新产生的权中，如第一个分量是正的，则要用 F_1作用产生 $\mathscr{A}_1$ 子代数的多重态．由权$(2,\bar{1})$得三重态，权为$(0,0)$和$(\bar{2},1)$，F_1的矩阵元都为$\sqrt{2}$，由权$(1,\bar{2})$得二重态，权为$(\bar{1},\bar{1})$，F_1的矩阵元为 1．这些权前面都已经出现过，不画新的方块．

在计算状态基与正则张量杨表的关系时要注意两点，一是按假设，基 Θ_{ab} 是正交归一的，正则张量杨表按基展开并归一化后，包含的系数是不同的，

$$\boxed{a\,|\,b\,|\,c}=\sqrt{6}\left\{6^{-1/2}(\Theta_{abc}+\Theta_{acb}+\Theta_{bac}+\Theta_{bca}-\Theta_{cab}+\Theta_{cba})\right\},$$

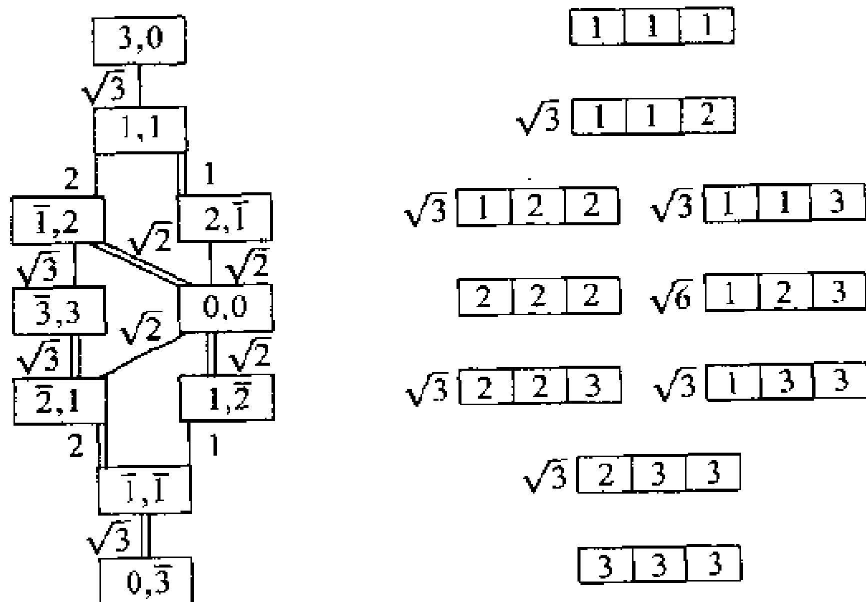
$$\boxed{a\,|\,b\,|\,b}=2\sqrt{3}\left\{3^{-1/2}(\Theta_{abb}+\Theta_{bab}+\Theta_{bba})\right\},$$

$$\boxed{a\,|\,a\,|\,a}=6\{\Theta_{aaa}\}$$

二是用降算符作用时，要把所有可能的项都算上，这样又会出现系数，例如

$$F_1\boxed{1\,|\,1\,|\,1}=3\boxed{1\,|\,1\,|\,2},\qquad F_1\boxed{1\,|\,1\,|\,2}=2\boxed{1\,|\,2\,|\,2}.$$

计算结果已在图中右半部给出．



降算符不为零的矩阵元如下：

$$F_1\,|3,0\rangle=\sqrt{3}\,|1,1\rangle,\quad F_1\,|1,1\rangle=2\,|\bar{1},2\rangle,$$

$$F_1\,|\bar{1},2\rangle=\sqrt{3}\,|\bar{3},3\rangle,\quad F_2\,|1,1\rangle=|2,\bar{1}\rangle,$$

$$F_2\,|\overline{1},2\rangle=\sqrt{2}\,|0,0\rangle,\quad F_2\,|0,0\rangle=\sqrt{2}\,|1,\overline{2}\rangle,$$

$$F_2\,|\overline{3},3\rangle=\sqrt{3}\,|\overline{2},1\rangle,\quad F_2\,|\overline{2},1\rangle,=2\,|\overline{1},\overline{1}\rangle,$$

$$F_2\,|\overline{1},\overline{1}\rangle=\sqrt{3}\,|0,\overline{3}\rangle,\quad F_1\,|2,\overline{1}\rangle=\sqrt{2}\,|0,0\rangle,$$

$$F_1\,|0,0\rangle=\sqrt{2}\,|\overline{2},1\rangle,\quad F_1\,|1,\overline{2}\rangle=|\overline{1},\overline{1}\rangle.$$

9. 画出SU(3)群的不可约表示[2,1]的方块权图，并计算降算符不为零的矩阵元. 对方块权图中的每一个权，请计算相应的正则张量杨表，并标出归一化系数.

解 由$[\lambda]=[2,1]$算出该表示的最高权为(1,1)，对应正则张量杨表是$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1\\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$.

这表示中有一个二重权(0,0)，对应正则张量杨表是$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2\\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$和$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3\\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$.

方块权图由最高权态开始，因为两个分量都是1，可用F_1和F_2分别降一次，得权$(\overline{1},2)$和$(2,\overline{1})$，矩阵元都为1. 这两个权中都有一个分量为2，分别用F_2和F_1作用后得$\mathscr{A}_2$的三重态(0,0)，$(1,\overline{2})$和$\mathscr{A}_1$的三重态(0,0)，$(\overline{2},1)$，矩阵元都是$\sqrt{2}$. 两个三重态中包含二重权(0,0). 可以规定在$\mathscr{A}_1$三重态中的(0,0)态为第一个态$(0,0)_1$，与它正交的第二个态记作$(0,0)_2$，属$\mathscr{A}_1$子代数的单态. 这样在$\mathscr{A}_2$三重态中的(0,0)态一般是上述两个态的组合，

$$F_2\,|\overline{1},2\rangle=\sqrt{2}\{a\,|(0,0)_1\rangle+b\,|(0,0)_2\rangle\},$$

系数可利用公式$E_1F_2=F_2E_1$计算

$$E_1F_2\,|\overline{1},2\rangle=2a\,|2,\overline{1}\rangle$$

$$=F_2E_1\,|\overline{1},2\rangle=F_2\,|1,1\rangle=|2,\overline{1}\rangle.$$

定出$a=1/2$，由归一化条件定出$b=\sqrt{3}/2$. 这里已选择态$(0,0)_2$的位相使b为正实数. 设

$$F_2\,|(0,0)_1\rangle=a_1\,|1,\overline{2}\rangle,\quad F_2\,|(0,0)_2\rangle=b_1\,|1,\overline{2}\rangle,$$

把公式$E_2F_2=H_2+F_2E_2$作用在$(0,0)_1$上，得

$$E_2F_2\,|(0,0)_1\rangle = a_1^2\,|(0,0)_1\rangle + a_1b_1\,|(0,0)_2\rangle$$

$$= (H_2 + F_2E_1)\,|(0,0)_1\rangle = 2^{-1}\,|(0,0)_1\rangle + \sqrt{3}/2\,|(0,0)_2\rangle,$$

选择态$|1,\bar{2}\rangle$的相位使 a_1为正实数，定出 $a_1=\sqrt{1/2}$和 $b_2=\sqrt{3/2}$. 最后分别把 F_1 和 F_2作用在态$(1,\bar{2})$和$(\bar{2},1)$上，得到共同的态$(\bar{1},\bar{1})$，矩阵元都是 1.

取杨算符 $\mathcal{Y}$对应的正则杨表为

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\,,\qquad \mathcal{Y}=E+(1\ 2)-(1\ 3)-(2\ 1\ 3).$$

典型的方块权图的系数如下

$$\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline c \\ \cline{1-1}\end{array}=2\left\{2^{-1}(\Theta_{abc}+\Theta_{bac}-\Theta_{cba}-\Theta_{bca})\right\},$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline a & b \\ \hline b \\ \cline{1-1}\end{array}=6^{1/2}\left\{6^{-1/2}(\Theta_{abb}+\Theta_{bab}-2\Theta_{bba})\right\}.$$

注意

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}=\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}+\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1}\end{array}=\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}-\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array},$$

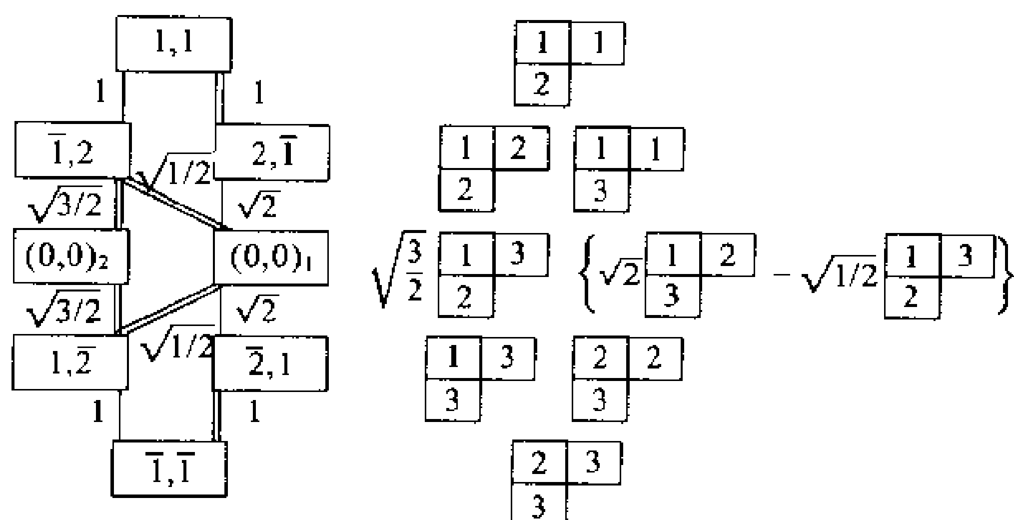
得

$$\begin{aligned}|(0,0)_1\rangle &=2^{-1/2}F_1\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}=2^{-1/2}\left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}+\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\right\}\\ &=2^{1/2}\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}-2^{-1/2}\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\\ &=\sqrt{6}\left\{12^{-1/2}(2\Theta_{123}+2\Theta_{213}-\Theta_{321}-\Theta_{231}-\Theta_{132}-\Theta_{312})\right\}.\end{aligned}$$

$$2^{-1/2}|(0,0)_1\rangle+(3/2)^{1/2}|(0,0)_2\rangle=F_2\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}=\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}+\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array},$$

$$|(0,0)_2\rangle=(3/2)^{1/2}\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}=\sqrt{6}\left\{2^{-1}(\Theta_{132}+\Theta_{312}-\Theta_{231}-\Theta_{321})\right\}.$$

计算结果列于图中.



降算符不为零的矩阵元如下：

$F_1\,|1,1\rangle=|\bar{1},2\rangle$,　　$F_2\,|1,1\rangle=|2,\bar{1}\rangle$,

$F_1\,|2,\bar{1}\rangle=\sqrt{2}\,|(0,0)_1\rangle$,　　$F_2\,|\bar{1},2\rangle=\sqrt{1/2}\,|(0,0)_1\rangle-\sqrt{3/2}\,|(0,0)_2\rangle$,

$F_1\,|(0,0)_1\rangle=\sqrt{2}\,|\bar{2},1\rangle$,　　$F_2\,|(0,0)_1\rangle=\sqrt{1/2}\,|1,\bar{2}\rangle$,

$F_2\,|(0,0)_2\rangle=\sqrt{3/2}\,|1,\bar{2}\rangle$,　　$F_1\,|1,\bar{2}\rangle=|\bar{1},\bar{1}\rangle$,

$F_2\,|\bar{2},1\rangle=|\bar{1},\bar{1}\rangle$.

10. 画出 SU(3)群的不可约表示[4]的方块权图，并计算降算符不为零的矩阵元. 对方块权图中的每一个权，请计算相应的正则张量杨表，并标出归一化系数.

解 由[λ] = [4 0]定出该表示的最高权为(4,0)，对应的正则张量杨表是 |1|1|1|1|. 表示[4 0]描写完全对称张量，没有重权，所以计算中得到的所有重复的权用同一个方块表出. 方块权图由最高权态开始，因为第一个分量是 4，可用 F_1降四次，得权(2,1)，(0,2)，$(\bar{2},3)$和$(\bar{4},4)$，构成 $\mathscr{A}_1$子代数的五重态，F_1的矩阵元是 2，$\sqrt{6}$，$\sqrt{6}$和 2，已注在图中. 新产生的四个权，第一个分量已考虑过了，第二个分量都为正，可分别用 F_2作用，得到 $\mathscr{A}_2$子代数的多重态. 由权(2,1)得二重态，新权为$(3,\bar{1})$，F_2的矩阵元为 1. 由权(0,2)得三重态，新权为(1,0)和$(2,\bar{2})$，F_2的矩阵元都为$\sqrt{2}$. 由权$(\bar{2},3)$得四重态，新权为$(\bar{1},1)$，$(0,\bar{1})$和$(1,\bar{3})$，F_2的矩阵元为$\sqrt{3}$，2，$\sqrt{3}$. 由权$(\bar{4},4)$得五重态，新权为$(\bar{3},2)$，$(\bar{2},0)$，$(\bar{1},\bar{2})$和$(0,\bar{4})$，F_2的矩阵元为 2，$\sqrt{6}$，$\sqrt{6}$和 2. 在新产生的权中，如第一个分量是正的，则

要用 F_1 作用产生 $\mathscr{A}_1$ 子代数的多重态．由权 $(3,\bar{1})$ 得四重态，权为 $(1,0)$，$(\bar{1},1)$ 和 $(\bar{3},2)$，矩阵元为 $\sqrt{3}$，2 和 $\sqrt{3}$．由权 $(2,\bar{2})$ 得三重态，权为 $(0,\bar{1})$ 和 $(\bar{2},0)$，矩阵元都为 $\sqrt{2}$．由权 $(1,\bar{3})$ 得二重态，权为 $(\bar{1},\bar{2})$，矩阵元为 1．这些权前面都已经出现过，不画新的方块．

在计算方块权图的系数时要注意两点，一是按假设，基 Θ_{abc} 是正交归一的，方块权图按基展开并归一化后，包含的系数是不同的，

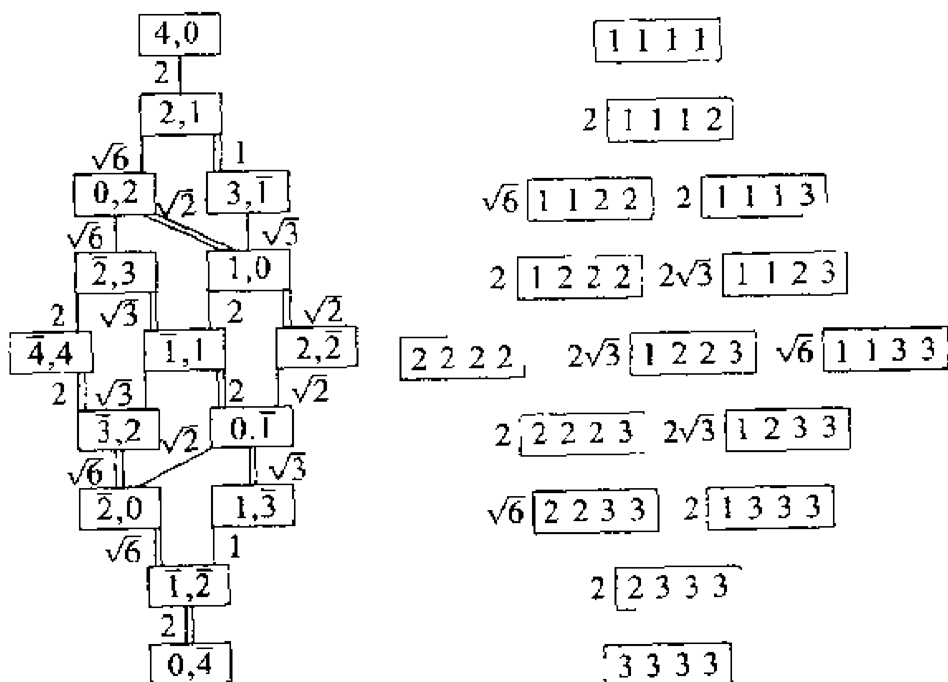
$$\boxed{a\,|\,b\,|\,c\,|\,c} = 4\sqrt{3}\{12^{-1/2}(\Theta_{abcc}+\Theta_{bacc}+\Theta_{acbc}+\Theta_{bcac}+\Theta_{cabc}+\Theta_{cbac}+\Theta_{accb}+\Theta_{bcca}+\Theta_{cacb}+\Theta_{cbca}+\Theta_{ccab}+\Theta_{ccba})\},$$

$$\boxed{a\,|\,a\,|\,b\,|\,b} = 4\sqrt{6}\{6^{-1/2}(\Theta_{aabb}+\Theta_{abab}+\Theta_{baab}+\Theta_{abba}+\Theta_{baba}+\Theta_{bbaa})\},$$

$$\boxed{a\,|\,b\,|\,b\,|\,b} = 12\{2^{-1}(\Theta_{abbb}+\Theta_{babb}+\Theta_{bbab}+\Theta_{bbba})\},$$

$$\boxed{a\,|\,a\,|\,a\,|\,a} = 24\{\Theta_{aaaa}\}.$$

二是用降算符作用时，要把所有可能的项都算上，这样又会出现系数．计算结果已在图中右半部给出．



降算符不为零的矩阵元如下：

$$F_1\,|4,0\rangle = 2\,|2,1\rangle, \qquad F_1\,|2,1\rangle = \sqrt{6}\,|0,2\rangle,$$

$$
\begin{aligned}
&F_2|2,1\rangle = |3,\bar{1}\rangle, && F_1|0,2\rangle = \sqrt{6}\,|\bar{2},3\rangle,\\
&F_2|0,2\rangle = \sqrt{2}\,|1,0\rangle, && F_1|3,\bar{1}\rangle = \sqrt{3}\,|1,0\rangle,\\
&F_1|\bar{2},3\rangle = 2\,|\bar{4},4\rangle, && F_2|\bar{2},3\rangle = \sqrt{3}\,|\bar{1},1\rangle,\\
&F_1|1,0\rangle = 2\,|\bar{1},1\rangle, && F_2|1,0\rangle = \sqrt{2}\,|2,\bar{2}\rangle,\\
&F_2|\bar{4},4\rangle = 2\,|\bar{3},2\rangle, && F_1|\bar{1},1\rangle = \sqrt{3}\,|\bar{3},2\rangle,\\
&F_2|\bar{1},1\rangle = 2\,|0,\bar{1}\rangle, && F_1|2,\bar{2}\rangle = \sqrt{2}\,|0,\bar{1}\rangle,\\
&F_2|\bar{3},2\rangle = \sqrt{6}\,|\bar{2},0\rangle, && F_1|0,\bar{1}\rangle = \sqrt{2}\,|\bar{2},0\rangle,\\
&F_2|0,\bar{1}\rangle = \sqrt{3}\,|1,\bar{3}\rangle, && F_2|\bar{2},0\rangle = \sqrt{6}\,|\bar{1},\bar{2}\rangle,\\
&F_1|1,\bar{3}\rangle = |\bar{1},\bar{2}\rangle, && F_2|\bar{1},\bar{2}\rangle = 2\,|0,\bar{4}\rangle.
\end{aligned}
$$

11. 画出 SU(3)群的不可约表示[3,1]的方块权图，计算降算符不为零的矩阵元，并对表示中的重权，计算各状态的正则张量杨表及其按张量基 Θ_{abcd} 的展开式.

解　由$[\lambda]=[3\ 1]$算出表示的最高权为(2,1)，它对应的正则张量杨表是 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\ \hline 2\\ \cline{1-1}\end{array}$. 这表示中有三个二重权，分别对应如下正则张量杨表：

$$
\begin{array}{lll}
(1,0), & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&2\\ \hline 3\\ \cline{1-1}\end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&3\\ \hline 2\\ \cline{1-1}\end{array},\\
(\bar{1},1), & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&2\\ \hline 3\\ \cline{1-1}\end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\ \hline 2\\ \cline{1-1}\end{array},\\
(0,\bar{1}), & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\ \hline 3\\ \cline{1-1}\end{array}, & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\ \hline 2\\ \cline{1-1}\end{array}.
\end{array}
$$

方块权图由最高权态开始，因为两个分量都是正的，可用 F_1 和 F_2 分别作用，得 $\mathscr{A}_1$ 子代数的三重态和 $\mathscr{A}_2$ 子代数的二重态，三重态的新权为(0,2)和$(\bar{2},3)$，F_1的矩阵元都是$\sqrt{2}$，二重态的新权为$(3,\bar{1})$，F_2的矩阵元是 1. 对权(0,2)用 F_2作用，得 $\mathscr{A}_2$ 子代数的三重态，权为(1,0)和$(2,\bar{2})$，矩阵元都是$\sqrt{2}$. 对权$(3,\bar{1})$用 F_1作用，得 $\mathscr{A}_1$ 子代数的四重态，权为(1,0)，$(\bar{1},1)$和$(\bar{3},2)$，矩阵元为$\sqrt{3}$,2,$\sqrt{3}$. 这里出现了重权(1,0). 可以规定在 $\mathscr{A}_1$ 四重态中的(1,0)态和$(\bar{1},1)$态分别为该权的第一

个态$(1,0)_1$和$(\bar{1},1)_1$，与它正交的第二个态记作$(1,0)_2$和$(\bar{1},1)_2$，属$\mathscr{A}_1$子代数的二重态，F_1的矩阵元为1. 这样，在$\mathscr{A}_2$子代数的三重态中的态$(1,0)$是上述两个态的线性组合：

$$F_2 \,|0,2\rangle = a_1 \,|(1,0)_1\rangle + a_2 \,|(1,0)_2\rangle,$$

$$F_2 \,|(1,0)_1\rangle = b_1 \,|2,\bar{2}\rangle, \qquad F_2 \,|(0,1)_2\rangle = b_2 \,|2,\bar{2}\rangle,$$

系数可利用公式$E_1F_2=F_2E_1$计算：

$$E_1F_2 \,|0,2\rangle = a_1\sqrt{3} \,|3,\bar{1}\rangle = F_2E_1 \,|0,2\rangle = \sqrt{2}F_2 \,|2,1\rangle = \sqrt{2} \,|3,\bar{1}\rangle.$$

定出$a_1=\sqrt{2/3}$，适当选择态$(1,0)_2$的位相定出$a_2=(2-2/3)^{1/2}=\sqrt{4/3}$. 把公式$E_2F_2=H_2+F_2E_2$作用在$(1,0)_1$上可得

$$E_2F_2 \,|(1,0)_1\rangle = b_1^2 \,|(1,0)_1\rangle + b_1b_2 \,|(1,0)_2\rangle$$

$$= (H_2+F_2E_2) \,|(1,0)_1\rangle = (2/3) \,|(1,0)_1\rangle + \sqrt{8/9} \,|(1,0)_2\rangle,$$

选择态$|2,\bar{2}\rangle$的相位使b_1为正实数，定出$b_1=\sqrt{2/3}$和$b_2=\sqrt{4/3}$.

权$(2,\bar{2})$第一个分量为正，在F_1作用下得$\mathscr{A}_1$子代数的三重态，权为$(0,\bar{1})$和$(\bar{2},0)$，F_1的矩阵元都是$\sqrt{2}$. 权$(0,\bar{1})$是二重权，定义在此三重态中的态为$(0,\bar{1})_1$，与之正交的态$(0,\bar{1})_2$属$\mathscr{A}_1$子代数的单态. 设

$$F_2 \,|\bar{2},3\rangle = c_1 \,|(\bar{1},1)_1\rangle + c_2 \,|(\bar{1},1)_2\rangle,$$

$$F_2 \,|(\bar{1},1)_1\rangle = d_1 \,|(0,\bar{1})_1\rangle + d_2 \,|(0,\bar{1})_2\rangle,$$

$$F_2 \,|(\bar{1},1)_2\rangle = e_1 \,|(0,\bar{1})_1\rangle + e_2 \,|(0,\bar{1})_2\rangle,$$

$$F_2 \,|(0,\bar{1})_1\rangle = f_1 \,|1,\bar{3}\rangle, \qquad F_2 \,|(0,\bar{1})_2\rangle = f_2 \,|1,\bar{3}\rangle,$$

由

$$E_1F_2 \,|\bar{2},3\rangle = 2c_1 \,|(1,0)_1\rangle + c_2 \,|(1,0)_2\rangle$$

$$= F_2E_1 \,|\bar{2},3\rangle = \sqrt{4/3} \,|(1,0)_1\rangle + \sqrt{8/3} \,|(1,0)_2\rangle,$$

定出$c_1=\sqrt{1/3}$和$c_2=\sqrt{8/3}$. 再由

$$E_1F_2 \,|(\bar{1},1)_1\rangle = d_1\sqrt{2} \,|2,\bar{2}\rangle = F_2E_1 \,|(\bar{1},1)_1\rangle = \sqrt{8/3} \,|2,\bar{2}\rangle,$$

$$E_1F_2 \,|(\bar{1},1)_2\rangle = e_1\sqrt{2} \,|2,\bar{2}\rangle = F_2E_1 \,|(\bar{1},1)_1\rangle = \sqrt{4/3} \,|2,\bar{2}\rangle,$$

定出$d_1=\sqrt{4/3}$和$e_1=\sqrt{2/3}$. 由

$$E_2F_2 \,|(\bar{1},1)_2\rangle = (\sqrt{8/9}+e_2d_2) \,|(\bar{1},1)_1\rangle + (2/3+e_2^2) \,|(\bar{1},1)_2\rangle$$

$$= (H_2 + F_2E_2)\,|(\bar{1},1)_2\rangle = \sqrt{8/9}\,|(\bar{1},1)_1\rangle + (1 + 8/3)\,|(\bar{1},1)_2\rangle,$$

选择态$|(0,\bar{1})_2\rangle$的相位使e_2为正实数，定出$e_2=\sqrt{3}$和$d_2=0$. 再由

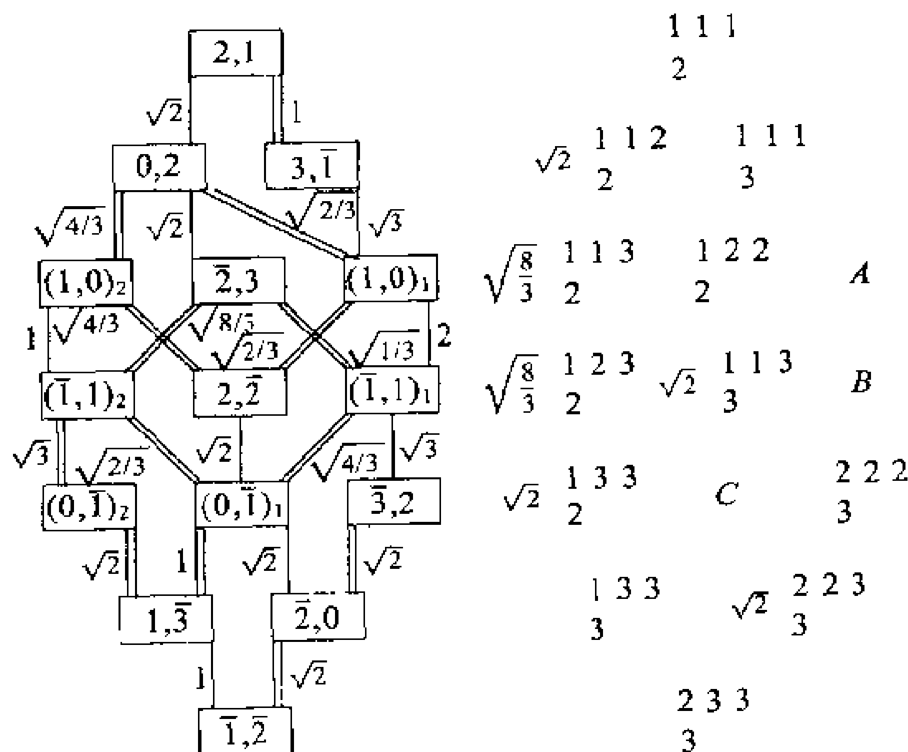
$$E_2F_2\,|(0,\bar{1})_1\rangle = f_1^2\,|(0,\bar{1})_1\rangle + f_1f_2\,|(0,\bar{1})_2\rangle$$

$$= (H_2 + F_2E_2)\,|(0,\bar{1})_1\rangle = (-1 + 4/3 + 2/3)\,|(0,\bar{1})_1\rangle + \sqrt{2}\,|(0,\bar{1})_2\rangle,$$

选择态$|1,\bar{3}\rangle$的相位使f_1是正实数，定出$f_1=1$和$f_2=\sqrt{2}$. 最后F_1作用在态$|1,\bar{3}\rangle$上得A_1子代数的二重态，权为$|\bar{1},\bar{2}\rangle$，F_1矩阵元为1. 把F_2作用在态$|\bar{3},2\rangle$和$|\bar{2},0\rangle$上，得

$$F_2\,|\bar{3},2\rangle = \sqrt{2}\,|\bar{2},0\rangle,\qquad F_2\,|\bar{2},0\rangle = \sqrt{2}\,|\bar{1},\bar{2}\rangle.$$

全部结果已标在图上.



注　1. $A=\sqrt{3}\begin{array}{l}1\,1\,2\\3\end{array}-\sqrt{\dfrac{1}{3}}\begin{array}{l}1\,1\,3\\2\end{array}$,

　　2. $B=\sqrt{3}\begin{array}{l}1\,2\,2\\3\end{array}-\sqrt{\dfrac{4}{3}}\begin{array}{l}1\,2\,3\\2\end{array}$,

　　3. $C=2\begin{array}{l}1\,2\,3\\3\end{array}-\begin{array}{l}1\,3\,3\\2\end{array}$.

现在讨论正则张量杨表的归一化系数和重权对应的正交归一状态问题. 为了

利用第 5 题的计算结果，设正则杨算符 $\mathscr{Y}$ 对应的正则杨表为 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$，

$$\begin{aligned}\mathscr{Y}\Theta_{abcd} = &\{E + (1\ 2) + (1\ 4) + (2\ 4) + (1\ 2\ 4) + (1\ 4\ 2) - (1\ 3)\\&- (2\ 1\ 3) - (4\ 1\ 3) - (2\ 4)(1\ 3) - (2\ 4\ 1\ 3) - (4\ 2\ 1\ 3)\}\Theta_{abcd}\\=&\ \Theta_{abcd} + \Theta_{bacd} + \Theta_{dbca} + \Theta_{adcb} + \Theta_{dacb} + \Theta_{bdca}\\&- \Theta_{cbad} - \Theta_{bcad} - \Theta_{dbac} - \Theta_{cdab} - \Theta_{dcab} - \Theta_{bdac}.\end{aligned}$$

典型的张量杨表的模平方为

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a&b&c\\\hline d\\\cline{1-1}\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline a&c&b\\\hline d\\\cline{1-1}\end{array} = -\begin{array}{|c|c|c|}\hline d&b&c\\\hline a\\\cline{1-1}\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a&a&a\\\hline b\\\cline{1-1}\end{array},\quad 48,\qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline a&a&b\\\hline b\\\cline{1-1}\end{array},\quad 24,$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline a&c&c\\\hline b\\\cline{1-1}\end{array},\quad 24,\qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline a&a&b\\\hline c\\\cline{1-1}\end{array},\quad 18.$$

现在按照前面对重权状态的定义，计算它们关于张量基 Θ_{abcd} 的具体展开式.

$$\begin{aligned}|(1,0)_1\rangle &= \sqrt{1/3}F_1|3,\bar{1}\rangle = \sqrt{1/3}F_1\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\\&= \sqrt{1/3}\left\{2\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} + \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&1&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right\}\\&= \sqrt{3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} - \sqrt{1/3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\\&= 4\sqrt{3}\{6^{-1}(3\Theta_{1132} + 3\Theta_{1231} + 3\Theta_{2131}\\&\quad - \Theta_{1213} - \Theta_{1312} - \Theta_{2113} - \Theta_{2311}\\&\quad - \Theta_{3112} - \Theta_{3211} - \Theta_{1123} - \Theta_{1321} - \Theta_{3121})\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|(1,0)_2\rangle &= (\sqrt{3}/2)\{F_2|0,2\rangle - \sqrt{2/3}|(1,0)_1\rangle\}\\&= \sqrt{3/2}F_2\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array} - \sqrt{3/2}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} + \sqrt{1/6}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\end{aligned}$$

$$=\sqrt{8/3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$$

$$=4\sqrt{3}\{18^{-1/2}(2\Theta_{1123}+2\Theta_{1321}+2\Theta_{3121}-\Theta_{1213}$$

$$-\Theta_{1312}-\Theta_{2113}-\Theta_{2311}-\Theta_{3112}-\Theta_{3211})\},$$

$$|(\bar{1},1)_1\rangle=2^{-1}F_1|(1,0)_1\rangle=\sqrt{1/12}F_1^2|3,\bar{1}\rangle=\sqrt{1/2}F_1^2\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$$

$$=\sqrt{1/12}\left\{2\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}+4\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right\}$$

$$=\sqrt{1/3}\left\{3\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}-2\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right\}$$

$$=4\sqrt{3}\{6^{-1}(3\Theta_{1232}+3\Theta_{2132}+3\Theta_{2231}$$

$$-\Theta_{2213}-\Theta_{2312}-\Theta_{3212}-\Theta_{1223}$$

$$-\Theta_{1322}-\Theta_{3221}-\Theta_{3122}-\Theta_{2321}-\Theta_{2123})\},$$

$$|(\bar{1},1)_2\rangle=F_1|(1,0)_2\rangle=\sqrt{8/3}F_1\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}=\sqrt{8/3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$$

$$=4\sqrt{3}\{18^{-1/2}(\Theta_{1223}+\Theta_{1322}+\Theta_{2321}+\Theta_{2123}$$

$$+\Theta_{3221}+\Theta_{3122}-2\Theta_{2213}-2\Theta_{2312}-2\Theta_{3212})\},$$

$$|(0,\bar{1})_1\rangle=2^{-1/2}F_1|2,\bar{2}\rangle=2^{-1/2}F_1\left\{\sqrt{2}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right\}$$

$$=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}+\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&1&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$$

$$=2\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}-\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$$

$$=4\sqrt{3}\{12^{-1/2}(\Theta_{1233}+\Theta_{1332}+\Theta_{2133}+\Theta_{2331}+\Theta_{3231}+\Theta_{3132}$$

$$-\Theta_{2313}-\Theta_{3213}-\Theta_{3312}-\Theta_{1323}-\Theta_{3123}-\Theta_{3321})\},$$

$$|(0,\bar{1})_2\rangle=\sqrt{1/3}\{F_2|(\bar{1},1)_2\rangle-\sqrt{2/3}|(0,\bar{1})_1\rangle\}$$

$$=\sqrt{8/9}F_2\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}-\sqrt{8/9}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}+\sqrt{2/9}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$$

$$=\sqrt{2}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$$

$$=4\sqrt{3}\{6^{-1/2}(\Theta_{1323}+\Theta_{3123}+\Theta_{3321}-\Theta_{2313}-\Theta_{3213}-\Theta_{3312})\},$$

降算符不为零的矩阵元如下：

$F_1|2,1\rangle=\sqrt{2}|0,2\rangle$,

$F_2|2,1\rangle=|3,\bar{1}\rangle$,

$F_2|0,2\rangle=\sqrt{2/3}|(1,0)_1\rangle+\sqrt{4/3}|(1,0)_2\rangle$,

$F_1|0,2\rangle=\sqrt{2}|\bar{2},3\rangle$,

$F_1|3,\bar{1}\rangle=\sqrt{3}|(1,0)_1\rangle$,

$F_1|(1,0)_2\rangle=|(\bar{1},1)_2\rangle$,

$F_2|\bar{2},3\rangle=\sqrt{1/3}|(\bar{1},1)_1\rangle+\sqrt{8/3}|(\bar{1},1)_2\rangle$,

$F_2|(1,0)_2\rangle=\sqrt{4/3}|2,\bar{2}\rangle$,

$F_1|(1,0)_1\rangle=2|(\bar{1},1)_1\rangle$,

$F_2|(1,0)_1\rangle=\sqrt{2/3}|2,\bar{2}\rangle$,

$F_2|(\bar{1},1)_2\rangle=\sqrt{2/3}|(0,\bar{1})_1\rangle+\sqrt{3}|(0,\bar{1})_2\rangle$,

$F_1|2,\bar{2}\rangle=\sqrt{2}|(0,\bar{1})_1\rangle$,

$F_2|(\bar{1},1)_1\rangle=\sqrt{4/3}|(0,\bar{1})_1\rangle$,

$F_1|(\bar{1},1)_1\rangle=\sqrt{3}|\bar{3},2\rangle$,

$F_2|(0,\bar{1})_2\rangle=\sqrt{2}|1,\bar{3}\rangle$,

$F_2|(0,\bar{1})_1\rangle=|1,\bar{3}\rangle$,

$F_1|(0,\bar{1})_1\rangle=\sqrt{2}|\bar{2},0\rangle$,

$F_2|\bar{3},2\rangle=\sqrt{2}|\bar{2},0\rangle$,

$F_1|1,\bar{3}\rangle=|\bar{1},\bar{2}\rangle$,

$F_2|\bar{2},0\rangle=\sqrt{2}|\bar{1},\bar{2}\rangle$.

12. 对 SU(3)群的不可约表示[2,1]，把用正则张量杨表表出的正交基与盖尔范德基联系起来，用公式(7.18)计算 E_2 对下面两个基的作用：

$$(1)\left|\begin{matrix}2&1&0\\&1\ 0&\\&1&\end{matrix}\right\rangle,\qquad(2)\left|\begin{matrix}2&1&0\\&1\ 1&\\&1&\end{matrix}\right\rangle.$$

解　SU(3)群的[2,1]表示是八维表示，正交归一基的正则张量杨表已在第 9 题中计算过，它们和盖尔范德基有一一对应的关系：

$$|1,1\rangle = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} = \left|\begin{array}{ccccc} 2 & & 1 & & 0 \\ & 2 & & 1 & \\ & & 2 & & \end{array}\right\rangle,$$

$$|\bar{1},2\rangle = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} = \left|\begin{array}{ccccc} 2 & & 1 & & 0 \\ & 2 & & 1 & \\ & & 1 & & \end{array}\right\rangle,$$

$$|2,\bar{1}\rangle = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} = \left|\begin{array}{ccccc} 2 & & 1 & & 0 \\ & 2 & & 0 & \\ & & 2 & & \end{array}\right\rangle,$$

$$|(0,0)_1\rangle = \sqrt{2}\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} - \sqrt{1/2}\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} = \left|\begin{array}{ccccc} 2 & & 1 & & 0 \\ & 2 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}\right\rangle,$$

$$|(0,0)_2\rangle = \sqrt{3/2}\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} = \left|\begin{array}{ccccc} 2 & & 1 & & 0 \\ & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & \end{array}\right\rangle,$$

$$|\bar{2},1\rangle = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} = \left|\begin{array}{ccccc} 2 & & 1 & & 0 \\ & 2 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array}\right\rangle,$$

$$|1,\bar{2}\rangle = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} = \left|\begin{array}{ccccc} 2 & & 1 & & 0 \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}\right\rangle,$$

$$|\bar{1},\bar{1}\rangle = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} = \left|\begin{array}{ccccc} 2 & & 1 & & 0 \\ & 1 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array}\right\rangle.$$

计算 E_2 对态 $|1,\bar{2}\rangle$ 的作用：

$$E_2\left|\begin{array}{ccccc} 2 & & 1 & & 0 \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}\right\rangle = A_{12}\left|\begin{array}{ccccc} 2 & & 1 & & 0 \\ & 2 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}\right\rangle + A_{22}\left|\begin{array}{ccccc} 2 & & 1 & & 0 \\ & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & \end{array}\right\rangle,$$

$$A_{12} = \left\{\frac{-(-1)(1)(-1)(-3)}{(-2)(-3)}\right\}^{1/2} = \sqrt{1/2},$$

$$A_{22} = \left\{\frac{-(1)(3)(1)(-1)}{(2)(1)}\right\}^{1/2} = \sqrt{3/2}.$$

再计算 E_2 对态 $|(0,0)_2\rangle$ 的作用：

$$E_2\left|\begin{array}{ccccc}2 & & 1 & & 0\\ & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & \end{array}\right\rangle = B_{12}\left|\begin{array}{ccccc}2 & & 1 & & 0\\ & 2 & & 1 & \\ & & 1 & & \end{array}\right\rangle,$$

$$B_{12} = \left\{\frac{-(-1)(1)(-1)(-3)}{(-1)(-2)}\right\}^{1/2} = \sqrt{3/2}.$$

13. 对 SU(3)群的不可约表示[3,1]，用降算符 F_1 和 F_2 作用在正则张量杨表上的方法，把每一个正交归一基都用正则张量杨表的线性组合表出，并计算降(或升)算符的表示矩阵. 同时，请把正交归一基与盖尔范德基联系起来，用公式(7.18)举例计算降(或升)算符的有关矩阵元.

解 这道题看起来与第 11 题有些重复，但第 11 题是用方块权图的方法计算，本题用正则张量杨表或盖尔范德基方法计算. 通过这两道题的计算，说明这三种方法是等价的，但是方块权图的方法更简单一些，且适用于任何非阿贝尔单纯李群，正则张量杨表方法可与张量基联系起来，基的物理意义更清楚，盖尔范德基方法完全是公式计算，更现成一些.

在用正则张量杨表方法计算生成元的矩阵元和正则张量杨表的归一化系数时，可用各种不同的计算途径和技巧，希望读者能体会这些技巧的实质，举一反三地去理解. 正则张量杨表一般既不正交，也不归一. 在第 11 题中把正则张量杨表展开成张量基 Θ_{abcd} 的组合，这是计算正则张量杨表的归一化系数的好方法. 如果取正则张量杨表 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1\\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$ 的系数为 1，则对其他正则张量杨表可能需乘一归一化系数，例如 $\sqrt{3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2\\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$，$\sqrt{8/3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2\\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$ 等.

为了便于比较，对重权的态，我们一律采用盖尔范德基方法的规定，即按 $\mathscr{A}_1$ 子代数的多重态来定义状态基，如还有简并，再按 $\mathscr{A}_2$ 子代数的多重态来定义状态基，依此类推. 这样，在计算中应尽量先用 F_1 的作用来计算，因为有关的 F_1 矩阵元是已知的，由此可确定有关态的归一化系数和位相，还不能确定部分可用 E_2 和 F_2 的作用来确定. 具体方法见下面计算，计算中花括号里的组合代表正交归一基.

最高权态所对应的正则张量杨表是杨图每行填以行数所得的杨表. F_1 的作用是把填数 1 改填为 2. 由于同一列的填数不能相同，已有填数 2 的列中，填数 1 不能再改填 2. 有多少个填数 1 可改成填数 2，就决定了它们构成 $\mathscr{A}_1$ 子代数的多

重态. 类似地, F_2的作用是把填数 2 改填为 3, 对应的多重态属于 $\mathscr{A}_2$ 子代数. 填数集合相同而填法不同的正则张量杨表对应重权. 最高权态所对应的盖尔范德基中每一个填数都与它右下角的填数相同, $\mu_{ab}=\mu_{a(b-1)}$. 在满足 $\mu_{ab}\geqslant\mu_{a(b-1)}\geqslant\mu_{(a+1)b}$的条件下, 若从下面数第 a 行的填数可升或降, 则表明存在 $\mathscr{A}_a$ 子代数的多重态, 在 F_a的作用下, 这第 a 行有一个填数降 1. 如有几种降法则表明出现重权.

在最高权态的正则张量杨表中,

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}=\left|\begin{array}{c}3\;1\;0\\3\;1\\3\end{array}\right\rangle$$

有两个填数 1 可改填为 2, 一个填数 2 可改填为 3, 因此得 $\mathscr{A}_1$子代数的三重态和 $\mathscr{A}_2$子代数的二重态.

$$F_1\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}=\sqrt{2}\left\{\sqrt{2}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right\}=\sqrt{2}\left|\begin{array}{c}3\;1\;0\\3\;1\\2\end{array}\right\rangle,$$

$$F_1\left\{\sqrt{2}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right\}=\sqrt{2}\left\{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right\}=\sqrt{2}\left|\begin{array}{c}3\;1\;0\\3\;1\\1\end{array}\right\rangle,$$

$$F_2\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}=\left|\begin{array}{c}3\;1\;0\\3\;0\\3\end{array}\right\rangle,$$

对最后一个态有三个填数 1 可改填 2, 因此有 $\mathscr{A}_1$子代数的四重态.

$$\begin{aligned}F_1\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}&=2\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}+\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&1&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\\&=\sqrt{3}\left\{\sqrt{3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}-\sqrt{1/3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right\}=\sqrt{3}\left|\begin{array}{c}3\;1\;0\\3\;0\\2\end{array}\right\rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&F_1\left\{\sqrt{3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}-\sqrt{1/3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right\}\\&=\sqrt{3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}+\sqrt{3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}-\sqrt{1/3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\\&=2\left\{\sqrt{3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}-\sqrt{4/3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right\}=2\left|\begin{array}{c}3\;1\;0\\3\;0\\1\end{array}\right\rangle,\end{aligned}$$

$$F_1\left\{\sqrt{3}\begin{array}{l}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}\\ \boxed{3}\end{array}-\sqrt{4/3}\begin{array}{l}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\\ \boxed{2}\end{array}\right\}$$

$$=\sqrt{3}\left\{\begin{array}{l}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}\\ \boxed{3}\end{array}\right\}=\sqrt{3}\left|\begin{matrix}3\ 1\ 0\\ 3\ 0\\ 0\end{matrix}\right\rangle.$$

中间两个态的权是二重权，与它们正交的态构成$\mathscr{A}_1$子代数的二重态. 二重态中前一个态用E_1作用得零，后一个态用F_1作用得零，因此得

$$\sqrt{8/3}\begin{array}{l}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{3}\\ \boxed{2}\end{array}=\left|\begin{matrix}3\ 1\ 0\\ 2\ 1\\ 2\end{matrix}\right\rangle,$$

$$F_1\left\{\sqrt{8/3}\begin{array}{l}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{3}\\ \boxed{2}\end{array}\right\}=\sqrt{8/3}\begin{array}{l}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\\ \boxed{2}\end{array}=\left|\begin{matrix}3\ 1\ 0\\ 2\ 1\\ 1\end{matrix}\right\rangle.$$

有两种方法计算规一化因子$\sqrt{8/3}$. 一种是把正则张量杨表按张量基Θ_{abcd}展开的方法，前面已介绍. 另一种是通过$\mathscr{A}_2$多重态来确定. 把F_2作用在态$\begin{array}{l}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}\\ \boxed{2}\end{array}$上，直接计算$\mathscr{A}_2$子代数的三重态，其中状态一般表为所定义的状态基的线性组合，系数平方和等于F_2矩阵元的平方，即为 2.

$$F_2\left\{\sqrt{2}\begin{array}{l}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}\\ \boxed{2}\end{array}\right\}=F_2\left|\begin{matrix}3\ 1\ 0\\ 3\ 1\\ 2\end{matrix}\right\rangle$$

$$=\sqrt{2}\begin{array}{l}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{3}\\ \boxed{2}\end{array}+\sqrt{2}\begin{array}{l}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}\\ \boxed{3}\end{array}$$

$$=\sqrt{2/3}\left\{\sqrt{3}\begin{array}{l}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}\\ \boxed{3}\end{array}-\sqrt{1/3}\begin{array}{l}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{3}\\ \boxed{2}\end{array}\right\}$$

$$+\sqrt{4/3}\left\{\sqrt{8/3}\begin{array}{l}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{3}\\ \boxed{2}\end{array}\right\}$$

$$=\sqrt{2/3}\left|\begin{matrix}3\ 1\ 0\\ 3\ 0\\ 2\end{matrix}\right\rangle+\sqrt{4/3}\left|\begin{matrix}3\ 1\ 0\\ 2\ 1\\ 2\end{matrix}\right\rangle.$$

$$F_2^2\left\{\sqrt{2}\begin{array}{l}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}\\ \boxed{2}\end{array}\right\}=F_2^2\left|\begin{matrix}3\ 1\ 0\\ 3\ 1\\ 2\end{matrix}\right\rangle$$

$$= 2\left\{\sqrt{2}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right\} = 2\left|\begin{array}{c}3\;1\;0\\2\;0\\2\end{array}\right\rangle .$$

由此得

$$F_2\left\{\sqrt{3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} - \sqrt{1/3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right\} = F_2\left|\begin{array}{c}3\;1\;0\\3\;0\\2\end{array}\right\rangle$$

$$= \sqrt{2/3}\left\{\sqrt{2}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right\} = \sqrt{2/3}\left|\begin{array}{c}3\;1\;0\\2\;0\\2\end{array}\right\rangle ,$$

$$F_2\left\{\sqrt{8/3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right\} = F_2\left|\begin{array}{c}3\;1\;0\\2\;1\\2\end{array}\right\rangle$$

$$= \sqrt{4/3}\left\{\sqrt{2}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right\} = \sqrt{4/3}\left|\begin{array}{c}3\;1\;0\\2\;0\\2\end{array}\right\rangle .$$

再用 F_1作用，得 $\mathscr{A}_1$子代数的三重态：

$$F_1\left\{\sqrt{2}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right\} = F_1\left|\begin{array}{c}3\;1\;0\\2\;0\\2\end{array}\right\rangle$$

$$= \sqrt{2}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} + \sqrt{2}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&1&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$$

$$= \sqrt{2}\left\{2\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} - \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right\} = \sqrt{2}\left|\begin{array}{c}3\;1\;0\\2\;0\\1\end{array}\right\rangle ,$$

$$F_1\left\{2\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array} - \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right\} = F_1\left|\begin{array}{c}3\;1\;0\\2\;0\\1\end{array}\right\rangle$$

$$= \sqrt{2}\left\{\sqrt{2}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right\} = \sqrt{2}\left|\begin{array}{c}3\;1\;0\\2\;0\\0\end{array}\right\rangle ,$$

中间的态又对应重权，与之正交的态属 $\mathscr{A}_1$子代数的单态：

$$\sqrt{2}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array} = \left|\begin{array}{c}3\;1\;0\\1\;1\\1\end{array}\right\rangle .$$

现在把 F_2 作用在 $\mathscr{A}_2$ 子代数四重态的最高权 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&2\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{2}\\\cline{1-1}\end{array}$ 上，计算 F_2 的矩阵元.

$$F_2\left\{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&2\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{2}\\\cline{1-1}\end{array}\right\}=F_2\left|\begin{array}{ccccc}3&&1&&0\\&3&&1&\\&&1&&\end{array}\right\rangle=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&2\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{3}\\\cline{1-1}\end{array}+2\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{2}\\\cline{1-1}\end{array}$$

$$=\sqrt{1/3}\left\{\sqrt{3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&2\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{3}\\\cline{1-1}\end{array}-\sqrt{4/3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{2}\\\cline{1-1}\end{array}\right\}$$

$$+\sqrt{8/3}\left\{\sqrt{8/3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{2}\\\cline{1-1}\end{array}\right\}$$

$$=\sqrt{1/3}\left|\begin{array}{ccccc}3&&1&&0\\&3&&0&\\&&1&&\end{array}\right\rangle+\sqrt{8/3}\left|\begin{array}{ccccc}3&&1&&0\\&2&&1&\\&&1&&\end{array}\right\rangle,$$

$$F_2\left\{\sqrt{3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&2\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{3}\\\cline{1-1}\end{array}-\sqrt{4/3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{2}\\\cline{1-1}\end{array}\right\}=F_2\left|\begin{array}{ccccc}3&&1&&0\\&3&&0&\\&&1&&\end{array}\right\rangle$$

$$=\sqrt{12}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{3}\\\cline{1-1}\end{array}-\sqrt{4/3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{2}\\\cline{1-1}\end{array}-\sqrt{4/3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{3}\\\cline{1-1}\end{array}$$

$$=\sqrt{4/3}\left\{2\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{3}\\\cline{1-1}\end{array}-\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{2}\\\cline{1-1}\end{array}\right\}=\sqrt{4/3}\left|\begin{array}{ccccc}3&&1&&0\\&2&&0&\\&&1&&\end{array}\right\rangle,$$

$$F_2\left\{\sqrt{8/3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{2}\\\cline{1-1}\end{array}\right\}=F_2\left|\begin{array}{ccccc}3&&1&&0\\&2&&1&\\&&1&&\end{array}\right\rangle$$

$$=\sqrt{8/3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{3}\\\cline{1-1}\end{array}+\sqrt{8/3}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{2}\\\cline{1-1}\end{array}$$

$$=\sqrt{2/3}\left\{2\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{3}\\\cline{1-1}\end{array}-\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{2}\\\cline{1-1}\end{array}\right\}+\sqrt{3}\left\{\sqrt{2}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{2}\\\cline{1-1}\end{array}\right\}$$

$$=\sqrt{2/3}\left|\begin{array}{ccccc}3&&1&&0\\&2&&0&\\&&1&&\end{array}\right\rangle+\sqrt{3}\left|\begin{array}{ccccc}3&&1&&0\\&1&&1&\\&&1&&\end{array}\right\rangle,$$

$$F_2\left\{2\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{3}\\\cline{1-1}\end{array}-\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{2}\\\cline{1-1}\end{array}\right\}=F_2\left|\begin{array}{ccccc}3&&1&&0\\&2&&0&\\&&1&&\end{array}\right\rangle$$

$$=\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{3}\\\cline{1-1}\end{array}=\left|\begin{array}{ccccc}3&&1&&0\\&1&&0&\\&&1&&\end{array}\right\rangle,$$

$$F_2\left\{\sqrt{2}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\ \hline 2\\ \cline{1-1}\end{array}\right\} = F_2\left|\begin{matrix}3\;1\;0\\1\;1\\1\end{matrix}\right\rangle$$

$$=\sqrt{2}\left\{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\ \hline 3\\ \cline{1-1}\end{array}\right\} = \sqrt{2}\left|\begin{matrix}3\;1\;0\\1\;0\\1\end{matrix}\right\rangle .$$

再把 F_2作用在 $\mathscr{A}_2$子代数三重态的最高权$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&2\\ \hline 3\\ \cline{1-1}\end{array}$上，得

$$F_2\left\{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&2\\ \hline 3\\ \cline{1-1}\end{array}\right\} = F_2\left|\begin{matrix}3\;1\;0\\3\;0\\0\end{matrix}\right\rangle$$

$$=\sqrt{2}\left\{\sqrt{2}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&3\\ \hline 3\\ \cline{1-1}\end{array}\right\} = \sqrt{2}\left|\begin{matrix}3\;1\;0\\2\;0\\0\end{matrix}\right\rangle ,$$

$$F_2\left\{\sqrt{2}\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&3\\ \hline 3\\ \cline{1-1}\end{array}\right\} = F_2\left|\begin{matrix}3\;1\;0\\2\;0\\0\end{matrix}\right\rangle$$

$$=\sqrt{2}\left\{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&3&3\\ \hline 3\\ \cline{1-1}\end{array}\right\} = \sqrt{2}\left|\begin{matrix}3\;1\;0\\1\;0\\0\end{matrix}\right\rangle .$$

最后，

$$E_1\left\{\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&3&3\\ \hline 3\\ \cline{1-1}\end{array}\right\} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\ \hline 3\\ \cline{1-1}\end{array} = \left|\begin{matrix}3\;1\;0\\1\;0\\1\end{matrix}\right\rangle .$$

为方便起见，我们列出在表示[3,1]中正交归一基和盖尔范德基的关系.

$$|2,1\rangle = \left|\begin{matrix}3\;1\;0\\3\;1\\3\end{matrix}\right\rangle ,\qquad |0,2\rangle = \left|\begin{matrix}3\;1\;0\\3\;1\\2\end{matrix}\right\rangle ,\qquad |\bar{2},3\rangle = \left|\begin{matrix}3\;1\;0\\3\;1\\1\end{matrix}\right\rangle ,$$

$$|3,\bar{1}\rangle = \left|\begin{matrix}3\;1\;0\\3\;0\\3\end{matrix}\right\rangle ,\qquad |(1,0)_1\rangle = \left|\begin{matrix}3\;1\;0\\3\;0\\2\end{matrix}\right\rangle ,\qquad |(1,0)_2\rangle = \left|\begin{matrix}3\;1\;0\\2\;1\\2\end{matrix}\right\rangle ,$$

$$|(\bar{1},1)_1\rangle = \left|\begin{matrix}3\;1\;0\\3\;0\\1\end{matrix}\right\rangle ,\qquad |(\bar{1},1)_2\rangle = \left|\begin{matrix}3\;1\;0\\2\;1\\1\end{matrix}\right\rangle ,\qquad |\bar{3},2\rangle = \left|\begin{matrix}3\;1\;0\\3\;0\\0\end{matrix}\right\rangle ,$$

$$|2,\bar{2}\rangle=\left|\begin{matrix}3&&1&&0\\&2&&0&\\&&2&&\end{matrix}\right\rangle,\quad |(0,\bar{1})_1\rangle=\left|\begin{matrix}3&&1&&0\\&2&&0&\\&&1&&\end{matrix}\right\rangle,\quad |(0,\bar{1})_2\rangle=\left|\begin{matrix}3&&1&&0\\&1&&1&\\&&1&&\end{matrix}\right\rangle,$$

$$|\bar{2},0\rangle=\left|\begin{matrix}3&&1&&0\\&2&&0&\\&&0&&\end{matrix}\right\rangle,\quad |1,\bar{3}\rangle=\left|\begin{matrix}3&&1&&0\\&1&&0&\\&&1&&\end{matrix}\right\rangle,\quad |\bar{1},\bar{2}\rangle=\left|\begin{matrix}3&&1&&0\\&1&&0&\\&&0&&\end{matrix}\right\rangle,$$

在盖尔范德基中生成元的表示矩阵元可用公式(7.18)计算. F_1的生成元是显然的，这里举例计算几个F_2的矩阵元.

$$F_2\left|\begin{matrix}3&&1&&0\\&3&&1&\\&&2&&\end{matrix}\right\rangle=a\left|\begin{matrix}3&&1&&0\\&3&&0&\\&&2&&\end{matrix}\right\rangle-b\left|\begin{matrix}3&&1&&0\\&2&&1&\\&&2&&\end{matrix}\right\rangle,$$

$$F_2\left|\begin{matrix}3&&1&&0\\&3&&1&\\&&1&&\end{matrix}\right\rangle=c\left|\begin{matrix}3&&1&&0\\&3&&0&\\&&1&&\end{matrix}\right\rangle+d\left|\begin{matrix}3&&1&&0\\&2&&1&\\&&1&&\end{matrix}\right\rangle,$$

$$a=\left\{\frac{-(2-0-1+2-1)(3-0-1+2)(1-0-2+2)(0-0-3-2)}{(3-0-1+2)(3-0-1+2-1)}\right\}^{1/2}$$

$$=\sqrt{2/3},$$

$$b=\left\{\frac{-(2-2-1+1-1)(3-2-1+1)(1-2-2+1)(0-2-3+1)}{(1-2-2+1)(1-2-2+1-1)}\right\}^{1/2}$$

$$=\sqrt{4/3},$$

$$c=\left\{\frac{-(1-0-1+2-1)(3-0-1+2)(1-0-2+2)(0-0-3-2)}{(3-0-1+2)(3-0-1+2-1)}\right\}^{1/2}$$

$$=\sqrt{1/3},$$

$$d=\left\{\frac{-(1-2-1+1-1)(3-2-1+1)(1-2-2+1)(0-2-3+1)}{(1-2-2+1)(1-2-2+1-1)}\right\}^{1/2}$$

$$=\sqrt{8/3}.$$

计算结果与第 11 题和本题前面计算当然是一致的.

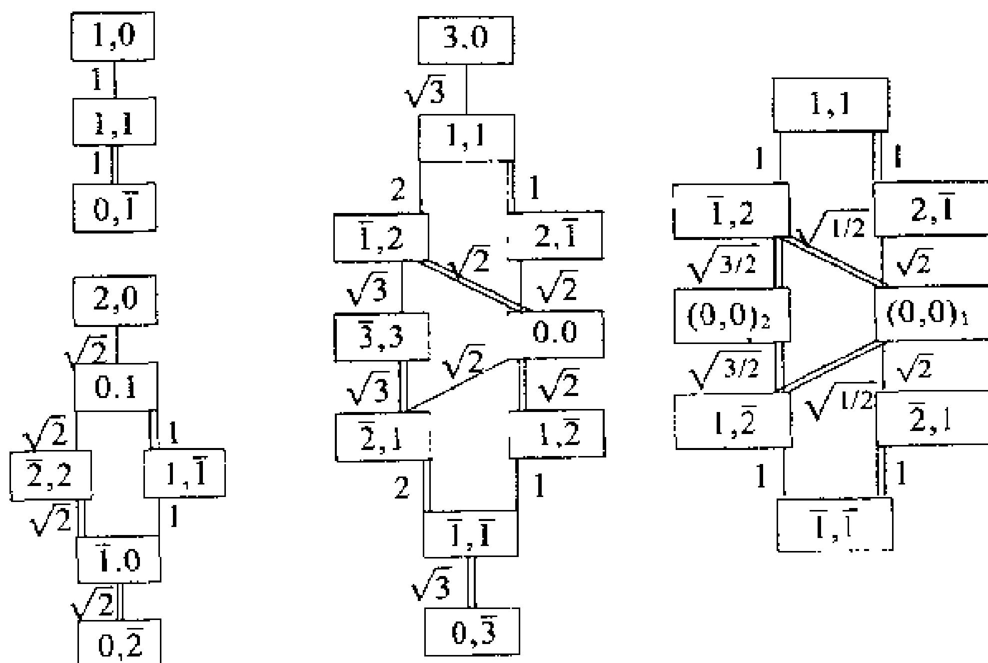
14. 计算 SU(3)群直乘表示[2]⊗[1]的克莱布施-戈登级数和克莱布施-戈登系数.

解 通常对 SU(N)群，不可约表示的直乘分解是用立特武德-理查森规则来计算的，例如本题要计算的 SU(3)群两表示直乘的约化问题：

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 0&0\\\hline\end{array}\otimes\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline\end{array}\simeq\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&1\\\hline\end{array}\oplus\begin{array}{|c|c|}\hline 0&0\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array},$$

$$6\times 3 = 10 + 8.$$

现在采用方块权图的方法来计算克莱布施-戈登级数和克莱布施-戈登系数. 为此, 先画出参加乘积的表示[2]和[1]的方块权图.



设组合前的状态基用$|\mu,\nu\rangle$标记, 组合后的状态基用$|[\lambda],\rho\rangle$标记, 其中$[\lambda]$是克莱布施-戈登级数中可能出现的表示, μ, ν 和ρ 分别是表示[2], [1]和$[\lambda]$中状态的权. 先计算乘积空间的最高权, $(2,0)+(1,0)=(3,0)$, 它一定是单权, 而且是克莱布施-戈登级数中一个表示的最高权:

$$|[3],(3,0)\rangle = |(2,0),(1,0)\rangle.$$

尽可能画出表示[3]的方块权图和生成元的表示矩阵元, 在出现重权时矩阵元可以暂时空缺. 当然在表示[3]中不存在重权. 降算符对组合前后状态的作用由下式计算:

$$F_a\,|[\lambda],\rho\rangle = \sum_{\tau} D^{[\lambda]}_{\tau\rho}(F_a)\,|[\lambda],\tau\rangle,$$

$$F_a\,|\mu,\nu\rangle = \sum_{\nu'} D^{[1]}_{\nu'\nu}(F_a)\,|\mu,\nu'\rangle + \sum_{\mu'} D^{[2]}_{\mu'\mu}(F_a)\,|\mu',\nu\rangle.$$

现在用降算符对最高权作用.

$$|[3],(1,1)\rangle=\sqrt{1/3}F_1|[3],(3,0)\rangle=\sqrt{1/3}F_1|(2,0),(1,0)\rangle$$

$$=\sqrt{1/3}|(2,0),(\bar{1},1)\rangle+\sqrt{2/3}|(0,1),(1,0)\rangle.$$

在计算中出现没有负分量的权(称为主权)时，要比较乘积空间此权的重数和已经计算得的具有此权的状态数，如果还有多余，则说明在克莱布施-戈登级数中有以此权为最高权的表示出现．在表示[3]中权(1,1)是单权，但在乘积空间中权(1,1)是二重权．这说明，在克莱布施-戈登级数中存在表示[2,1]，它的最高权态与上式正交：

$$|[2,1],(1,1)\rangle=\sqrt{1/3}\{\sqrt{2}|(2,0),(\bar{1},1)\rangle-|(0,1),(1,0)\rangle\}.$$

此式也可用升权算符作用为零的条件来计算．有了最高权态的展开式，其他状态的展开式就很容易计算．计算中要利用方块权图中已知的生成元表示矩阵的数值．计算的每一个结果，要检验等式两边权是否相等，即 $\rho=\mu+\nu$，要检验计算得的状态是否正交归一．有了错误及时纠正，以免浪费时间．

下面先算表示[3]的状态展开式．

$$|[3],(\bar{1},2)\rangle=(1/2)F_1|[3],(1,1)\rangle$$

$$=\sqrt{1/6}|(0,1),(\bar{1},1)\rangle+\sqrt{1/6}\{|(0,1),(\bar{1},1)\rangle+\sqrt{2}|(\bar{2},2),(1,0)\rangle\}$$

$$=\sqrt{1/3}\{\sqrt{2}|(0,1),(\bar{1},1)\rangle+|(\bar{2},2),(1,0)\rangle\},$$

$$|[3],(\bar{3},3)\rangle=\sqrt{1/3}F_1|[3],(\bar{1},2)\rangle$$

$$=(1/3)\{2|(\bar{2},2),(\bar{1},1)\rangle+|(\bar{2},2),(\bar{1},1)\rangle\}=|(\bar{2},2),(\bar{1},1)\rangle,$$

$$|[3],(2,\bar{1})\rangle=F_2|[3],(1,1)\rangle=\sqrt{1/3}|(2,0),(0,\bar{1})\rangle+\sqrt{2/3}|(1,\bar{1}),(1,0)\rangle,$$

$$|[3],(0,0)\rangle=\sqrt{1/2}F_1|[3],(2,\bar{1})\rangle$$

$$=\sqrt{1/3}\{|(0,1),(0,\bar{1})\rangle+|(1,\bar{1}),(\bar{1},1)\rangle+|(\bar{1},0),(1,0)\rangle\},$$

(0,0)权也是一个主权，在表示[3]中是单权，在乘积空间是三重权．我们还需计算在表示[2,1]中此权的重数，才能确定在克莱布施-戈登级数中是否存在表示[0]．事实上，在表示[2,1]中权(0,0)是二重权，这说明在克莱布施-戈登级数中不存在表示[0]．

$$|[3],(2,1)\rangle=\sqrt{1/2}F_1|[3],(0,0)\rangle$$

$$=\sqrt{1/6}\{\sqrt{2}|(\bar{2},2),(0,\bar{1})\rangle+|(\bar{1},0),(\bar{1},1)\rangle+|(\bar{1},0),(\bar{1},1)\rangle\}$$

$$= \sqrt{1/3}\{|(\bar{2},2),(0,\bar{1})\rangle + \sqrt{2}\,|(\bar{1},0),(\bar{1},1)\rangle\},$$

$$|[3],(1,\bar{2})\rangle = \sqrt{1/2}F_2\,|[3],(0,0)\rangle$$

$$= \sqrt{1/6}\{|(1,\bar{1}),(0,\bar{1})\rangle + |(1,1),(0,\bar{1})\rangle + \sqrt{2}\,|(0,\bar{2}),(1,0)\rangle\}$$

$$= \sqrt{1/3}\{\sqrt{2}\,|(1,\bar{1}),(0,1)\rangle + |(0,2),(1,0)\rangle\},$$

$$|[3],(\bar{1},\bar{1})\rangle = F_1\,|[3],(1,\bar{2})\rangle$$

$$= \sqrt{1/3}\{\sqrt{2}\,|(\bar{1},0),(0,1)\rangle + |(0,\bar{2}),(\bar{1},1)\rangle\},$$

$$|[3],(0,\bar{3})\rangle = \sqrt{1/3}F_2\,|[3],(\bar{1},\bar{1})\rangle$$

$$= (1/3)\{2\,|(0,\bar{2}),(0,\bar{1})\rangle + |(0,\bar{2}),(0,\bar{1})\rangle\} = |(0,\bar{2}),(0,\bar{1})\rangle.$$

再算表示[2,1]中状态基的展开式.

$$|[2,1],(\bar{1},2)\rangle = F_1\,|[2,1],(1,1)\rangle$$

$$= \sqrt{1/3}\{2\,|(0,1),(\bar{1},1)\rangle - |(0,1),(\bar{1},1)\rangle - \sqrt{2}\,|(\bar{2},2),(1,0)\rangle\}$$

$$= \sqrt{1/3}\{|(0,1),(\bar{1},1)\rangle - \sqrt{2}\,|(\bar{2},2),(1,0)\rangle\},$$

$$|[2,1],(2,\bar{1})\rangle = F_2\,|[2,1],(1,1)\rangle$$

$$= \sqrt{1/3}\{\sqrt{2}\,|(2,0),(0,1)\rangle - |(1,\bar{1}),(1,0)\rangle\},$$

现在把 F_1作用到态$|[2,1],(2,\bar{1})\rangle$上得到权(0,0)，把 F_2作用到态$|[2,1],(\bar{1},2)\rangle$上也得到权(0,0). 因此在表示[2,1]中权(0,0)可能是二重权. 按惯例设态$|[2,1],(0,0)_1\rangle$属 $\mathscr{A}_1$子代数的三重态，而态$|[2,1],(0,0)_2\rangle$属单态. 先计算态$|[2,1],(0,0)_1\rangle$，

$$|[2,1],(0,0)_1\rangle = \sqrt{1/2}F_1\,|[2,1],(2,\bar{1})\rangle$$

$$= \sqrt{1/6}\{2\,|(0,1),(0,\bar{1})\rangle - |(1,\bar{1}),(\bar{1},1)\rangle - |(\bar{1},0),(1,0)\rangle\}.$$

然后把 F_2作用到态$|[2,1],(\bar{1},2)\rangle$上，得到两个态的迭加：

$$F_2\,|[2,1],(\bar{1},2)\rangle = a\,|[2,1],(0,0)_1\rangle + b\,|[2,1],(0,0)_2\rangle$$

$$= \sqrt{1/3}\{|(0,1),(0,\bar{1})\rangle + |(1,\bar{1}),(\bar{1},1)\rangle - 2\,|(\bar{1},0),(1,0)\rangle\}.$$

根据与态$|[2,1],(0,0)_1\rangle$的内积确定 $a = \sqrt{1/2}$，然后减掉这部分后，再把状态归

一化，就得到态$|[2,1],(0,0)_2\rangle$和相应的矩阵元 b：

$$F_2|[2,1],(\bar{1},2)\rangle - \sqrt{1/2}\,|[2,1],(0,0)_1\rangle$$

$$= \sqrt{3/2}\cdot\sqrt{1/2}\{|(1,\bar{1}),(\bar{1},1)\rangle - |(\bar{1},0),(1,0)\rangle\},$$

即 $b=\sqrt{3/2}$，和

$$|[2,1],(0,0)_2\rangle = \sqrt{1/2}\{|(1,\bar{1}),(\bar{1},1)\rangle - |(\bar{1},0),(1,0)\rangle\}.$$

其余状态就很容易计算了.

$$|[2,1],(\bar{2},1)\rangle = \sqrt{1/2}F_1|[2,1],(0,0)_1\rangle$$

$$= \sqrt{1/12}\{\sqrt{8}\,|(\bar{2},2),(0,\bar{1})\rangle - |(\bar{1},0),(\bar{1},1)\rangle - |(\bar{1},0),(1,1)\rangle\}$$

$$= \sqrt{1/3}\{\sqrt{2}\,|(\bar{2},2),(0,\bar{1})\rangle - |(\bar{1},0),(1,1)\rangle\}$$

$$F_2|[2,1],(0,0)_1\rangle = \sqrt{1/6}\{2\,|(1,\bar{1}),(0,\bar{1})\rangle - |(1,\bar{1}),(0,\bar{1})\rangle$$

$$-\sqrt{2}\,|(0,\bar{2}),(1,0)\rangle\}$$

$$= \sqrt{1/2}\cdot\sqrt{1/3}\{|(1,\bar{1}),(0,\bar{1})\rangle - \sqrt{2}\,|(0,\bar{2}),(1,0)\rangle\},$$

即

$$F_2|[2,1],(0,0)_1\rangle = \sqrt{1/2}\,|[2,1],(1,\bar{2})\rangle,$$

$$|[2,1],(1,\bar{2})\rangle = \sqrt{1/3}\{|(1,\bar{1}),(0,\bar{1})\rangle - \sqrt{2}\,|(0,2),(1,0)\rangle\}.$$

最后，

$$F_2|[2,1],(0,0)_2\rangle = \sqrt{1/2}\{|(1,\bar{1}),(0,\bar{1})\rangle - \sqrt{2}\,|(0,\bar{2}),(1,0)\rangle\}$$

$$= \sqrt{3/2}\,|[2,1],(1,\bar{2})\rangle,$$

$$|[2,1],(\bar{1},\bar{1})\rangle = F_1|[2,1],(1,\bar{2})\rangle$$

$$= \sqrt{1/3}\{|(\bar{1},0),(0,\bar{1})\rangle - \sqrt{2}\,|(0,\bar{2}),(\bar{1},1)\rangle\}.$$

三、SU(3)群的平面权图和强子波函数的组合

★　在微观粒子的强相互作用中有同位旋守恒，对称群是 SU(2)，自身表示的基

就是 u 和 d 夸克，它们的质量差别可能来自电磁修正．把下一个夸克 s 包括进来，统称轻夸克．由于 s 夸克质量明显地比 u 和 d 夸克质量重，它们构成近似的味道 SU(3)对称性．尽管这对称性只是近似的，但在粒子物理发展的历史上起过重要作用，即使今日它还有一定的近似估算的作用．

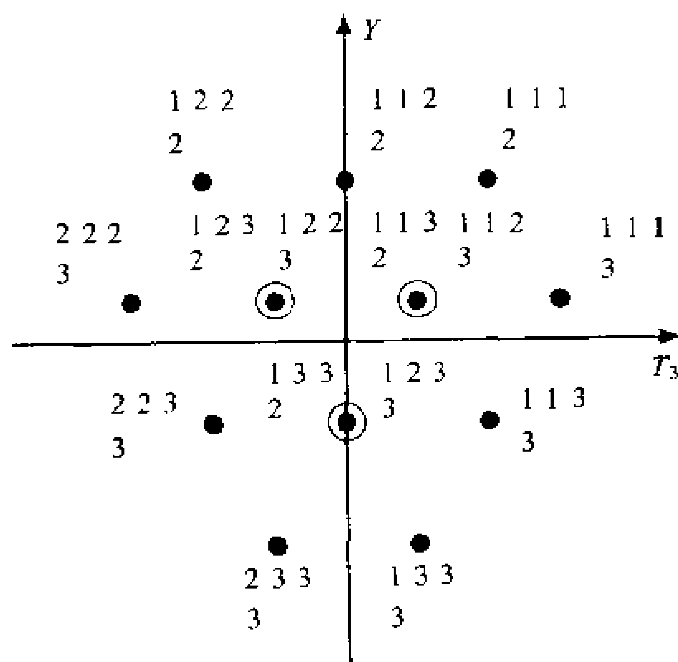
SU(3)群是 8 阶紧致单纯李群，秩为 2，而且两个互相对易的生成元有重要的物理意义．在自身表示中，T_3描写夸克的同位旋第 3 分量，T_8正比于夸克的超荷 Y：

$$T_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \frac{2}{\sqrt{3}}T_8 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \qquad (7.19)$$

正因为 SU(3)群的秩是 2，SU(3)群不可约表示空间的状态可以在以 T_3 和 Y 作坐标轴的平面图形中表达出来，这种图称为平面权图．二秩李群不可约表示的状态都可用平面权图来描写．平面权图的特点是直观，因此在粒子物理理论中得到广泛应用．

15. 画出 SU(3)群的不可约表示[3,1]的平面权图，对每一个权，标上相应的正则张量杨表(不必正交归一)．

解



16. 中子由一个 u 夸克和两个 d 夸克组成，试写出 $S_3=-1/2$ 的中子味道部分和自旋部分波函数的形式.

解　中子由三个夸克组成，三个夸克是全同的费米子，按照费米统计的要求，它们的波函数必须对夸克置换反对称. 假定中子内部夸克轨道角动量为零，总波函数是颜色，味道和自旋三部分波函数的乘积的组合. 中子必须处于色单态，即颜色部分波函数在置换变换中是完全反对称态，因此味道和自旋波函数的乘积必须组合成置换变换的完全对称态. 中子的味道部分属八重态，$T=-T_3=1/2$，$Y=1$，而自旋部分属二重态，$S_3=-1/2$. 两部分对应的杨图都是[2,1]. 取杨算符对应的正则杨表为 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$，则味道部分波函数的标准基有两个态：

$$\begin{array}{|c|c|}\hline u & d \\ \hline d & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}=udd+dud-2ddu,$$

$$(23)\begin{array}{|c|c|}\hline u & d \\ \hline d & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}=udd+ddu-2dud,$$

自旋部分波函数的标准基也有两个态：

$$\begin{array}{|c|c|}\hline + & - \\ \hline - & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}=(+--)+(-+-)-2(--+),$$

$$(23)\begin{array}{|c|c|}\hline + & - \\ \hline - & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}=(+--)+(--+)-2(-+-).$$

在这组标准基中，置换群生成元的表示矩阵为

$$D^{[2,1]}(1\ 2)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix},\quad D^{[2,1]}(1\ 2\ 3)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

它们在直乘表示中本征值为 1 的共同本征矢量为$(2\ 1\ 1\ 2)^{\mathrm{T}}$. 因此中子波函数为

$$\begin{aligned}N_{-1/2}&=\begin{array}{|c|c|}\hline u & d \\ \hline d & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\left\{2\begin{array}{|c|c|}\hline + & - \\ \hline - & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}+\left[(2\ 3)\begin{array}{|c|c|}\hline + & - \\ \hline - & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\right]\right\}\\ &\quad+\left[(2\ 3)\begin{array}{|c|c|}\hline u & d \\ \hline d & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\right]\left\{\begin{array}{|c|c|}\hline + & - \\ \hline - & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}+2\left[(2\ 3)\begin{array}{|c|c|}\hline + & - \\ \hline - & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\right]\right\}\\ &=\{udd+dud-2ddu\}\cdot 3\{(+--)-(--+)\}\\ &\quad+\{udd+ddu-2dud\}\cdot 3\{(+--)-(-+-)\}\end{aligned}$$

$$= 3\{2u_+d_-d_- - d_+u_-d_- - d_+d_-u_- - u_-d_-d_+ - d_-u_-d_+$$
$$+ 2d_-d_-u_+ - u_-d_+d_- - d_-d_+u_- - 2d_-u_+d_-\}.$$

为了归一化，可把前面的常数 3 换成$\sqrt{1/18}$.

四、分导表示

★　常需要讨论 SU(N)群不可约表示按子群不可约表示的约化问题，这类问题属大群不可约表示关于子群的分导表示的约化问题. SU(N)群有三类重要的子群. 一是 $SU(N-1)\subset SU(N)$，二是 $SU(N)\times SU(M)\subset SU(NM)$，三是 $SU(N)\times SU(M)\subset SU(N+M)$.

★　SU(N)群不可约表示$[\omega]$关于子群 SU(N−1)分导表示的约化方法可由正则张量杨表中看出. 对 SU(N−1)群来说，取值为 N 的张量指标保持不变，而在正则张量杨表中填充 N 的格子只能处在每列的最下一格，去掉填 N 的格正好得到子群 SU(N−1)不可约表示的基. 因此从杨图$[\lambda]$中去掉若干个(包括零个)各列最下格，得到杨图$[\mu]$，它们就是在分导表示约化中出现的 SU(N−1)群表示：

$$[\lambda]\simeq\oplus[\mu],\quad d_{[\lambda]}(SU(N)) = \sum_{[\mu]}d_{[\mu]}(SU(N-1)),$$
$$\lambda_N\leqslant\mu_{N-1}\leqslant\lambda_{N-1}\leqslant\mu_{N-2}\leqslant\cdots\leqslant\mu_2\leqslant\lambda_2\leqslant\mu_1\leqslant\lambda_1. \tag{7.20}$$

这方式可以继续进行下去，把 SU(N)群不可约表示$[\lambda]$按群链

$$SU(N)\supset SU(N-1)\supset\cdots SU(3)\supset SU(2)$$

中各子群表示分解.

★　SU(NM)群的每一个张量指标 α 都由两个指标(ai)合成，其中 a 是子群 SU(N)的张量指标，而 i 是子群 SU(M)的张量指标. 当把 SU(NM)群不可约表示$[\omega]$关于子群 $SU(N)\times SU(M)$的分导表示按子群表示$[\lambda]\otimes[\mu]$分解时，三个杨图的格数 n 是一样的，都描写这 n 个指标之间的置换对称性. 这 n 个指标的每一个都分为两部分，把 i 部分固定，a 部分具有以$[\lambda]$标记的置换对称性，把 a 部分固定，i 部分具有以$[\mu]$标记的置换对称性，两部分都变则具有以$[\omega]$标记的置换对称性. 因此置换群表示$[\omega]$必须在置换群表示$[\lambda]$和$[\mu]$的直乘(内积)约化中出现：

$$[\lambda]\times[\mu] = [\omega]\oplus\cdots.$$

现在，它们作为幺正矩阵群的表示，杨图$[\omega]$的行数不能超过 NM，杨图$[\lambda]$的行

数不能超过 N，杨图$[\mu]$的行数不能超过 M.

★　SU($N+M$)群每一个张量指标 a 都有两种可能的取值，或者取子群 SU(N)的张量指标 a，或者取子群 SU(M)的张量指标 i，当把 SU($N+M$)群不可约表示$[\omega]$关于子群 SU(N)×SU(M)的分导表示按子群表示$[\lambda]\otimes[\mu]$分解时，杨图$[\lambda]$的格数和杨图$[\mu]$的格数是不确定的，但它们的格数和等于杨图$[\omega]$的格数.在张量指标的置换中，全部指标分为两部分，第一类指标 a 具有以$[\lambda]$标记的置换对称性，第二类指标 i 具有以$[\mu]$标记的置换对称性，合起来具有以$[\omega]$标记的置换对称性.因此置换群表示$[\omega]$必须在置换群表示$[\lambda]$和$[\mu]$的外积约化中出现：

$$[\lambda]\otimes[\mu]=[\omega]\oplus\cdots.$$

这分导表示的约化，可用立特武德-理查森规则来计算

$$[\omega]\simeq\oplus\, a^{\omega}_{\lambda\mu}\{[\lambda]\otimes[\mu]\},$$

$$d_{[\omega]}(\mathrm{SU}(N+M))=\sum a^{\omega}_{\lambda\mu}d_{[\lambda]}(\mathrm{SU}(N))d_{[\mu]}(\mathrm{SU}(M)).$$

它们作为幺正矩阵群的表示，杨图$[\omega]$的行数不能超过($N+M$)，杨图$[\lambda]$的行数不能超过 N，杨图$[\mu]$的行数不能超过 M.

17.　把 SU(4)群表示[3,1]关于 SU(3)群的分导表示约化，并列出 SU(3)群各不可约表示状态基的正则张量杨表.

解　SU(4)群表示[3,1]的维数是

$$d_{[3,1]}(\mathrm{SU}(4))=\frac{\begin{matrix}4&5&6\\3&&\end{matrix}}{\begin{matrix}4&2&1\\1&&\end{matrix}}=45.$$

它关于 SU(3)群的分导表示，分解为 SU(3)群六个不可约表示的直和，它们及其状态基的正则张量杨表分别列举如下.

1) 表示[3,1]，15 维，状态基的正则张量杨表为

$$\begin{matrix}1&1&1\\2&&\end{matrix},\quad\begin{matrix}1&1&1\\3&&\end{matrix},\quad\begin{matrix}1&1&2\\2&&\end{matrix},\quad\begin{matrix}1&1&2\\3&&\end{matrix},\quad\begin{matrix}1&1&3\\2&&\end{matrix},$$

$$\begin{matrix}1&1&3\\3&&\end{matrix},\quad\begin{matrix}1&2&2\\2&&\end{matrix},\quad\begin{matrix}1&2&2\\3&&\end{matrix},\quad\begin{matrix}1&2&3\\2&&\end{matrix},\quad\begin{matrix}1&2&3\\3&&\end{matrix},$$

$$\begin{array}{l}1\,3\,3\\2\end{array},\quad \begin{array}{l}1\,3\,3\\3\end{array},\quad \begin{array}{l}2\,2\,2\\3\end{array},\quad \begin{array}{l}2\,2\,3\\3\end{array},\quad \begin{array}{l}2\,3\,3\\3\end{array}.$$

2) 表示[3,0], 10 维, 状态基的正则张量杨表为

$$\begin{array}{l}1\,1\,1\\4\end{array},\quad \begin{array}{l}1\,1\,2\\4\end{array},\quad \begin{array}{l}1\,1\,3\\4\end{array},\quad \begin{array}{l}1\,2\,2\\4\end{array},\quad \begin{array}{l}1\,2\,3\\4\end{array},$$

$$\begin{array}{l}1\,3\,3\\4\end{array},\quad \begin{array}{l}2\,2\,2\\4\end{array},\quad \begin{array}{l}2\,2\,3\\4\end{array},\quad \begin{array}{l}2\,3\,3\\4\end{array},\quad \begin{array}{l}3\,3\,3\\4\end{array}.$$

3) 表示[2,1], 8 维, 状态基的正则张量杨表为

$$\begin{array}{l}1\,1\,4\\2\end{array},\quad \begin{array}{l}1\,1\,4\\3\end{array},\quad \begin{array}{l}1\,2\,4\\2\end{array},\quad \begin{array}{l}1\,2\,4\\3\end{array},$$

$$\begin{array}{l}1\,3\,4\\2\end{array},\quad \begin{array}{l}1\,3\,4\\3\end{array},\quad \begin{array}{l}2\,2\,4\\3\end{array},\quad \begin{array}{l}2\,3\,4\\3\end{array}.$$

4) 表示[2,0], 6 维, 状态基的正则张量杨表为

$$\begin{array}{l}1\,1\,4\\4\end{array},\quad \begin{array}{l}1\,2\,4\\4\end{array},\quad \begin{array}{l}1\,3\,4\\4\end{array},\quad \begin{array}{l}2\,2\,4\\4\end{array},\quad \begin{array}{l}2\,3\,4\\4\end{array},\quad \begin{array}{l}3\,3\,4\\4\end{array}.$$

5) 表示[1,1], 3 维, 状态基的正则张量杨表为

$$\begin{array}{l}1\,4\,4\\2\end{array},\quad \begin{array}{l}1\,4\,4\\3\end{array},\quad \begin{array}{l}2\,4\,4\\3\end{array}.$$

6) 表示[1,0], 3 维, 状态基的正则张量杨表为

$$\begin{array}{l}1\,4\,4\\4\end{array},\quad \begin{array}{l}2\,4\,4\\4\end{array},\quad \begin{array}{l}3\,4\,4\\4\end{array}.$$

18. 把 SU(6)群如下不可约表示, 作为子群 SU(3)⊗SU(2)的分导表示, 分别按子群不可约表示分解:

$$[1],\quad [1,1],\quad [2],\quad [3],\quad [2,1],\quad [1,1,1],\quad [2,1^4].$$

解　在粒子物理中, SU(3)群的表示描写味道多重态, SU(2)群的表示描写自旋多重态. 这些表示都用多重态的重数来标记.

$$6 \simeq (3,2)$$

$$15 \simeq (3^*,3) \oplus (6,1)$$

$$21 \simeq (3^*,1) \oplus (6,3)$$

$$56 \simeq (10,4) \oplus (8,2)$$

$$70 \simeq (10,2) \oplus (8,4) \oplus (8,2) \oplus (1,2)$$

$$20 \simeq (1,4) \oplus (8,2)$$

$$35 \simeq (1,3) \oplus (8,1) \oplus (8,3)$$

特别注意表示$[3]$和表示$[2,1^4]\simeq[1]\backslash[1]^*$的约化. 前者给出低能重子可能的多重态，即自旋 3/2 的十重态和自旋 1/2 的八重态，而且因为它们处在同一个

SU(6)多重态中，所以宇称相同(相对质子宇称为正)．后者给出低能介子可能的多重态，即自旋1的单态，自旋0的八重态，和自旋1的八重态，它们的宇称相同(实验确定为负)．这正好与20世纪60年代初实验上已发现的强子相吻合．这些正是当时强子SU(6)对称性理论的成功之处．在SU(6)理论中，用SU(2)群来描写自旋，决定了这理论只能是非相对论的，高能粒子物理的许多现象无法用此模型来解释．

19. 把SU(5)群表示[1]，[1,1]和[2,1³]作为子群SU(3)⊗SU(2)的分导表示，分别按子群不可约表示分解．

解 在1974年提出的大统一模型中，需要研究SU(5)群各不可约表示，作为子群SU(3)⊗SU(2)的分导表示，按子群不可约表示的分解．SU(5)群还有一个U(1)子群，它的元素可与子群SU(3)⊗SU(2)所有元素对易，但两子群除了恒元外还有重复元素，因而不能写成直乘形式．子群SU(3)描写夸克强相互作用，子群SU(2)⊗U(1)描写弱电作用．分解后的表示都用多重态的重数来标记．子群U(1)的生成元记作Y，本征值标在分解后表示的下标上．在SU(5)大统一模型中，电荷Q等于T_3+Y，T_3是子群SU(2)的第三个生成元：

$$
\begin{aligned}
Q = T_3 + Y &= \text{diag}\{0,0,0,1/2,-1/2\} \\
&\quad + \text{diag}\{-1/3,-1/3,-1/3,1/2,1/2\} \\
&= \text{diag}\{-1/3,-1/3,-1/3,1,0\}.
\end{aligned}
$$

$$[1] \simeq [1]\times[0] \oplus [0]\times[1]$$

$$5 \simeq (3,1)_{-1/3} \oplus (1,2)_{1/2}.$$

$$[1,1] \simeq [1,1]\times[0] \oplus [1]\times[1] \oplus [0]\times[1,1]$$

$$10 \simeq (3^*,1)_{2/3} \oplus (3,2)_{1/6} \oplus (1,1)_1.$$

$$
\begin{aligned}
[2,1,1,1] \simeq\ & [2,1,1]\times[1] \oplus [1,1,1]\times[2] \oplus [1,1,1]\times[1,1] \\
& \oplus [2,1]\times[1,1] \oplus [1,1]\times[2,1]
\end{aligned}
$$

$$24 \simeq (3,2)_{-5/6} \oplus (1,3)_0 \oplus (1,1)_0 \oplus (8,1)_0 \oplus (3^*,2)_{5/6}.$$

在 SU(5)大统一模型中，粒子状态区分为左手态和右手态，分别填充到 5 维和 10 维多重态中. 第一代粒子的填充法如下：

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ e^c \\ \nu^c \end{pmatrix}_R, \quad \begin{pmatrix} 0 & u_3^c & -u_2^c & u_1 & d_1 \\ & 0 & u_1^c & u_2 & d_2 \\ & & 0 & u_3 & d_3 \\ & & & 0 & e^c \\ & & & & 0 \end{pmatrix}_L.$$

其中上标 c 表电荷共轭变换，下标 R 和 L 表右手态和左手态. 10 维表示是反对称张量表示，因此只需填出上半个矩阵的粒子态. 24 维表示是伴随表示，对应规范粒子，这里不再列出.

五、SU(N)群的开西米尔算子

★　SU(N)群自身表示生成元 T_A 满足对易关系和反对易关系

$$[T_A, T_B] = \mathrm{i}\sum_{D=1}^{N^2-1} f_{ABD} T_D,$$

$$\{T_A, T_B\} = \sum_{D=1}^{N^2-1} d_{ABD} T_D + \frac{1}{N}\delta_{AB}\, \mathbf{1},$$

$$\mathrm{tr}(T_A T_B) = \frac{1}{2}\delta_{AB}.$$

因此，式中定义的系数 f_{ABD} 和 d_{ABD} 可用 T_A 表出

$$f_{ABD} = -2\mathrm{i}\,\mathrm{tr}(T_A T_B T_D - T_B T_A T_D),$$

$$d_{ABD} = 2\,\mathrm{tr}(T_A T_B T_D + T_B T_A T_D), \tag{7.21}$$

注意 SU(N)群伴随表示 $D^{ad}(u)$ 满足

$$D^{[\lambda]}(u)^{-1} I_A^{[\lambda]} D_u^{[\lambda]} = \sum_{A'=1}^{N^2-1} D_{AA'}^{ad} I_{A'}^{[\lambda]}, \quad u \in \mathrm{SU}(N), \tag{7.22}$$

其中[λ]是 SU(N)群的任一表示，$D^{[\lambda]}(u)$和 $I_A^{[\lambda]}$ 是该表示的表示矩阵和生成元.

当 $D^{[\lambda]}(u)$取自身表示 u 时，$I_A^{[\lambda]}$取 T_A. 设把 f_{ABD}和d_{ABD}看作关于伴随表示的三阶对称和反对称张量，则易证它们是不变张量. 以 f_{ABD}为例作证明.

$$\begin{aligned} f_{ABD} \longrightarrow & \sum_{A'B'D'} D^{ad}_{AA'} D^{ad}_{BB'} D^{ad}_{DD'} f_{A'B'D'} \\ &= -2i\,\mathrm{tr}\{u^{-1}T_A u u^{-1} T_B u u^{-1} T_D u - u^{-1} T_B u u^{-1} T_A u u^{-1} T_D u\} \\ &= f_{ABD}. \end{aligned}$$

关于伴随表示的三阶张量的变换矩阵是三个伴随表示的直乘. 根据立特武德-理查森规则，除了 $N=2$ 外，SU(N)群两个伴随表示直乘的克莱布施-戈登级数中，除了其他表示外，只包含一个恒等表示和两个伴随表示，因此三个伴随表示的直乘分解中只包含两个恒等表示. 即关于伴随表示不变的三阶张量只能与 f_{ABD}或d_{ABD}成比例. 对 SU(2)群，$d_{ABD}=0$，三个伴随表示的直乘分解中只包含一个恒等表示，关于伴随表示不变的三阶张量一定与 f_{ABD}成比例.

现在把(7.19)式中的 T_A换成$I_A^{[\lambda]}$，它们也构成关于伴随表示不变的对称或反对称三阶张量，因此与 f_{ABD}或d_{ABD}成比例

$$\begin{aligned} -2i\,\mathrm{tr}(I_A^{[\lambda]} I_B^{[\lambda]} I_D^{[\lambda]} - I_B^{[\lambda]} I_A^{[\lambda]} I_D^{[\lambda]}) &= 2T_2([\lambda]) f_{ABD}, \\ 2\,\mathrm{tr}(I_A^{[\lambda]} I_B^{[\lambda]} I_D^{[\lambda]} + I_B^{[\lambda]} I_A^{[\lambda]} I_D^{[\lambda]}) &= A([\lambda]) d_{ABD}. \end{aligned} \tag{7.23}$$

由前式得

$$\mathrm{tr}(I_A^{[\lambda]} I_D^{[\lambda]}) = \delta_{AD} T_2([\lambda]). \tag{7.24}$$

$T_2([\lambda])$和 $A([\lambda])$分别与 SU(N)群的二阶和三阶开西米尔有关，文献中也常直接称它们为二阶和三阶开西米尔. 根据定义易得

$$\begin{aligned} & T_2([\lambda]^*) = T_2([\lambda]), \qquad A([\lambda]^*) = -A([\lambda]), \\ & T_2([\lambda]\oplus[\mu]) = T_2([\lambda]) + T_2([\mu]), \\ & A([\lambda]\oplus[\mu]) = A([\lambda]) + A([\mu]), \\ & T_2([\lambda]\otimes[\mu]) = d_{[\mu]} T_2([\lambda]) + d_{[\lambda]} T_2([\mu]), \\ & A([\lambda]\otimes[\mu]) = d_{[\mu]} A([\lambda]) + d_{[\lambda]} A([\mu]). \end{aligned} \tag{7.25}$$

在按照(7.24)式计算 $T_2([\lambda])$时，可取 $A=D=3$，因而式中出现的生成元都属子群 SU(2). 把 SU(2)群的 $T_2([\lambda])$记作 $T_2^{(0)}([\lambda])$，无论 λ 是偶数还是奇

数，都可证得

$$T_2^{(0)}([\lambda]) = \mathrm{tr}[(I_3^{[\lambda]})^2] = \frac{1}{12}\lambda(\lambda+1)(\lambda+2). \tag{7.26}$$

把 SU(N)群的不可约表示$[\lambda]$，作为子群 SU($N-2$)$\otimes$SU(2)的分导表示，按子群的不可约表示$[\nu]\otimes[\mu]$分解，因而有

$$T_2([\lambda]) = \sum d_{[\nu]}(\mathrm{SU}(N-2))T_2^{(0)}([\mu]). \tag{7.27}$$

在按照(7.23)式计算 $A([\lambda])$时，可取 $A=B=3$ 和 $D=8$，因而式中出现的生成元都属子群 SU(3)，$d_{338}=\sqrt{1/3}$. 把 SU(3)群的 $A([\lambda])$记作 $A^{(0)}([\lambda])$，得

$$A^{(0)}([\lambda]) = 4\sqrt{3}\ \mathrm{tr}\{T_8^{[\lambda]}(T_3^{[\lambda]})^2\}.$$

在平面权图中属同一水平线的权，$T_8^{[\lambda]}$的本征值相同，把这些权对应的$(T_3^{[\lambda]})^2$按公式(7.26)先加起来，然后再对各水平线求和，可以算得

$$\begin{aligned}A^{(0)}([\lambda]) &= A^{(0)}([\lambda,0]) = 2\sum_{m=0}^{\lambda}(\lambda-3m)T_2^{(0)}([\lambda-m])\\ &= (1/6)\sum_{m=0}^{\lambda}(\lambda-3m)(\lambda-m)(\lambda-m+1)(\lambda-m+2)\\ &= (1/120)\ \lambda\ (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(2\lambda+3).\end{aligned}$$

由此进一步算得一般形式：

$$\begin{aligned}A^{(0)}([\lambda+\lambda',\lambda']) &= A^{(0)}([\lambda]\otimes[\lambda']^*) - A^{(0)}([\lambda-1]\otimes[\lambda'-1]^*)\\ &= d_{[\lambda']}(\mathrm{SU}(3))A^{(0)}([\lambda]) - d_{[\lambda]}(\mathrm{SU}(3))A^{(0)}([\lambda'])\\ &\quad - d_{[\lambda'-1]}(\mathrm{SU}(3))A^{(0)}([\lambda-1]) + d_{[\lambda-1]}(\mathrm{SU}(3))A^{(0)}([\lambda'-1])\\ &= \frac{1}{120}(\lambda+1)(\lambda'+1)(\lambda-\lambda')(\lambda-\lambda'+2)(\lambda+2\lambda'+3)(2\lambda+\lambda'+3).\end{aligned} \tag{7.28}$$

把 SU(N)群的不可约表示$[\lambda]$，作为子群 SU($N-3$)$\oplus$SU(3)的分导表示，按子群的不可约表示$[\nu]\otimes[\mu]$分解，因而有

$$A([\lambda]) = \sum d_{[\nu]}(\mathrm{SU}(N-3))A^{(0)}([\mu]). \tag{7.29}$$

20. 计算 SU(N)群一列杨图($[1^r]$)对应表示的开西米尔 $T_2([1^r])$和 $A([1^r])$.

解　利用(7.27)和(7.29)式计算得

$$T_2([1^r]) = d_{[1^{r-1}]}(\mathrm{SU}(N-2))T_2^{(0)}([1]) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} N-2 \\ r-1 \end{pmatrix},$$

$$A([1^r]) = \{d_{[1^{r-1}]}(\mathrm{SU}(N-3)) - d_{[1^{r-2}]}(\mathrm{SU}(N-3))\}A^{(0)}([1])$$

$$= \frac{(N-3)!}{(r-1)!(N-r-2)!} - \frac{(N-3)!}{(r-2)!(N-r-1)!}$$

$$= \frac{(N-3)!\{(N-r-1)-(r-1)\}}{(r-1)!(N-r-1)!}$$

$$= \frac{(N-2r)}{(r-1)}\begin{pmatrix} N-3 \\ r-2 \end{pmatrix}.$$

21. 计算 SU(6)群不可约表示[3]的开西米尔 $T_2([3])$和 $A([3])$.

解　已知 SU(2)群的二阶开西米尔 $T_2^{(0)}([\lambda])$为

$$T_2^{(0)}([\lambda]) = \mathrm{tr}\{(I_3^{[\lambda]})^2\} = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)/12,$$

$$T_2^{(0)}([3]) = 5,\quad T_2^{(0)}([2]) = 2,\quad T_2^{(0)}([1]) = 1/2,\quad T_2^{(0)}([0]) = 0.$$

把 SU(6)群的不可约表示[3], 作为子群 SU(4)⊗SU(2)的分导表示, 按子群的不可约表示分解:

$$[3] \longrightarrow [3]\otimes[0]\oplus[2]\otimes[1]\oplus[1]\otimes[2]\oplus[0]\otimes[3].$$

因此,

$$T_2([3]) = d_{[3]}(\mathrm{SU}(4))T_2^{(0)}([0]) + d_{[2]}(\mathrm{SU}(4))T_2^{(0)}([1])$$

$$+ d_{[1]}(\mathrm{SU}(4))T_2^{(0)}([2]) + d_{[0]}(\mathrm{SU}(4))T_2^{(0)}([3])$$

$$= 0 + 10\times(1/2) + 4\times 2 + 1\times 5 = 18.$$

对于对应一行杨图$[\lambda]$的表示, 已知 SU(3)群的三阶开西米尔 $A^{(0)}([\lambda])$为

$$A^{(0)}([\lambda]) = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(2\lambda+3)/120,$$

$$A^{(0)}([3]) = 27,\quad A^{(0)}([2]) = 7,\quad A^{(0)}([1]) = 1,\quad A^{(0)}([0]) = 0.$$

把 SU(6)群的不可约表示[3]，作为子群 SU(3)⊗SU(3)的分导表示，按子群的不可约表示分解. 分解的杨图形式与前面公式相同. 由此，

$$A([\lambda]) = d_{[3]}(\mathrm{SU}(3))A^{(0)}([0]) + d_{[2]}(\mathrm{SU}(3))A^{(0)}([1])$$
$$+ d_{[1]}(\mathrm{SU}(3))A^{(0)}([2]) + d_{[0]}(\mathrm{SU}(3))A^{(0)}([3])$$
$$= 0 + 6\times 1 + 3\times 7 + 1\times 27 = 54.$$

22. 计算 SU(5)群一行杨图($[\lambda]=[\lambda,0,0,0]$)对应表示的开西米尔 $T_2([\lambda])$和 $A([\lambda])$.

解 计算方法与上题相同. 这里只列出计算结果.

$$T_2^{(0)}([\lambda]) = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)/12,$$

$$A^{(0)}([\lambda]) = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(2\lambda+3)/120,$$

$$d_{[\lambda]}(\mathrm{SU}(3)) = (\lambda+2)(\lambda+1)/2, \quad d_{[\lambda]}(\mathrm{SU}(2)) = \lambda+1,$$

$$\sum_{n=0}^{m} n = m(m+1)/2, \quad \sum_{n=0}^{m} n^2 = m(m+1)(2m+1)/6,$$

$$\sum_{n=0}^{m} n^3 = m^2(m+1)^2/4,$$

$$\sum_{n=0}^{m} n^4 = m(m+1)(2m+1)(3m^2+3m-1)/30,$$

$$\sum_{n=0}^{m} n^5 = m^2(m+1)^2(2m^2+2m-1)/12,$$

$$\sum_{n=0}^{m} n^6 = m(m+1)(2m+1)(3m^4+6m^3-3m+1)/42.$$

由此算得

$$T_2([\lambda]) = \sum_{n=0}^{\lambda} d_{[\lambda-n]}(\mathrm{SU}(3))T_2^{(0)}([n])$$
$$= \sum_{n=0}^{\lambda}(\lambda-n+2)(\lambda-n+1)n(n+1)(n+2)/24$$
$$= \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4)(\lambda+5)/1440,$$

$$A([\lambda]) = \sum_{n=0}^{\lambda} d_{[\lambda-n]}(\mathrm{SU}(2))A^{(0)}([n])$$

$$= \sum_{n=0}^{\lambda} (\lambda - n + 1) n (n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)/120$$

$$= \lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)(\lambda+4)(\lambda+5)(2\lambda+5)/5040.$$

对 SU(N)群的计算结果是

$$T_2([\lambda]) = \frac{1}{2}\prod_{n=0}^{N} \frac{\lambda+n}{n+1} = \frac{\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+N)}{2(N+1)!},$$

$$A([\lambda]) = \frac{2\lambda+N}{N+2}\prod_{n=0}^{N} \frac{\lambda+n}{n+1} = \frac{\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+N)(2\lambda+N)}{(N+2)!}.$$

第八章　SO(N)群和洛伦兹群

一、SO(N)群的不可约张量表示

★　所有 N 维幺模实正交矩阵 R 的集合，按照矩阵乘积，构成 SO(N)群. 本章只讨论 $N\geqslant 3$ 的情况，因为 SO(2)群情况比较特殊，它是阿贝尔群，同构于 U(1)群. SO(N)群是 $N(N-1)/2$ 阶双连通的紧致李群，是 SU(N)群的子群. SO($2n+1$)群的秩为 n，李代数记作 B_n，SO($2n$)群的秩为 n，李代数记作 D_n. SO(N)群自身表示的生成元常取 SU(N)群自身表示第二类生成元的两倍，从而当 $N=3$ 时符合 SO(3)群的常用符号.

$$
\begin{aligned}
(T_{ab})_{rs} &= 2(T^{(2)}_{ab})_{rs} = -\mathrm{i}\delta_{ar}\delta_{bs} + \mathrm{i}\delta_{as}\delta_{br}, \qquad a < b, \\
\mathrm{tr}(T_{ab}T_{cd}) &= 2\delta_{ac}\delta_{bd} - 2\delta_{ad}\delta_{bc},
\end{aligned}
\tag{8.1}
$$

其中指标 a 和 b 是生成元的序指标，而 r 和 s 是矩阵的行列指标. $N(N-1)/2$ 个矩阵 T_{ab} 是反对称矩阵，关于序指标也反对称. 互相对易的生成元有 T_{12}，T_{34}，…，它们构成 SO(N)群的嘉当子代数. SO(N)群任意元素 R 可表为矩阵的指数函数形式：

$$
R = \exp\left\{-\mathrm{i}\sum_{a<b}\omega_{ab}T_{ab}\right\}. \tag{8.2}
$$

★　与 SU(N)群的张量相比，SO(N)群的张量有如下新的特点. 它的变换矩阵是实矩阵，因而 SO(N)群不区分协变张量和逆变张量. 这样，SO(N)群的张量空间首先要分解为一系列无迹张量空间$\mathcal{T}$的直和，然后再用杨算符投影来分解，$\mathcal{T}^{[\lambda]}_{\mu}=\mathcal{Y}^{[\lambda]}_{\mu}\mathcal{T}$. SO($N$)群的不等价不可约单值表示仍可用杨图描写，但(1)杨图的第一列和第二列格数之和必须不大于 N，否则表示空间是零空间；(2)行数 m 大于$N/2$的杨图描写的表示等价于把第一列格数改为($N-m$)的杨图表示；(3)行数 m 等于 $N/2$ 的杨图对应的表示空间可以进一步分解为两个不变子空间，分别是自对偶张量空间和反自对偶张量空间，此两子空间对应的表示维数相同，但互不等价，分别记作[$+\lambda$]和[$-\lambda$].

★　用杨图[λ]描写的 SO(N)群不可约表示的维数 $d_{[\lambda]}(\mathrm{SO}(N))$与 SU($N$)群类似，也可表为对应杨图[$\lambda$]的两个杨表中各填数乘积之商，分母还是钩形数杨表

$Y_h^{[\lambda]}$，即各格填以该格的钩形数 h_{ij}，分子的杨表 $Y_B^{[\lambda]}$ 稍复杂一些. 此外当杨图 $[\lambda]$ 行数等于 $N/2$ 时，由于表示分解为自对偶和反自对偶两个表示的直和，表示维数还要再除以 2.

$$
d_{[\lambda]}(\mathrm{SO}(N)) = \begin{cases} \dfrac{Y_B^{[\lambda]}}{Y_h^{[\lambda]}} & \text{当}[\lambda]\text{的行数不等于 } N/2 \\[2ex] \dfrac{Y_B^{[\lambda]}}{2Y_h^{[\lambda]}} & \text{当}[\lambda]\text{的行数等于 } N/2\ . \end{cases} \tag{8.3}
$$

为了说清楚分子杨表 $Y_B^{[\lambda]}$ 的填法，先定义钩形路径 (i,j)，它是由杨图 $[\lambda]$ 第 i 行最右面格子处进入杨图，向左走到第 i 行第 j 列处向下转弯，在第 j 列最下面格子处离开杨图的一条钩形通道. 而逆钩形路径 $\overline{(i,j)}$ 与钩形路径 (i,j) 形状相同，只是走向相反. 两条钩形路径在杨图中经过的格子数就是第 i 行第 j 列格子的钩形数 h_{ij}. 按下列步骤填写若干杨表：

(1) 杨表 $Y_\lambda^{[\lambda]}$，它的第 i 行第 j 列格子的填数为 $N+j-i$.

(2) 沿钩形路径 $(1,1)$，从最右面格子开始，逐格填入 (λ_1-1)，(λ_2-1)，…，(λ_r-1) 等，其中 r 是杨图 $[\lambda]$ 的行数，λ_i 是杨图 $[\lambda]$ 第 i 行的格数. 同时又沿各逆钩形路径 $\overline{(i,1)}$，$1\leqslant i\leqslant r$，由最下面格子数起的前 (λ_i-1) 格填入 -1. 在这些路径有重叠的格子，如果填入了几个 -1，则代数相加. 这杨表的所有填数之和为零.

(3) 去掉杨图的第一行和第一列，重复方法(2)，填余下的杨图. 然后把这方法继续下去，直到余下的杨图只剩一列或杨图消失为止.

把这些杨表对应格子的填数代数相加，即得杨表 Y_B.

在计算 SO(N) 群两不可约表示直乘分解时，可先用立特武德-理查森规则计算，然后对分属两乘积表示的指标取迹张量，最后用表示维数来作检验. 注意反对称指标(处于同一列的指标)间是无迹的. SU(N) 群用一列杨图描写的不可约表示也是 SO(N) 群的不可约表示.

1. 计算下列杨图标记的 SO(6) 群不可约表示的维数：

(1) [4,2]，　(2) [3,2]，　(3) [4,4]，　(4) [3,1,1]，　(5) [3,3,1].

解

$$
d_{[4,2]}(\mathrm{SO}(6)) = \frac{\begin{matrix}6&7&8&9\\5&6&&\end{matrix} + \begin{matrix}-1&-1&1&3\\-2&0&&\end{matrix}}{\begin{matrix}5&4&2&1\\2&1&&\end{matrix}} = \frac{\begin{matrix}5&6&9&12\\3&6&&\end{matrix}}{\begin{matrix}5&4&2&1\\2&1&&\end{matrix}} = 729,
$$

$$
d_{[3,2]}(\mathrm{SO}(6))=\frac{\begin{array}{lll}6&7&8\\5&6\end{array}+\begin{array}{lll}-1&1&2\\-2&0\end{array}}{\begin{array}{lll}4&3&1\\2&1\end{array}}=\frac{\begin{array}{lll}5&8&10\\3&6\end{array}}{\begin{array}{lll}4&3&1\\2&1\end{array}}=300,
$$

$$
d_{[4,4]}(\mathrm{SO}(6))=\frac{\begin{array}{llll}6&7&8&9\\5&6&7&8\end{array}+\begin{array}{llll}-1&-1&3&3\\-2&-1&-1&0\end{array}+\begin{array}{llll}0&0&0&0\\0&-1&-1&2\end{array}}{\begin{array}{llll}5&4&3&2\\4&3&2&1\end{array}}
$$

$$
=\frac{\begin{array}{llll}5&6&11&12\\3&4&5&10\end{array}}{\begin{array}{llll}5&4&3&2\\4&3&2&1\end{array}}=825,
$$

$$
d_{[3,1,1]}(\mathrm{SO}(6))=\frac{\begin{array}{lll}6&7&8\\5\\4\end{array}+\begin{array}{lll}0&0&2\\-1\\-1\end{array}}{\begin{array}{lll}5&2&1\\2\times 2\\1\end{array}}=\frac{\begin{array}{lll}6&7&10\\4\\3\end{array}}{\begin{array}{lll}5&2&1\\2\times 2\\1\end{array}}=126,
$$

$$
d_{[3,3,1]}(\mathrm{SO}(6))=\frac{\begin{array}{lll}6&7&8\\5&6&7\\4\end{array}+\begin{array}{lll}0&2&2\\-2&0&0\\-2\end{array}+\begin{array}{lll}0&0&0\\0&-1&1\\0\end{array}}{\begin{array}{lll}5&3&2\\2\times 4&2&1\\1\end{array}}=\frac{\begin{array}{lll}6&9&10\\3&5&8\\2\end{array}}{\begin{array}{lll}5&3&2\\2\times 4&2&1\\1\end{array}}=270.
$$

2. 将下列 SU(N)群不可约表示，作为 SO(N)群的分导表示，按 SO(N)群不可约表示分解，并取 $N=7$，计算分解式两边表示的维数来进行检验：

$[2]$，　$[3]$，　$[2,1]$，　$[4]$，　$[3,1]$，　$[2,2]$，

$[2,1^2]$，　$[5]$，　$[4,1]$，　$[3,2]$，　$[3,1,1]$，　$[2,2,1]$，

$[2,1^3]$，　$[6]$，　$[5,1]$，　$[4,2]$，　$[4,1,1]$，　$[3,3]$，

$[3,2,1]$，　$[3,1^3]$，　$[2^3]$，　$[2^2,1^2]$，　$[2,1^4]$.

解　本题所给出的SU(N)群不可约表示，作为SO(N)群的分导表示，按SO(N)群不可约表示分解的公式，除了在出现行数大于或等于 $N/2$ 的情况，需把表示作等价替代外，都与 N 无关. 维数检验则取了特殊的 N 值.

$$[2] \longrightarrow [2] \oplus 1, \qquad 28=27+1.$$

$$[3] \longrightarrow [3] \oplus [1], \qquad 84=77+7.$$

$$[2,1] \longrightarrow [2,1] \oplus [1], \qquad 112=105+7.$$

$$[4] \longrightarrow [4] \oplus [2] \oplus 1, \qquad 210=182+27+1.$$

$$[3,1] \longrightarrow [3,1] \oplus [2] \oplus [1,1], \qquad 378=330+27+21.$$

$$[2,2] \longrightarrow [2,2] \oplus [2] \oplus 1, \qquad 196=168+27+1.$$

$$[2,1,1] \longrightarrow [2,1,1] \oplus [1,1], \qquad 210=189+21.$$

$$[5] \longrightarrow [5] \oplus [3] \oplus [1], \qquad 462=378+77+7.$$

$$[4,1] \longrightarrow [4,1] \oplus [3] \oplus [2,1] \oplus [1],$$
$$1008=819+77+105+7.$$

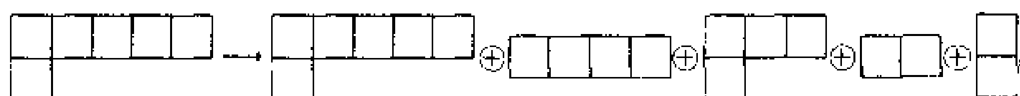
$$[3,2] \longrightarrow [3,2] \oplus [3] \oplus [2,1] \oplus [1],$$
$$882=693+77+105+7.$$

$$[3,1,1] \longrightarrow [3,1,1] \oplus [2,1] \oplus [1,1,1], \qquad 756=616+105+35.$$

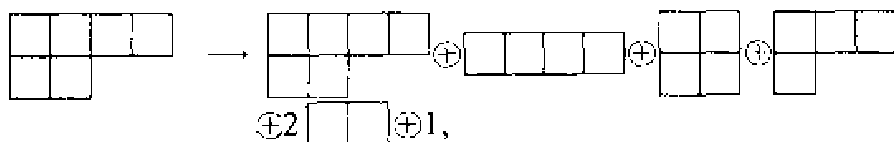
$$[2,2,1] \longrightarrow [2,2,1] \oplus [2,1] \oplus [1], \qquad 490=378+105+7.$$

$$[2,1,1,1] \longrightarrow [2,1,1,1] \oplus [1,1,1], \qquad 224=189+35.$$

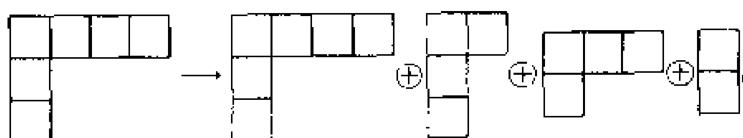
$$[6] \longrightarrow [6] \oplus [4] \oplus [2] \oplus 1,$$
$$924=714+182+27+1.$$



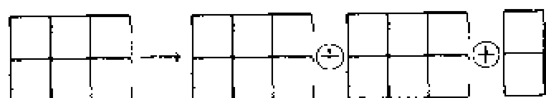
2310=1750+182+330+27+21.



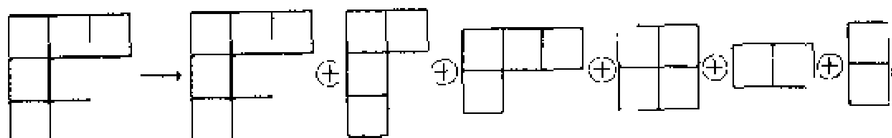
2646=1911+182+168+330+2×27+1.



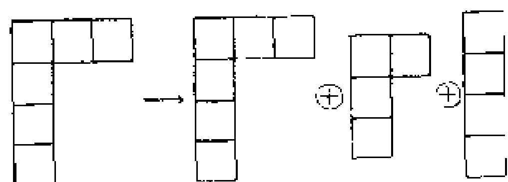
2100=1560+189+330+21.



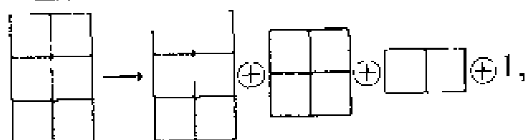
1176=825+330+21.



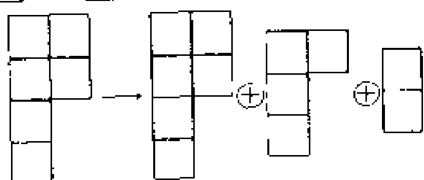
2352=1617+189+330+168+27+21.



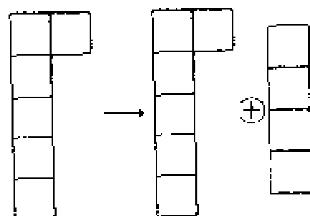
840=616+189+35.



490=294+168+27+1.



588=378+189+21.



140=105+35.

3. 计算下列不可约张量表示直乘分解的克莱布施－戈登级数，并取 $N=7$，计算分解式两边表示的维数来进行检验：

$$(1)\ [2]\otimes[2],(2)\ [2]\otimes[1,1],(3)\ [3]\otimes[2,1].$$

解　(1)

$$[2]\otimes[2]\simeq[4]\oplus[3,1]\oplus[2,2]\oplus[2]\oplus[1,1]\oplus 1$$

$$27\times 27=729=182+330+168+27+21+1.$$

(2)

$$[2]\otimes[1,1]\simeq[3,1]\oplus[2,1,1]\oplus[2]\oplus[1,1]$$

$$27\times 21=567=330+189+27+21.$$

(3)

$$[3]\otimes[2,1]\simeq[5,1]\oplus[4,2]\oplus[4,1,1]\oplus[3,2,1]\oplus[4]\oplus[3,1]\oplus[2,2]\oplus[3,1]\oplus[2,1,1]\oplus[2]\oplus[1,1]$$

$$\begin{aligned}77\times 105=8085=&1750+1911+1560+1617\\&+182+330+168+330+189+27+21.\end{aligned}$$

二、SO(N)群的旋量表示

★　设有 N 个满足反对易关系的 γ_a 矩阵，

$$\{\gamma_a,\gamma_b\}=\gamma_a\gamma_b+\gamma_b\gamma_a=2\delta_{ab}\mathbf{1},\qquad a,b\leqslant N. \tag{8.4}$$

它们的所有可能乘积的集合，按照矩阵乘积，构成有限群，记作 Γ_N 矩阵群．常取 Γ_N 矩阵群的真实的幺正表示作为 γ_a 矩阵的定义，因此 γ_a 是幺正又厄米的矩阵，它们是 Γ_N 群的生成元．当 $N=2m$ 是偶数时，定义

$$\gamma_f = (-\mathrm{i})^m \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_N \tag{8.5}$$

γ_f 也是幺正又厄米的矩阵，且与所有 γ_a 矩阵都反对易，因此 γ_f 矩阵和 N 个 γ_a 矩阵一起满足(8.4)式，它们可以作为 Γ_{N+1} 群中 γ_a 矩阵的定义．注意

$$\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_N \gamma_f = (\mathrm{i})^m \mathbf{1}. \tag{8.6}$$

如果任意两个 γ_a 矩阵对换，或任意一个 γ_a 矩阵改变符号，(8.6)式右面会改变符号．如果 $N=4l+1$，(8.6)式右面不是新元素，Γ_{4l+1} 矩阵群与 Γ_{4l} 矩阵群同构，而当 $N=4l-1$ 时，(8.6)式右面是新的常数矩阵，Γ_{4l-2} 及其与 i 的乘积合起来与 Γ_{4l-1} 群同构．

$$\Gamma_{4l+1} \approx \Gamma_{4l}, \qquad \Gamma_{4l-1} \approx \{\Gamma_{4l-2}, \mathrm{i}\Gamma_{4l-2}\}. \tag{8.7}$$

在 Γ_N 矩阵群中，除了常数矩阵外，任一矩阵都能找到与之反对易的矩阵，因而矩阵迹为零．当 $N=2m$ 时，Γ_N 矩阵群包含 2^{2m+1} 个元素，用不可约表示的特征标公式可得满足(8.4)式的 γ_a 矩阵的维数 $d^{(2m)}$ 是 2^m，任何两组满足(8.4)式的 γ_a 矩阵互相等价，即可通过相似变换 X 联系起来：

$$\overline{\gamma}_a = X^{-1} \gamma_a X, \qquad 1 \leqslant a \leqslant 2m. \tag{8.8}$$

当 $N=2m+1$ 时，γ_a 矩阵的维数仍是 2^m，但等价的条件除了(8.4)式外，还要加上(8.6)式右面有相同的符号．在 Γ_{2m} 矩阵群中，除去只差正负号的一半矩阵后，余下矩阵互相线性无关，构成 2^m 维矩阵的一组完备基．

★　γ_a 矩阵等价定理有十分重要的作用．其一是可以定义粒子物理中常用的电荷共轭变换矩阵 C 和全反演矩阵 B．当 $N=2m$ 时，

$$\begin{aligned}
&C^{-1}\gamma_a C = -(\gamma_a)^{\mathrm{T}}, && C^{\dagger}C = \mathbf{1}, \\
&\det C = 1, && C^{\mathrm{T}} = (-1)^{m(m+1)/2} C, \\
&B^{-1}\gamma_a B = (\gamma_a)^{\mathrm{T}}, && B^{\dagger}B = \mathbf{1}, \\
&\det B = 1, && B^{\mathrm{T}} = (-1)^{m(m-1)/2} B.
\end{aligned}$$

由于条件(8.6)，当 $N=4l-1$ 时只能定义 C 矩阵，而 $N=4l+1$ 时只能定义 B 矩阵．

另一重要应用是用以定义 SO(N)群的基本旋量表示 $D(R)$，常简称旋量表示：

$$
\begin{aligned}
D(R)^{-1}\gamma_a D(R) &= \sum_{b=1}^{N} R_{ab}\gamma_b, && R \in \mathrm{SO}(N), \\
C^{-1}D(R)C &= \{D(R^{-1})\}^{\mathrm{T}} = D(R)^{*}, && \text{当 } N \neq 4l+1, \\
B^{-1}D(R)B &= \{D(R^{-1})\}^{\mathrm{T}} = D(R)^{*}, && \text{当 } N = 4l+1.
\end{aligned}
\tag{8.9}
$$

生成元是 $I_{ab} = -\mathrm{i}\gamma_a\gamma_b/2$，$a \neq b$. 基本旋量表示构成的群与 SO(N)群有 2∶1 的同态关系. 当 N 是奇数时，基本旋量表示是自共轭的不可约表示，记作 $D^{[s]}(R)$，或 $[s]$，维数为 $d_{[s]} = 2^{(N-1)/2}$，当 $N=8k\pm 1$ 时基本旋量表示是实表示. 当 N 是偶数时，由于存在非常数矩阵 γ_f 可与所有生成元 I_{ab} 对易，基本旋量表示是可约表示，它分解为两个维数相同但不等价的表示，记作 $D^{[\pm s]}(R)$，或$[\pm s]$，维数为 $d_{[\pm s]} = 2^{(N/2)-1}$. 当 $N=4k+2$ 时，$[\pm s]$互为复共轭表示，当 $N=4k$ 时，$[\pm s]$是互不等价的自共轭表示，当 $N=8k$ 时，$[\pm s]$是互不等价的实表示.

★　在 SO(N)变换中，按基本旋量表示 $D(R)$变换的量 Ψ 称为基本旋量：

$$
O_R\Psi = D(R)\Psi,
$$

其中 Ψ 是 $d_{[s]}$ 行(或 $d_{[\pm s]}$)一列的列矩阵. 如果旋量还带有张量指标，则称为旋张量：

$$
O_R\Psi_{a_1\cdots a_n} = \sum_{b_1\cdots b_n} R_{a_1b_1}\cdots R_{a_nb_n} D(R)\Psi_{b_1\cdots b_n}.
$$

旋张量空间是可约的，为了找出它的最小不变子空间，不仅它的张量指标间需要去迹，而且张量指标和旋量指标间还要去除第二类迹，然后再用杨算符投影. 因此，不可约的旋张量空间的旋张量要满足两类无迹条件

$$
\sum_b \psi_{a\cdots b\cdots b\cdots c} = 0, \qquad \sum_b \gamma_b\psi_{a\cdots b\cdots} = 0.
\tag{8.10}
$$

并用杨算符来投影，这样的杨算符对应杨图的行数不能大于 $N/2$，否则是零空间. 这空间对应的表示称为不可约的旋张量表示或旋量表示，它们用行数不大于 $N/2$ 的杨图$[s\,\lambda] = [s\,\lambda_1, \lambda_2, \cdots]$($N$ 是奇数)或$[\pm s\,\lambda] = [\pm s\,\lambda_1, \lambda_2, \cdots]$($N$ 是偶数)来标记. 旋量表示是 SO(N)群的双值表示.

★　可以根据杨图，用钩形规则来计算 SO(N)群旋量表示的维数 $d_{[\lambda]}(\mathrm{SO}(N))$

或 $d_{[\pm s\lambda]}(\mathrm{SO}(N))$. 在这规则中，表示维数也表为一个分数，分子和分母分别为给定杨图$[\lambda]$的一定杨表中所有填数的乘积. 前面还要乘上不可约基本旋量表示的维数：

$$d_{[s\lambda]}(\mathrm{SO}(N)) = d_{[s]}(\mathrm{SO}(N))\frac{Y_C^{[\lambda]}}{Y_h^{[\lambda]}}. \qquad (8.11)$$

当 N 是奇数时旋量表示用杨图$[s\,\lambda]$标记，等式右面因子 $d_{[s]}(\mathrm{SO}(N))$为基本旋量表示的维数 $2^{(N-1)/2}$. 当 N 是偶数时，上式中的 s 理解为 $\pm s$，即旋量表示用杨图$[\pm s\,\lambda]$标记，等式右面的第一个因子要理解为不可约基本旋量表示的维数 $d_{[+s]}(\mathrm{SO}(N)) = 2^{(N/2)-1}$.

仍采用钩形路径(i,j)的概念. 它是由杨图$[\lambda]$第 i 行最右面格子处进入杨图，向左走到第 i 行第 j 列处向下转弯，在第 j 列最下面格子处离开杨图的一条钩形通道. 而逆钩形路径$\overline{(i,j)}$与钩形路径(i,j)形状相同，只是走向相反. 两条钩形路径在杨图中经过的格子数就是第 i 行第 j 列格子的钩形数 h_{ij}. (8.11)式的分母是钩形数杨表 $Y_h^{[\lambda]}$，它的第 i 行第 j 列格子填入该格的钩形数 h_{ij}. 分子杨表格各填数表成若干个杨表对应格子填数之和. 按下列步骤填写这些杨表：

(1) $\mathrm{SU}(N-1)$群的杨表 $Y_A^{[\lambda]}$，它的第 i 行第 j 列的填数是$(N-1+j-i)$.

(2) 沿钩形路径$(1,1)$，从最右面格子开始，逐格填入 λ_2，λ_3，…，λ_r 等，其中 r 是杨图$[\lambda]$的行数，λ_i 是杨图$[\lambda]$第 i 行的格数. 同时又沿各逆钩形路径$\overline{(i,1)}$，$2 \leqslant i \leqslant r$，由最下面格子数起的前 λ_i 格填入 -1. 在这些路径有重叠的格子，如果填入了几个 -1，则代数相加. 这杨表所有填数之和为零.

(3) 去掉杨图的第一行和第一列，重复方法(2)，填余下的杨图. 把这方法继续下去，直到余下的杨图只剩一行或杨图消失为止.

把这些杨表对应格子的填数代数相加，即得(8.11)式中的杨表 Y_C.

4. 计算下列杨图标记的 SO(6)群不可约旋量表示的维数：

(1)$[+\,s\,4,2]$，　(2)$[+\,s\,3,2]$，　(3)$[+\,s\,4,4]$，

(4)$[+\,s\,3,1,1]$，(5)$[+\,s\,3,3,1]$.

解 (1)

$$d_{[+s4,2]}(\mathrm{SO}(6)) = 4\times\left\{\frac{\begin{matrix}5&6&7&8\\4&5&&\end{matrix}+\begin{matrix}0&0&0&2\\-1&-1&&\end{matrix}}{\begin{matrix}5&4&2&1\\2&1&&\end{matrix}}\right\}$$

$$= 4 \times \left\{ \frac{\begin{array}{l} 5\,6\,7\,10 \\ 3\,4 \end{array}}{\begin{array}{l} 5421 \\ 21 \end{array}} \right\} = 1260.$$

(2)

$$d_{[+s3,2]}(\mathrm{SO}(6)) = 4 \times \left\{ \frac{\begin{array}{l} 5\,6\,7 \\ 4\,5 \end{array} + \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & \end{array}}{\begin{array}{l} 4\,3\,1 \\ 2\,1 \end{array}} \right\} = 4 \times \left\{ \frac{\begin{array}{l} 5\,6\,9 \\ 3\,4 \end{array}}{\begin{array}{l} 4\,3\,1 \\ 2\,1 \end{array}} \right\} = 540.$$

(3)

$$d_{[-s4,4]}(\mathrm{SO}(6)) = 4 \times \left\{ \frac{\begin{array}{l} 5\,6\,7\,8 \\ 4\,5\,6\,7 \end{array} + \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{array}}{\begin{array}{l} 5\,4\,3\,2 \\ 4\,3\,2\,1 \end{array}} \right\}$$

$$= 4 \times \left\{ \frac{\begin{array}{l} 5\,6\,7\,12 \\ 3\,4\,5\,6 \end{array}}{\begin{array}{l} 5\,4\,3\,2 \\ 4\,3\,2\,1 \end{array}} \right\} = 1260.$$

(4)

$$d_{[+s3,1,1]}(\mathrm{SO}(6)) = 4 \times \left\{ \frac{\begin{array}{l} 5\,6\,7 \\ 4 \\ 3 \end{array} + \begin{array}{l} 0\,1\,1 \\ 0 \\ -2 \end{array}}{\begin{array}{l} 5\,2\,1 \\ 2 \\ 1 \end{array}} \right\} = 4 \times \left\{ \frac{\begin{array}{l} 5\,7\,8 \\ 4 \\ 1 \end{array}}{\begin{array}{l} 5\,2\,1 \\ 2 \\ 1 \end{array}} \right\} = 224,$$

(5)

$$d_{[+s3,3,1]}(\mathrm{SO}(6)) = 4 \times \left\{ \frac{\begin{array}{l} 5\,6\,7 \\ 4\,5\,6 \\ 3 \end{array} + \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & & \end{array}}{\begin{array}{l} 5\,3\,2 \\ 4\,2\,1 \\ 1 \end{array}} \right\} = 4 \times \left\{ \frac{\begin{array}{l} 5\,7\,10 \\ 3\,4\,6 \\ 1 \end{array}}{\begin{array}{l} 5\,3\,2 \\ 4\,2\,1 \\ 1 \end{array}} \right\} = 420.$$

三、SO(4)群和洛伦兹群

★ 通过 SO(4)群的不等价不可约表示，可以计算洛伦兹群的不等价不可约表示，这是研究非紧致群的不等价不可约表示的一个普遍方法.

★ SO(4)群的六个生成元 T_{ab}，经适当组合后，得两组互相对易的生成元.

$$T_a^{(\pm)} = \frac{1}{2}\left(\sum_{b<c=2}^{3}\epsilon_{abc}T_{bc} \pm T_{a4}\right),$$

$$[T_a^{(\pm)}, T_b^{(\pm)}] = \mathrm{i}\sum_{c=1}^{3}\epsilon_{abc}T_c^{(\pm)}, \qquad [T_a^{(+)}, T_b^{(-)}] = 0. \tag{8.12}$$

表成二维矩阵的直乘形式:

$$T_1^{(+)} = \frac{1}{2}\sigma_2 \times \sigma_1, \quad T_2^{(+)} = \frac{-1}{2}\sigma_2 \times \sigma_3, \quad T_3^{(+)} = \frac{1}{2}\mathbf{1}_2 \times \sigma_2,$$

$$T_1^{(-)} = \frac{-1}{2}\sigma_1 \times \sigma_2, \quad T_2^{(-)} = \frac{-1}{2}\sigma_2 \times \mathbf{1}_2, \quad T_3^{(-)} = \frac{1}{2}\sigma_3 \times \sigma_2.$$

作相似变换 N 后，得

$$N^{-1}T_a^{(+)}N = (\sigma_a/2) \times \mathbf{1}_2, \quad N^{-1}T_a^{(-)}N = \mathbf{1}_2 \times (\sigma_a/2).$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

因此，SO(4)群任意元素 R 可表成两矩阵直乘形式

$$\begin{aligned} R &= \exp\left(-\mathrm{i}\sum_{a<b=2}^{4}\omega_{ab}T_{ab}\right) \\ &= \exp\left\{-\mathrm{i}\sum_{a=1}^{3}\left(\omega_a^{(+)}T_a^{(+)} + \omega_a^{(-)}T_a^{(-)}\right)\right\} \\ &= \exp\{-\mathrm{i}\omega^{(+)}\hat{n}^{(+)}\cdot \boldsymbol{T}^{(+)}\}\exp\{-\mathrm{i}\omega^{(-)}\hat{n}^{(-)}\cdot \boldsymbol{T}^{(-)}\} \\ &= N\{u(\hat{n}^{(+)},\omega^{(+)}) \times u(\hat{n}^{(-)},\omega^{(-)})\}N^{-1}. \end{aligned} \tag{8.13}$$

其中

$$\omega_a^{(\pm)} = \sum_{b<c=2}^{3} \epsilon_{abc}\omega_{bc} \pm \omega_{a4} = \omega^{(\pm)} n_a^{(\pm)},$$

$$\omega^{(\pm)} = \left\{ \sum_{a=1}^{3} (\omega_a^{(\pm)})^2 \right\}^{1/2}.$$

这样，R 矩阵明显地表达成两个二维幺模幺正矩阵 u 的乘积. 两个 u 矩阵同时改变符号，R 矩阵保持不变. 因此，(8.13)式给出 SO(4)群元素和两个 SU(2)群元素直乘的一二对应关系，而且这种对应关系对群元素乘积保持不变，故有

$$\mathrm{SO}(4) \sim \mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{SU}(2)'. \tag{8.14}$$

为了在测度非零区域使群空间的参数与群元素有一一对应的关系，可规定SO(4)群参数的变化区域如下：

$$\begin{aligned} &0 \leqslant \omega^{(+)} \leqslant 2\pi, \qquad 0 \leqslant \omega^{(-)} \leqslant \pi, \\ &0 \leqslant \theta^{(\pm)} \leqslant \pi, \qquad -\pi \leqslant \varphi^{(\pm)} \leqslant \pi. \end{aligned} \tag{8.15}$$

其中 $\theta^{(\pm)}$ 和 $\varphi^{(\pm)}$ 是 $\hat{n}^{(\pm)}$ 方向的极角和方位角. 由于一个 SU(2)′群的群空间缩小了一半，它类似于 SO(3)群的群空间，在群空间的边界上直径两端的点对应同一元素，这决定了 SO(4)群的群空间是双连通的.

SO(4)群的不等价不可约表示都可表成两个 SU(2)群不等价不可约表示的直乘，记作 D^{jk}：

$$D^{jk}(\hat{n}^{(+)}, \omega^{(+)}; \hat{n}^{(-)}, \omega^{(-)}) = D^j(\hat{n}^{(+)}, \omega^{(+)}) \times D^k(\hat{n}^{(-)}, \omega^{(-)}). \tag{8.16}$$

D^{jk} 是$(2j+1)(2k+1)$维的，它的行(列)指标用两个字母$(\mu\nu)$共同标记，它的生成元 $I_a^{jk(+)}$ 可由 SU(2)群相应表示生成元 I_a^j 表出：

$$\begin{aligned} I_a^{jk(+)} &= I_a^j \times \mathbf{1}_{2k+1}, \qquad I_a^{jk(-)} = \mathbf{1}_{2j+1} \times I_a^k, \\ I_{ab}^{jk} &= \sum_{c=1}^{3} \epsilon_{abc} (I_c^{jk(+)} + I_c^{jk(-)}) \\ &= \sum_{c=1}^{3} \epsilon_{abc} (I_c^j \times \mathbf{1}_{2k+1} + \mathbf{1}_{2j+1} \times I_c^k), \\ I_{a4}^{jk} &= I_a^{jk(+)} - I_a^{jk(-)} = I_a^j \times \mathbf{1}_{2k+1} - \mathbf{1}_{2j+1} \times I_a^k. \end{aligned} \tag{8.17}$$

当$(j+k)$是整数时，D^{jk} 是 SO(4)群的单值表示，即不可约张量表示，当$(j+k)$是半奇数时，D^{jk} 是 SO(4)群的双值表示，即旋量表示. D^{jk} 与杨图标记的 SO(4)群不可约表示的联系如下：当 $j+k$ 是整数时，

若 $j = k$， 则 $D^{jk} \simeq [2j, 0]$，

若 $j > k$， 则 $D^{jk} \simeq [+(j+k),(j-k)]$ 是自对偶表示，

若 $j < k$， 则 $D^{jk} \simeq [-(j+k),(k-j)]$ 是反自对偶表示，

当 $j+k$ 是半奇数时，

若 $j > k$， 则 $D^{jk} \simeq [+s(j+k-1/2),(j-k-1/2)]$，

若 $j < k$， 则 $D^{jk} \simeq [-s(j+k-1/2),(k-j-1/2)]$.

恒等表示是 D^{00}，自身表示等价于 $D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$，基本旋量表示是 $D^{\frac{1}{2}0} \oplus D^{0\frac{1}{2}}$.

★ 惯性系间的洛伦兹变换矩阵 A 是 4×4 正交矩阵：

$$A^{\mathrm{T}}A = AA^{\mathrm{T}} = \mathbf{1}. \tag{8.18}$$

A 矩阵元素满足如下实数性条件：

$$\left.\begin{array}{l} A_{ab} \text{ 和 } A_{44} \text{ 是实数} \\ A_{a4} \text{ 和 } A_{4a} \text{ 是虚数} \end{array}\right\} \quad a \text{ 和 } b = 1,2,3.$$

这实数性条件在 A 矩阵乘积中保持不变. 所有这样的正交矩阵 A 的集合，按矩阵乘积规则，满足群的四个条件，构成群，称为齐次洛伦兹群，记作 O(3,1)群或 L_h 群. 由正交条件(8.18)得

$$\det A = \pm 1, \qquad A_{44}^2 = 1 + \sum_{a=1}^{3} |A_{a4}|^2 \geqslant 1.$$

这两个不连续条件把 O(3,1)群的群空间分成不相连接的四片，包含恒元的那片满足

$$\det A = 1, \qquad A_{44} \geqslant 1. \tag{8.19}$$

它的集合构成简单李群，称为固有(proper)洛伦兹群，记作 L_p 群. 由于 A_{44} 的绝对值没有上限，L_p 群的群空间是欧氏空间的一个无限开区域，L_p 群是非紧致李群. L_p 群的三个陪集中的代表元素常选空间反演变换 σ，时间反演变换 τ 和全反演变换 ρ：

$$\sigma = \mathrm{diag}(-1,-1,-1,1),$$

$$\tau = \mathrm{diag}(1,1,1,-1),$$

$$\rho = \mathrm{diag}(-1,-1,-1,-1).$$

★ 设 A 是 L_p 群的无穷小元素：

$$A = \mathbf{1} - \mathrm{i}\alpha X, \qquad A^{\mathrm{T}} = \mathbf{1} - \mathrm{i}\alpha X^{\mathrm{T}},$$
$$\mathbf{1} = A^{\mathrm{T}}A = \mathbf{1} - \mathrm{i}\alpha\,(X + X^{\mathrm{T}}), \qquad X^{\mathrm{T}} = -X,$$
$$1 = \det A = 1 - \mathrm{i}\alpha\,\mathrm{tr}X, \qquad \mathrm{tr}X = 0.$$

因此 X 是无迹反对称矩阵，可以按照 SO(4)群自身表示生成元展开：

$$\begin{aligned} A &= \mathbf{1} - \mathrm{i}\sum_{a<b=2}^{3}\omega_{ab}T_{ab} - \mathrm{i}\sum_{a=1}^{3}\omega_{a4}T_{a4} \\ &= \mathbf{1} - \mathrm{i}\sum_{a=1}^{3}\left(\Omega_a T_a^{(+)} + \Omega_a^{*} T_a^{(-)}\right), \end{aligned} \tag{8.20}$$

其中 ω_{ab}是实数，ω_{a4}是虚数，

$$\Omega_a = \sum_{b<c=2}^{3}\epsilon_{abc}\omega_{bc} + \omega_{a4}.$$

除了参数的实数性条件不一样外，SO(4)群和 L_p群自身表示生成元完全相同，结构常数相同，因而两群在对应不可约表示中的生成元也相同. L_p群的有限维不等价不可约表示都可表为$D^{jk}(L_p)$，生成元由(8.17)式给出. 但因参数实数性条件不同，两群的整体性质很不一样，L_p群有限维不可约表示D^{jk}，除了恒等表示外，都不是幺正表示. L_p群可以有无限维幺正表示.

★ 与 T_{ab}相联系的变换显然是转动变换，属于子群 SO(3). 研究与 T_{34}相联系的变换，把参数 ω_{34}简记作 $\mathrm{i}\omega$：

$$A(\boldsymbol{e}_3, \mathrm{i}\omega) \equiv \exp\{-\mathrm{i}(\mathrm{i}\omega)T_{34}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh\omega & -\mathrm{i}\sinh\omega \\ 0 & 0 & \mathrm{i}\sinh\omega & \cosh\omega \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} v = c\tanh\omega, \qquad \cosh\omega &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2}, \\ \sinh\omega &= (v/c)(1 - v^2/c^2)^{-1/2}. \end{aligned} \tag{8.21}$$

它描写沿 z 轴方向相对速度为 $v = c\tanh\omega$ 的洛伦兹变换.

可以把任意固有洛伦兹变换 A ($\det A = 1$ 和 $A_{44} \geq 1$)分解为转动变换和沿 z 轴方向相对运动的洛伦兹变换的乘积. 令 $A_{44} = \cosh\omega$，定出 ω 值. 从 A_{a4}中提出因子 $-\mathrm{i}\sinh\omega$，余下的部分看作三维空间单位矢量 $\hat{n}(\theta, \varphi)$，定出 θ 和 φ 角：

$$
\begin{aligned}
&A_{44} = \cosh\omega, && \mathrm{i}A_{14}/\sinh\omega = \sin\theta\cos\varphi, \\
&\mathrm{i}A_{24}/\sinh\omega = \sin\theta\sin\varphi, && \mathrm{i}A_{34}/\sinh\omega = \cos\theta .
\end{aligned}
\tag{8.22}
$$

把三维空间转动变换扩充为 4×4 矩阵，

$$
R(\boldsymbol{e}_3,\ \varphi)R(\boldsymbol{e}_2,\ \theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi & \cos\varphi\sin\theta & 0 \\ \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi & \sin\varphi\sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

取 $R(\boldsymbol{e}_3,\ \varphi)R(\boldsymbol{e}_2,\ \theta)A(\boldsymbol{e}_3,\mathrm{i}\omega)$的逆矩阵，并左乘到 A 上，得转动变换 $R(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$，

$$
\{R(\boldsymbol{e}_3,\ \varphi)R(\boldsymbol{e}_2,\ \theta)A(\boldsymbol{e}_3,\mathrm{i}\omega)\}^{-1}A = R(\alpha,\ \beta,\ \gamma),
$$

定出转动角 α、β 和 γ，最后得

$$
A = R(\varphi,\ \theta,\ 0)A(\boldsymbol{e}_3,\mathrm{i}\omega)R(\alpha,\ \beta,\ \gamma). \tag{8.23}
$$

这分解的几何意义是十分清楚的．两边的转动变换把变换前后的坐标系的 z 轴都转到相对运动方向，其他轴互相平行，洛伦兹变换 A 就简化为$A(\boldsymbol{e}_3,\mathrm{i}\omega)$．

★　有了 L_p群的不等价不可约表示，再确定陪集代表元素 τ 和ρ 的表示矩阵，就可以知道齐次洛伦兹群 O(3,1)的不等价不可约表示，另一代表元素 σ 可用公式 $\sigma=\tau\rho$计算．因为 ρ 可与O(3,1)群任意元素对易，且平方等于恒元，因此它在不可约表示中只能取常数矩阵，在单值表示中常数为±1．在自身表示中 τ 满足

$$
\tau T_{ab}\tau^{-1} = T_{ab},\qquad \tau T_{a4}\tau^{-1} = -T_{a4},\qquad \tau T_a^{(\pm)}\tau^{-1} = T_a^{(\mp)}.
$$

引入四阶反演群V_4的四个不等价不可约表示 $V^{(\lambda)}$，$\lambda=1,2,3$ 和 4．当 $j=k$ 时，由 L_p群的不可约表示D^{jj}可诱导出 O(3,1)群的四个不等价不可约表示 $\Delta^{jj\lambda}$：

$$
\begin{aligned}
&\Delta^{jj\lambda}(A) = D^{jj}(A), \qquad A\in L_p, \\
&\Delta^{jj\lambda}_{\mu\nu,\ \mu'\nu'}(\tau) = V^{(\lambda)}(\tau)\delta_{\mu\nu'}\delta_{\nu\mu'}, \\
&\Delta^{jj\lambda}(\rho) = V^{(\lambda)}(\rho)\,\mathbf{1}, \qquad 1\leqslant\lambda\leqslant4.
\end{aligned}
\tag{8.24}
$$

当 $j\neq k$，但 $j+k$ 是整数时，由 L_p群的表示$D^{jk}\oplus D^{kj}$诱导出 O(3,1)群的两个不等价不可约表示 $\Delta^{jk\pm}$：

$$\Delta^{jk\pm}(\rho) = \pm 1, \qquad \Delta^{jk\pm}(A) = D^{jk}(A) \oplus D^{kj}(A), \qquad A \in L_p,$$
$$\Delta^{jk\pm}_{\mu\nu\alpha,\mu'\nu'\beta}(\tau) = \delta_{(-\alpha)\beta}\delta_{\mu\nu'}\delta_{\nu\mu'}, \qquad \alpha,\beta = \pm 1. \tag{8.25}$$

其中 α 和 β 用以区分 D^{jk} 和 D^{kj} 两个表示空间. $\Delta^{jk\mp}(\tau)$ 无对角元, 改变它的符号对应等价表示.

当 $j+k$ 是半奇数时, 这里只研究狄拉克旋量表示 $D(\mathrm{O}(3,1))$. 为区别起见, 指标 μ 取 1 至 4, 而指标 a 取 1 至 3. 引入四个反对易的 γ_μ 矩阵和电荷共轭变换矩阵 C:

$$C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^{\mathrm{T}}, \qquad C^\dagger C = 1, \qquad C^{\mathrm{T}} = -C, \qquad \det C = 1.$$

$D(A)$ 矩阵满足

$$D(A)^{-1}\gamma_\mu D(A) = \sum_{\nu=1}^{4} A_{\mu\nu}\gamma_\nu, \qquad \det D(A) = 1,$$
$$C^{-1}D(A)C = \{D(A^{-1})\}^{\mathrm{T}}. \tag{8.26}$$

生成元为

$$I_{\mu\nu} = \frac{-\mathrm{i}}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu). \tag{8.27}$$

L_p 群陪集的代表元素的表示矩阵为

$$D(\sigma) = \pm \mathrm{i}\gamma_4, \qquad D(\tau) = \pm \gamma_4\gamma_5, \qquad D(\rho) = \pm \mathrm{i}\,\gamma_5. \tag{8.28}$$

5. 讨论 SO(4) 群的类并计算它们在不可约表示 D^{jk} 中的特征标.

解 SO(4) 群元素 R 可以通过实正交相似变换 X 化为如下形式:

$$X^{-1}RX = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ 0 & 0 & \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{pmatrix}$$
$$= N\{u(\boldsymbol{e}_3, \varphi_1+\varphi_2) \times u(\boldsymbol{e}_3, \varphi_1-\varphi_2)\}N^{-1},$$
$$u(\boldsymbol{e}_3, \alpha) = \begin{pmatrix} \exp\{-\mathrm{i}\alpha/2\} & 0 \\ 0 & \exp\{\mathrm{i}\alpha/2\} \end{pmatrix},$$

其中用到公式(8.13). 因此, SO(4) 群的类由 φ_1 和 φ_2 来描写, 在表示 $D^{jk}(R)$ 中的特征标为

$$\chi^{jk}(\varphi_1,\varphi_2) = \frac{\sin[(j+1/2)(\varphi_1+\varphi_2)]\sin[(k+1/2)(\varphi_1-\varphi_2)]}{\sin[(\varphi_1+\varphi_2)/2]\sin[(\varphi_1-\varphi_2)/2]}.$$

6. 计算下面固有洛伦兹变换 A 的六个参数：

$$A(\varphi,\theta,\omega,\alpha,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3}/2 & (\cosh\omega)/2 & -\mathrm{i}(\sinh\omega)/2\\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}(\cosh\omega)/2 & -\mathrm{i}\sqrt{3}(\sinh\omega)/2\\ 0 & 0 & \mathrm{i}\sinh\omega & \cosh\omega\end{pmatrix}$$

解　根据矩阵 $A(\varphi,\theta,\omega,\alpha,\beta,\gamma)$的第四列，定出 ω 角就是式中给出的ω，而由 $\sin\theta\cos\varphi=0$，$\sin\theta\sin\varphi=1/2$ 和 $\cos\theta=\sqrt{3}/2$ 定出 $\theta=\pi/6$ 和 $\varphi=\pi/2$. 计算得

$$R(\pi/2,\pi/6,0)=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$R(\pi/2,\pi/6,0)^{-1}=R(\pi/2,\pi/6,0)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

故有

$$A(\boldsymbol{e}_3,\mathrm{i}\omega)^{-1}R(\pi/2,\pi/6,0)^{-1}A(\varphi,\theta,\omega,\alpha,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

由此得 $\alpha=-\pi/2$ 和 $\beta=\gamma=0$.

7. 证明狄拉克旋量表示满足

$$\gamma_4 D(A)^{\dagger}\gamma_4=\frac{A_{44}}{|A_{44}|}D(A)^{-1}.$$

证　狄拉克旋量表示不是幺正表示．本题要研究此表示矩阵的共轭矩阵的性质．

将狄拉克旋量表示的定义式(8.26)两面取共轭：

$$D(A)^{\dagger}\gamma_a D(A^{-1})^{\dagger} = \sum_{b=1}^{3} A_{ab}\gamma_b - A_{a4}\gamma_4,$$

$$D(A)^{\dagger}\gamma_4 D(A^{-1})^{\dagger} = -\sum_{b=1}^{3} A_{4b}\gamma_b + A_{44}\gamma_4.$$

为把上式写成统一的形式，作 γ_4 相似变换：

$$\{\gamma_4 D(A)^{\dagger}\gamma_4\}\gamma_{\mu}\{\gamma_4 D(A)^{\dagger}\gamma_4\}^{-1} = \sum_{\nu=1}^{4} A_{\mu\nu}\gamma_{\nu}.$$

由 γ 矩阵的等价定理知

$$\gamma_4 D(A)^{\dagger}\gamma_4 = cD(A)^{-1}.$$

用(8.28)式代入，不难确定此常数：

$$\gamma_4 D(A)^{\dagger}\gamma_4 = \frac{A_{44}}{|A_{44}|}D(A)^{-1}.$$

这就是在量子场论中用旋量场构造洛伦兹变换的不变量时，必须插入一个 γ_4 矩阵的原因：

$$\bar{\psi}\psi = \psi^{\dagger}\gamma_4\psi.$$

8．试讨论固有洛伦兹群 L_p 的类.

解　由(8.20)式知，除了参数的实数性条件外，SO(4)群和洛伦兹群 L_p 自身表示有相同的生成元. 由(8.13)式，可把转动变换 $R(\alpha,\beta,\gamma)$ 和相对速度沿第三轴的固有洛伦兹变换 $A(\boldsymbol{e}_3, \mathrm{i}\,\omega)$ 表为

$$R(\alpha,\beta,\gamma) = N\{u(\alpha,\beta,\gamma)\times u(\alpha,\beta,\gamma)\}N^{-1},$$
$$A(\boldsymbol{e}_3, \mathrm{i}\omega) = N\{\exp(\omega\sigma_3/2)\times\exp(-\omega\sigma_3/2)\}N^{-1}.$$

因此固有洛伦兹群的任意元素 $A(\varphi,\theta,\omega,\alpha,\beta,\gamma)$ 可表为

$$A(\varphi,\theta,\omega,\alpha,\beta,\gamma) = N\{M\times(\sigma_2 M^{*}\sigma_2)\}N^{-1}, \tag{8.29}$$

其中

$$\begin{aligned} M &= u(\varphi,\theta,0)\exp(\omega\sigma_3/2)u(\alpha,\beta,\gamma), \\ \sigma_2 M^{*}\sigma_2 &= u(\varphi,\theta,0)\exp(-\omega\sigma_3/2)u(\alpha,\beta,\gamma). \end{aligned} \tag{8.30}$$

M 矩阵是一个行列式为 +1 的二维复矩阵，属于二维幺模复矩阵群 SL(2,C). 我们以后再证明，任何一个二维幺模复矩阵 $P\in$ SL(2,C)都可写成如 M 矩阵那样

的乘积形式．从上面的计算可以看到，由任意洛伦兹变换 $A=A(\varphi,\theta,\omega,\alpha,\beta,\gamma)$ 可以计算出一个 $M\in \mathrm{SL}(2,C)$矩阵，反之，(8.30)式的 M 矩阵也完全确定了一个洛伦兹变换A．如果两个 M 和M'矩阵对应同一个A 变换，则

$$N\{M\times(\sigma_2M^*\sigma_2)\}N^{-1}=A=N\{M'\times[\sigma_2(M')^*\sigma_2]\}N^{-1},$$

由此得 $M^{-1}M'=c\mathbf{1}$．由于 M 矩阵行列式为 1，$c^2=1$，$c=\pm 1$．因此我们得到固有洛伦兹群元素 A 与 $\mathrm{SL}(2,C)$群元素 $\pm M$ 之间存在一二对应关系，这种对应关系显然对元素乘积保持不变，因为若

$$A=N\{M\times(\sigma_2M^*\sigma_2)\}N^{-1},\quad A'=N\{M'\times[\sigma_2(M')^*\sigma_2]\}N^{-1},$$

有

$$AA'=N\{MM'\times[\sigma_2(MM')^*\sigma_2]\}N^{-1}.$$

于是我们证明了固有洛伦兹群 L_p 和二维幺模矩阵群 $\mathrm{SL}(2,C)$的一二对应的同态关系，$L_p\sim\mathrm{SL}(2,C)$．这样，我们可以通过研究 $\mathrm{SL}(2,C)$群的类结构来确定 L_p 群的类．注意 $\pm M\in\mathrm{SL}(2,C)$两个矩阵对应同一个固有洛伦兹变换 $A\in L_p$，$\mathrm{SL}(2,C)$群两个类对应 L_p群一个类．下面为简单起见，都只说 L_p群的类．

若 $M\in\mathrm{SL}(2,C)$矩阵的两个本征值不等，则可通过相似变换 $X\in\mathrm{SL}(2,C)$ 对角化

$$X^{-1}MX=\pm\begin{pmatrix}e^{(\omega-i\varphi)/2} & 0\\ 0 & e^{-(\omega-i\varphi)/2}\end{pmatrix}=\pm\, e^{-i(\varphi+i\omega)\sigma_3/2},$$

$$-\pi<\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\omega<\infty. \tag{8.31}$$

$$A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cosh\omega & -i\sinh\omega\\ 0 & 0 & i\sinh\omega & \cosh\omega\end{pmatrix},\quad \begin{array}{l}-\pi<\varphi\leqslant\pi,\\ 0\leqslant\omega<\infty.\end{array}$$

这些类用两个参数 ω 和 φ 描写．

当 M 矩阵的两个本征值相同时，± 1 对应 L_p群的恒元，构成 L_p群一个类，其他元素可通过 $Y\in\mathrm{SL}(2,C)$相似变换化为

$$Y^{-1}MY=\pm\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\pm\exp(-\sigma_1-i\sigma_2),$$

对应 A 的参数是 $\Omega_1=-2i$，$\Omega_2=2$，$\Omega_3=0$，但

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=u(-\pi,\pi/4,0)\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1 & 0\\ 0 & \sqrt{2}-1\end{pmatrix}u(\pi,3\pi/4,0). \tag{8.32}$$

$$\varphi=-\pi,\qquad \theta=\pi/4,\qquad \cosh\omega=3,\qquad \alpha=\pi,\qquad \beta=3\pi/4,\qquad \gamma=0,$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 2i\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & -1 & -2i\\ -2i & 0 & -2i & 3\end{pmatrix}=e^{i2T_{31}-2T_{14}}.$$

容易检验 A 确实是一个固有洛伦兹变换，且四个本征值都是 1. 它只有两个线性无关的本征矢量. A 可通过相似变换 Z 化为若尔当型：

$$Z=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0 & 1\\ 0 & 4i & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad Z^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & i/4\\ 1/2 & 0 & 1/2 & i/2\\ 0 & 0 & 1 & i\end{pmatrix},$$

$$Z^{-1}AZ=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

最后我们来证明，任意一个二维幺模复矩阵 $P\in SL(2,C)$ 都可表为(8.30)式那样的 M 矩阵形式，即

$$P=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=u(\varphi,\theta,0)\begin{pmatrix}e^{\omega/2} & 0\\ 0 & e^{-\omega/2}\end{pmatrix}u(\alpha,\beta,\gamma).$$

$$u(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{pmatrix}\cos(\beta/2)e^{-i(\alpha+\gamma)/2} & -\sin(\beta/2)e^{-i(\alpha-\gamma)/2}\\ \sin(\beta/2)e^{i(\alpha-\gamma)/2} & \cos(\beta/2)e^{i(\alpha+\gamma)/2}\end{pmatrix}.$$

解得

$$A = c_\theta c_\beta e^{\omega/2} e^{-i(\varphi+\alpha+\gamma)/2} - s_\theta s_\beta e^{-\omega/2} e^{-i(\varphi-\alpha+\gamma)/2},$$

$$B = -c_\theta s_\beta e^{\omega/2} e^{-i(\varphi+\alpha-\gamma)/2} - s_\theta c_\beta e^{-\omega/2} e^{-i(\varphi-\alpha-\gamma)/2},$$

$$C = s_\theta c_\beta e^{\omega/2} e^{i(\varphi-\alpha-\gamma)/2} + c_\theta s_\beta e^{-\omega/2} e^{i(\varphi+\alpha-\gamma)/2},$$

$$D = -s_\theta s_\beta e^{\omega/2} e^{i(\varphi-\alpha+\gamma)/2} + c_\theta c_\beta e^{-\omega/2} e^{i(\varphi+\alpha+\gamma)/2},$$

其中 $c_\theta=\cos(\theta/2)$, $s_\theta=\sin(\theta/2)$和 $c_\beta=\cos(\beta/2)$等. 直接计算得

$$|A|^2 = -(\sin\theta\sin\beta\cos\alpha)/2 + c_\theta^2 c_\beta^2 e^{\omega} + s_\theta^2 s_\beta^2 e^{-\omega},$$

$$|B|^2 = (\sin\theta\sin\beta\cos\alpha)/2 + c_\theta^2 s_\beta^2 e^{\omega} + s_\theta^2 c_\beta^2 e^{-\omega},$$

$$|C|^2 = (\sin\theta\sin\beta\cos\alpha)/2 + s_\theta^2 c_\beta^2 e^{\omega} + c_\theta^2 s_\beta^2 e^{-\omega},$$

$$|D|^2 = -(\sin\theta\sin\beta\cos\alpha)/2 + s_\theta^2 s_\beta^2 e^{\omega} + c_\theta^2 c_\beta^2 e^{-\omega},$$

$$AB = e^{-i\varphi}\{-\cos\beta\sin\theta + \sin\beta(-c_\theta^2 e^{\omega} e^{-i\alpha} + s_\theta^2 e^{-\omega} e^{i\alpha})\}/2,$$

$$AC = e^{-i\gamma}\{\cos\theta\sin\beta + \sin\theta(c_\beta^2 e^{\omega} e^{-i\alpha} - s_\beta^2 e^{-\omega} e^{i\alpha})\}/2,$$

$$AD = s_\theta^2 s_\beta^2 + c_\theta^2 c_\beta^2 - s_\theta c_\theta s_\beta c_\beta(e^{\omega} e^{-i\alpha} + e^{-\omega} e^{i\alpha}),$$

$$|A|^2 + |B|^2 + |C|^2 + |D|^2 = e^{\omega} + e^{-\omega},$$

$$|A|^2 + |B|^2 - |C|^2 - |D|^2 = \cos\theta\,(e^{\omega} - e^{-\omega}),$$

$$|A|^2 - |B|^2 + |C|^2 - |D|^2 = \cos\beta\,(e^{\omega} - e^{-\omega}).$$

由后三个公式分别定出 ω, θ 和β, 再由 AD 等公式定出α, 由 AC 和AB 等公式定出γ 和φ. 这里用"等公式"是指能用以计算的公式不止一个. 证完.

举个例子, 计算如下 P 矩阵的参数:

$$P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3}[\sqrt{2}-1-i(\sqrt{2}+1)] & -\sqrt{2}+1-i3(\sqrt{2}+1) \\ \sqrt{2}+1-i3(\sqrt{2}-1) & \sqrt{3}[\sqrt{2}+1+i(\sqrt{2}-1)] \end{pmatrix}.$$

由$|A|^2=|D|^2=9/8$, $|B|^2=(15/8)+\sqrt{2}$和$|C|^2=(15/8)-\sqrt{2}$, 算得

$$\cosh\omega = 3, \qquad \sinh\omega = \sqrt{8}, \qquad e^{\omega} = 3+\sqrt{8}, \qquad e^{-\omega} = 3-\sqrt{8}$$

$$\cos\theta = 1/2, \qquad \theta = \pi/3, \qquad \cos\beta = -1/2, \qquad \beta = 2\pi/3.$$

再由 $AD=3(1-i\sqrt{8})/8$, 得

$$e^{\omega}e^{-i\alpha} + e^{-\omega}e^{i\alpha} = 6\cos\alpha - i4\sqrt{2}\sin\alpha$$

$$= \frac{16}{3}\left\{\frac{3}{8} - AD\right\} = 4\sqrt{2}\mathrm{i}.$$

定出 $\alpha = -\pi/2$. 最后由

$$AB = \frac{\sqrt{3}[-2(3+\sqrt{2})-\mathrm{i}]}{8} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\left\{\frac{\sqrt{3}}{8} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{4}(3-\sqrt{2})\right\},$$

$$AC = \frac{\sqrt{3}[-1-2\mathrm{i}(3-\sqrt{2})]}{8} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma}\left\{\frac{\sqrt{3}}{8} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{4}(3-\sqrt{2})\right\},$$

即 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} = -\mathrm{i}$ 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma} = -1$，定出 $\varphi = \pi/2$ 和 $\gamma = \pi$.

9. 试把固有洛伦兹群 L_p 任意元素表成矩阵的指数函数形式.

解 上题已通过(8.29)式建立 L_p 群任意元素 A 和 SL(2,C)群元素 $\pm M$ 之间的一二对应的同态关系：

$$\pm M = \pm u(\varphi,\theta,0)\,u(\boldsymbol{e}_3,\mathrm{i}\omega)u(\alpha,\beta,\gamma) \to A(\varphi,\theta,\omega,\alpha,\beta,\gamma),$$

$$\pm u(\boldsymbol{e}_3,\alpha) = \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\sigma_3/2} = \pm\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}\end{pmatrix} \to R(\boldsymbol{e}_3,\alpha),$$

$$\pm u(\boldsymbol{e}_2,\beta) = \pm \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta\sigma_2/2} = \pm\begin{pmatrix}\cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2)\\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2)\end{pmatrix} \to R(\boldsymbol{e}_2,\beta),$$

$$\pm u(\boldsymbol{e}_3,\mathrm{i}\omega) = \pm \mathrm{e}^{\omega\sigma_3/2} = \pm\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\omega/2} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\omega/2}\end{pmatrix} \to A(\boldsymbol{e}_3,\mathrm{i}\omega).$$

如果能把 SL(2,C)群任意元素 M 写成矩阵的指数函数形式，就可以通过(8.29)式把固有洛伦兹群 L_p 任意元素 A 也写成矩阵的指数函数形式.

由(8.31)式和(8.32)式，当 M 矩阵的两个本征值不相等或两个本征值都为1时，它可以通过幺模相似变换化为矩阵的指数函数形式. 当它的两个本征值都为 -1 时，虽然 M 矩阵一般只能化为(-1)乘一个矩阵的指数函数，但代入(8.29)式时，这负号被消去了. 因此，把相似变换移到等式右面，我们可以把 SL(2,S)群任意元素 M 表为

$$M = \pm\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2),\qquad \sigma_2 M^* \sigma_2 = \pm\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}^*\cdot\boldsymbol{\sigma}/2).$$

通过(8.29)式，M 矩阵对应的固有洛伦兹变换 A 为

$$A = N\{\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2)\times\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}^*\cdot\boldsymbol{\sigma}/2)\}N^{-1}$$

$$= \exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{T}^{(+)})\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}^{*}\cdot\boldsymbol{T}^{(-)})$$

$$= \exp\left\{-\mathrm{i}\sum_{a=1}^{3}(\Omega_a T_a^{(+)} + \Omega_a^{*} T_a^{(-)})\right\}$$

$$= \exp\left\{-\mathrm{i}\sum_{a<b}\omega_{ab}T_{ab} - \mathrm{i}\sum_{a=1}^{3}\omega_{a4}T_{a4}\right\}.$$

其中 $T_a^{(\pm)}$ 和 T_{ab}，T_{a4} 就是 SO(4)群自身表示的生成元，已在(8.12)式给出，而参数 ω_{ab} 和 ω_{c4} 分别为 Ω_c 的实部和虚部：

$$\omega_{ab} = \frac{1}{2}\sum_{c=1}^{3}\epsilon_{abc}(\Omega_c + \Omega_c^{*}), \qquad \omega_{c4} = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\Omega_c - \Omega_c^{*}).$$

这样，任意洛伦兹变换 A 可表成矩阵的指数函数形式，参数 ω_{ab} 是实数，ω_{a4} 是虚数. 这组参数 $\omega_{\mu\nu}$ 主要供理论研究用，实际计算不太方便. 实际计算中一般仍采用参数$(\varphi,\theta,\omega,\alpha,\beta,\gamma)$. 两组参数的换算通过(8.29)式进行，即

$$M = u(\varphi,\theta,0)u(\boldsymbol{e}_3,\mathrm{i}\omega)u(\alpha,\beta,\gamma) = \exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2).$$

10. 设

$$X = -\mathrm{i}x_4\mathbf{1} + \sum_{a=1}^{3}x_a\sigma_a = \begin{pmatrix} x_3 - \mathrm{i}x_4 & x_1 - \mathrm{i}x_2 \\ x_1 + \mathrm{i}x_2 & -x_3 - \mathrm{i}x_4 \end{pmatrix},$$

其中 x_a 是实数，$x_4 = \mathrm{i}ct$ 是纯虚数，X 是厄米矩阵. 又设 $\det M = 1$，$M \in \mathrm{SL}(2,C)$，

$$MXM^{\dagger} = X' = -\mathrm{i}x'_4\mathbf{1} + \sum_{a=1}^{3}x'_a\sigma_a.$$

(1) 计算 $\mathrm{tr}X$ 和 $\det X$，(2) 证明 $x'_\mu = \sum_\nu A_{\mu\nu}x_\nu$，其中 A 为固有洛伦兹变换，(3) 由此证明 $L_p \sim \mathrm{SL}(2,C)$，(4)当 A 为 $R(\boldsymbol{e}_3,\varphi)$，$R(\boldsymbol{e}_2,\theta)$，和 $A(\boldsymbol{e}_3,\mathrm{i}\omega)$时，分别计算对应的 M 矩阵，(5) 对任意固有洛伦兹变换，写出对应的 M 矩阵.

解 (1) $tr\ \mathrm{X} = -i2\mathrm{x}_4$，$det\ \mathrm{X} = -\sum_{\mu=1}^{4}\mathrm{x}_\mu^2$.

(2) $X' = MXM^{\dagger}$ 是厄米矩阵，可按 **1** 和泡里矩阵展开，系数 x'_a 是实数，x'_4 是纯虚数，且它们都可表为 x_μ 的线性组合，

$$x'_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} A_{\mu\nu} x_\nu, \quad 1 \leqslant \mu \leqslant 4.$$

其中 A_{ab} 和 A_{44} 是实数. A_{4a} 和 A_{a4} 是纯虚数. 又因 $\det X' = \det X$, 即

$$\sum_{\mu=1}^{4} x'^2_\mu = \sum_{\mu=1}^{4} x^2_\mu.$$

所以 A 是洛伦兹变换矩阵, 它是正交矩阵, 矩阵元素依赖于 M 矩阵. 当 $M=\mathbf{1}$ 时, A 是恒元. 由于 SL(2, C)群是简单李群, 当 M 由单位矩阵出发, 在 SL(2, C)群的群空间中, 连续地变到现在的 M 矩阵时, A 也由恒元出发, 在 L_p 群的群空间中, 连续地变到现在的 A 矩阵, 因此 A 属于固有洛伦兹变换.

(3) 由给定的 M 矩阵, 可以计算得 $X'=MXM^\dagger$ 矩阵, 从而惟一地确定一个固有洛伦兹变换矩阵 A. 设由 M 和 M' 计算得的 X' 矩阵(因此 A 矩阵)相同, 则 $M^{-1}M'$ 可与三个 σ_a 矩阵都对易, 因此它必是常数矩阵. 又由行列式为一的条件定出 $M'=\pm M$, 即我们得到 A 和 $\pm M$ 之间的一个对应关系. 此对应关系明显对元素乘积保持不变, 因此 L_p 群和 SL(2, C)群同态, $L_p \sim \mathrm{SL}(2, C)$.

(4) 忽略 M 矩阵前面的正负号, 可把 M 矩阵和 A 矩阵用相同的宗量表达. 当 $A \in$ SO(3)是转动变换时, M 显然取 SU(2)矩阵,

$$M(\boldsymbol{e}_3, \varphi) = u(\boldsymbol{e}_3, \varphi) = \mathbf{1}\cos(\varphi/2) - \mathrm{i}\sigma_3 \sin(\varphi/2),$$

$$M(\boldsymbol{e}_2, \theta) = u(\boldsymbol{e}_2, \theta) = \mathbf{1}\cos(\theta/2) - \mathrm{i}\sigma_2 \sin(\theta/2),$$

一般地有 $M(\alpha, \beta, \gamma) = u(\alpha, \beta, \gamma)$,

$$u(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos(\beta/2)e^{-\mathrm{i}(\alpha+\gamma)/2} & -\sin(\beta/2)e^{-\mathrm{i}(\alpha-\gamma)/2} \\ \sin(\beta/2)e^{\mathrm{i}(\alpha-\gamma)/2} & \cos(\beta/2)e^{\mathrm{i}(\alpha+\gamma)/2} \end{pmatrix},$$

设 $M(\boldsymbol{e}_3, \mathrm{i}\omega) = \mathbf{1}M_0 + \sigma_1 M_1 + \sigma_2 M_2 + \sigma_3 M_3$, 满足

$$M(\boldsymbol{e}_3, \mathrm{i}\omega) X M(\boldsymbol{e}_3, \mathrm{i}\omega)^\dagger = -\mathrm{i}\mathbf{1}(\mathrm{i}x_3 \sinh\omega + x_4 \cosh\omega)$$

$$+ \sigma_3(x_3\cosh\omega - \mathrm{i}x_4\sinh\omega) + \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2,$$

分别让一个坐标分量为 1, 其余分量都为零, 上式变成

$$M(\boldsymbol{e}_3, \mathrm{i}\omega)\sigma_1 M(\boldsymbol{e}_3, \mathrm{i}\omega)^\dagger = \sigma_1,$$

$$M(\boldsymbol{e}_3, \mathrm{i}\omega)\sigma_2 M(\boldsymbol{e}_3, \mathrm{i}\omega)^\dagger = \sigma_2,$$

$$M(\boldsymbol{e}_3, \mathrm{i}\omega)\sigma_3 M(\boldsymbol{e}_3, \mathrm{i}\omega)^\dagger = \mathbf{1}\sinh\omega + \sigma_3\cosh\omega,$$

$$M(\boldsymbol{e}_3, \mathrm{i}\omega) M(\boldsymbol{e}_3, \mathrm{i}\omega)^\dagger = \mathbf{1}\cosh\omega + \sigma_3\sinh\omega.$$

把泡里矩阵移出来，再移到等式右面，由前两式得

$$\{\mathbf{1}M_0 + \sigma_1 M_1 - \sigma_2 M_2 - \sigma_3 M_3\} M^\dagger = \mathbf{1},$$

$$\{\mathbf{1}M_0 - \sigma_1 M_1 + \sigma_2 M_2 - \sigma_3 M_3\} M^\dagger = \mathbf{1}.$$

两式相加减，得 $M_1 = M_2 = 0$，$|M_0|^2 - |M_3|^2 = 1$，和 $M_0 M_3^*$ 是实数. 后两式变成相同的，得 $|M_0|^2 + |M_3|^2 = \cosh\omega$ 和 $2M_0 M_3^* = \sinh\omega$. 注意 $\det M = 1$，略去正负号，解得 $M_0 = \cosh\omega/2$ 和 $M_3 = \sinh\omega/2$，即

$$M(\boldsymbol{e}_3, \mathrm{i}\omega) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\omega/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\omega/2} \end{pmatrix} = u(\boldsymbol{e}_3, \mathrm{i}\omega).$$

(5) 对应任意的固有洛伦兹变换 $A(\varphi, \theta, \omega, \alpha, \beta, \gamma)$，有

$$\pm M(\varphi, \theta, \omega, \alpha, \beta, \gamma) = \pm u(\varphi, \theta, 0) u(e_3, \mathrm{i}\omega) u(\alpha, \beta, \gamma).$$

第九章　李群和李代数

一、半单李代数的分类

★　由李群的结构常数 $C_{AB}{}^{D}$ 定义基灵(Killing)型

$$g_{AB} = \sum_{PQ} C_{AP}{}^{Q} C_{BQ}{}^{P} = -\,\mathrm{tr}(I_A^{\mathrm{ad}} I_B^{\mathrm{ad}}), \tag{9.1}$$

嘉当判据指出，半单李代数的充要条件是基灵型的行列式非零，$\det g \neq 0$. 半单李代数可分解为维数大于一的单纯李代数的直和.

★　对维数大于一的单纯李代数，可以适当选择基(选择李群的参数)，使基灵型是 $g_{AB} = -\delta_{AB}$. 取生成元的嘉当-外尔基 H_j 和 E_α，它们满足

$$[H_j,\ H_k] = 0, \qquad [H_j,\ E_\alpha] = \alpha_j E_\alpha,$$

$$[E_\alpha,\ E_\beta] = \begin{cases} N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}, & \text{当 } \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \text{ 是根}, \\ \sum_j \alpha_j H_j, & \text{当 } \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = 0, \\ 0, & \text{当 } \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \text{ 不是根}, \end{cases} \tag{9.2}$$

其中 l 个 H_j 是单纯李代数中能互相对易的生成元，l 称为李代数的秩，l 维非零实矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 称为李代数的根矢量，简称根. 根所张开的 l 维空间称为根空间. 根正负成对出现，除了正负根外，根矢量互相不平行. 根 $\boldsymbol{\alpha}$ 和生成元 E_α 有一一对应关系. 第一个不为零的分量为正的根矢量称为正根，否则为负根. 有时也把 H_j 称为对应零根的生成元，当然零根是 l 重简并的. 在嘉当-外尔基中，可适当选择参数，使根都是实根，且基灵型满足

$$g_{jk} = -\delta_{jk}, \qquad g_{\alpha\beta} = -\delta_{(-\alpha)\beta}, \qquad g_{j\alpha} = g_{\alpha j} = 0. \tag{9.3}$$

g_{jk} 可用作根空间的度规张量，因此根空间是实欧几里得空间.

★　对于李代数的任意两个非零根 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，可以用 $\boldsymbol{\alpha}$ 多次加或减 $\boldsymbol{\beta}$ 的办法得到根链. 不失普遍性，可设 $\boldsymbol{\alpha} + n\boldsymbol{\beta}$ 是根，其中 $-q_{\alpha\beta} \leqslant n \leqslant p_{\alpha\beta}$，$p_{\alpha\beta}$ 和 $q_{\alpha\beta}$ 是非负整数，而 $\boldsymbol{\alpha} + (p_{\alpha\beta}+1)\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\alpha} - (q_{\alpha\beta}-1)\boldsymbol{\beta}$ 不是根. 可以证明

$$\Gamma(\boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta})/d_\beta = q_{\alpha\beta} - p_{\alpha\beta}, \qquad d_\beta - \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}/2. \tag{9.4}$$

$$N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha,-\beta} = [p_{\alpha\beta}(q_{\alpha\beta}+1)d_\beta]^{1/2}. \tag{9.5}$$

算上零根，同一个根 $\boldsymbol{\alpha}$ 构成的根链只含三个根：$\boldsymbol{\alpha}$，0 和 $-\boldsymbol{\alpha}$.

★　非零根的集合记作Σ，正根的集合记作Σ^+，李代数所有正根之和记作 $2\boldsymbol{\rho}$. 不能表成其他正根的非负整数线性组合的正根称为素根，记作 $\boldsymbol{r}_\mu$. 因此所有正根都可表为素根的非负整数线性组合. 素根之差不是根. l 秩李代数有 l 个素根，且它们线性无关. 两素根间的夹角只能取 $5\pi/6$，$3\pi/4$，$2\pi/3$ 或 $\pi/2$，而且此两素根长度平方之比对应地分别等于 3，2，1 或没有限制.

★　维数大于一的单纯李代数有四个系列的典型李代数（A_l，B_l，C_l 和 D_l）和五个例外李代数（G_2，F_4，E_6，E_7 和 E_8），其中李代数 A_l 对应的李群是 $SU(l+1)$，李代数 B_l 对应的李群是 $SO(2l+1)$，李代数 C_l 对应的李群是 $Sp(2l)$，李代数 D_l 对应的李群是 $SO(2l)$. 用白圈表长度较长的素根，黑圈表长度较短的素根，夹角为 $5\pi/6$，$3\pi/4$ 或 $2\pi/3$ 的两素根分别用三线，双线或单线相联，互相垂直的素根不用线联结，这样构成的图称为邓金(Dynkin)图. 维数大于一的单纯李代数的邓金图如图 9.1 所示.

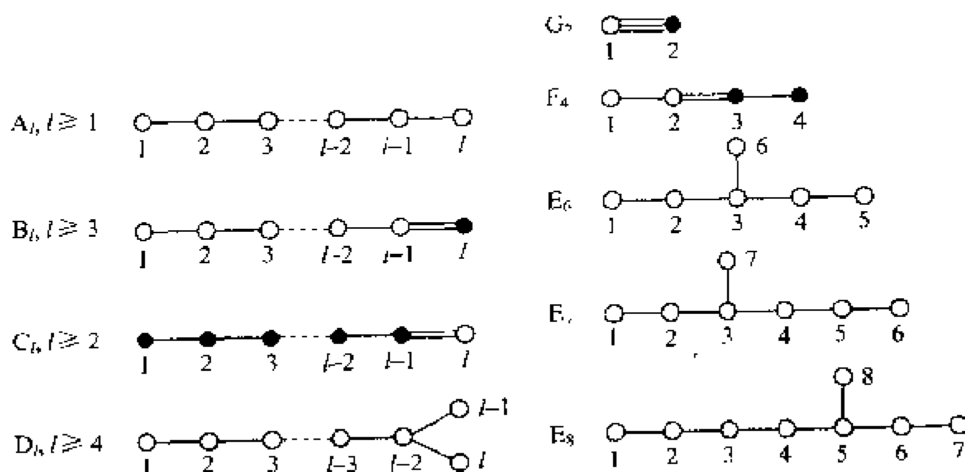


图 9.1　单纯李代数的邓金图

★　单纯李代数也可用嘉当矩阵来描述. l 秩的单纯李代数有 l 个素根 $\boldsymbol{r}_\mu$，定义 l 维矩阵 A：

$$A_{\mu\nu} = \Gamma(\boldsymbol{r}_\nu/\boldsymbol{r}_\mu) = \frac{2\boldsymbol{r}_\nu\cdot\boldsymbol{r}_\mu}{\boldsymbol{r}_\mu\cdot\boldsymbol{r}_\mu} = (\boldsymbol{r}_\nu\cdot\boldsymbol{r}_\mu)/d_\mu. \tag{9.6}$$

它的对角元总是 2，非对角元可取 0，-1，-2 和 -3. 与邓金图相比，当素根 $\boldsymbol{r}_\mu$ 和 $\boldsymbol{r}_\nu$ 没有线相连时，$A_{\mu\nu}=A_{\nu\mu}=0$，当它们有线相连时，若 $\boldsymbol{r}_\mu$ 的长度不小于 $\boldsymbol{r}_\nu$，则 $A_{\mu\nu}=-1$，而 $A_{\nu\mu}=-n$，其中 n 是连线数. 邓金图和嘉当矩阵是一一对应的，它

们都给出了该李代数的全部信息，即素根的夹角和长度比，而且由此可计算出该李代数的全部正根. 计算方法如下.

李代数的正根可表为素根之和，

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{\nu=1}^{l} C_\nu \boldsymbol{r}_\nu, \qquad C_\nu \geqslant 0,$$

而 $\sum_\nu C_\nu$ 称为根 $\boldsymbol{\alpha}$ 的级数. 素根是一级根. 采用递推的方法逐级计算正根. 设 n 级以下的正根已经全部找到，$\boldsymbol{\alpha}$ 是一个 n 级根，要判断 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{r}_\mu$ 是不是根. 计算

$$q - p = \Gamma(\boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{r}_\mu) = \sum_{\nu=1}^{l} A_{\mu\nu} C_\nu. \tag{9.7}$$

因为 n 级以下的根都已经找到，q 为已知，所以由(9.7)式可算出 p，从而定出 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{r}_\mu$ 是不是根.

1. 由根 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 组成的根链 $\boldsymbol{\alpha}+n\boldsymbol{\beta}$，$-q\leqslant n\leqslant p$，根链长度为 $p+q+1$. 证明单纯李代数的根链长度不大于 4.

证 用反证法. 设根链长度大于四，则可重新定义根 $\boldsymbol{\alpha}$，使下面五个矢量都是非零根：

$$\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}.$$

显然下面四个矢量不是根：

$$(\boldsymbol{\alpha}\pm 2\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\alpha} = 2(\boldsymbol{\alpha}\pm\boldsymbol{\beta}), \quad (\boldsymbol{\alpha}\pm 2\boldsymbol{\beta})-\boldsymbol{\alpha} = \pm 2\boldsymbol{\beta}.$$

因此，

$$0 = \Gamma[(\boldsymbol{\alpha}\pm 2\boldsymbol{\beta})/\boldsymbol{\alpha}] = d_\alpha^{-1}(\boldsymbol{\alpha}\pm 2\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\alpha} = 2\pm 2(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\alpha})/d_\alpha.$$

两式相加，得到矛盾的结果. 证完.

因为 $q_{\alpha\beta}+p_{\alpha\beta}+1\leqslant 4$，所以 $q_{\alpha\beta}$ 和 $p_{\alpha\beta}$ 都不大于 3，即 $\Gamma(\boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{\beta}) = q_{\alpha\beta}-p_{\alpha\beta}$ 的绝对值不大于 3.

2. 试证明素根之差不是根，l 秩李代数有 l 个素根，且它们线性无关.

证 先用反证法证明素根之差不是根. 设两素根之差是根 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{r}_\mu-\boldsymbol{r}_\nu=\boldsymbol{\alpha}$，若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是正根，则素根 $\boldsymbol{r}_\mu$ 表成两正根之和 $\boldsymbol{r}_\nu+\boldsymbol{\alpha}$，若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是负根，则 $\boldsymbol{r}_\nu$ 表成两正根之和 $\boldsymbol{r}_\mu+(-\boldsymbol{\alpha})$，都与素根的定义矛盾. 因此，

$$\Gamma(\boldsymbol{r}_\mu/\boldsymbol{r}_\nu) = -p_{\mu\nu} \leqslant 0.$$

素根之间的夹角不是锐角. 素根数目显然不能小于 l，否则它们不能组合出全部

正根. 现在用反证法证明素根线性无关. 设素根间存在线性关系, 不失普遍性, 把负系数的项移到等式另一边, 得

$$\boldsymbol{a} = \sum_{\mu} c_\mu \boldsymbol{r}_\mu = \sum_{\nu} d_\nu \boldsymbol{r}_\nu ,$$

其中 c_μ 和 d_ν 都是正数, 且 μ 和 ν 互不相等. 由于 $\boldsymbol{a} \neq 0$,

$$0 < \boldsymbol{a}^2 = \sum_{\mu\nu} c_\mu d_\nu \boldsymbol{r}_\mu \cdot \boldsymbol{r}_\nu \leqslant 0.$$

矛盾.

3. 证明两素根间的夹角只能取 $5\pi/6$, $3\pi/4$, $2\pi/3$ 或 $\pi/2$, 而且此两素根长度平方比对应地分别等于 3、2、1 或没有限制.

证 计算素根夹角余弦的平方:

$$4\cos^2\theta = \frac{4(\boldsymbol{r}_\mu \cdot \boldsymbol{r}_\nu)^2}{(\boldsymbol{r}_\mu \cdot \boldsymbol{r}_\mu)(\boldsymbol{r}_\nu \cdot \boldsymbol{r}_\nu)} = \Gamma(\boldsymbol{r}_\mu/\boldsymbol{r}_\nu)\Gamma(\boldsymbol{r}_\nu/\boldsymbol{r}_\mu) = \text{整数}.$$

由于余弦的取值范围, 此整数只能取 3、2、1 或 0, 因而夹角 θ 取值分别为 $5\pi/6$, $3\pi/4$, $2\pi/3$ 或 $\pi/2$. 不失普遍性, 设素根 $\boldsymbol{r}_\mu$ 长度不小于素根 $\boldsymbol{r}_\nu$ 的长度,

$$-\Gamma(\boldsymbol{r}_\mu/\boldsymbol{r}_\nu) \geqslant -\Gamma(\boldsymbol{r}_\nu/\boldsymbol{r}_\mu).$$

这两个非正整数的乘积等于 3、2、1 或 0, 只能 $\Gamma(\boldsymbol{r}_\nu/\boldsymbol{r}_\mu)$ 等于 -1 或 0, $\Gamma(\boldsymbol{r}_\mu/\boldsymbol{r}_\nu)$ 等于 -3、-2、-1 或 0. 而这两个数之比正是两素根长度平方之比, 即

$$\frac{\boldsymbol{r}_\mu^2}{\boldsymbol{r}_\nu^2} = \frac{\Gamma(\boldsymbol{r}_\mu/\boldsymbol{r}_\nu)}{\Gamma(\boldsymbol{r}_\nu/\boldsymbol{r}_\mu)} = 3, 2, 1, \text{或任意}.$$

两素根垂直时, 它们的长度之比没有限制.

4. 试计算 E_6 李代数的嘉当矩阵.

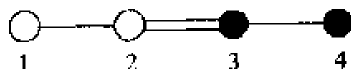
解 E_6 李代数的嘉当矩阵是一个六阶矩阵, 对角元为 2. 按照它的邓金图上的编号, 只有如下行列的非对角元为 -1: 12, 23, 34, 36 和 45, 其余为零:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5．已知某单纯李代数的嘉当矩阵如下，试画出它的邓金图，并注上编号．

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-1&2&-1&0\\0&-2&2&-1\\0&0&-1&2\end{pmatrix},\quad A_{\mu\nu}=\Gamma[\boldsymbol{r}_\nu/\boldsymbol{r}_\mu]=\frac{2\,\boldsymbol{r}_\nu\cdot\boldsymbol{r}_\mu}{\boldsymbol{r}_\mu\cdot\boldsymbol{r}_\mu}$$

解　嘉当矩阵的3行2列为 -2，可见邓金图中素根2和3间有双线相联，且素根2是长根，对应白圈，素根3是短根，对应黑圈．嘉当矩阵的12和34行列的矩阵元素是 -1，可见邓金图中素根1和2间和素根3和4间有单线联结，且素根1和素根2同是长根，用白圈，素根4和素根3同是短根，用黑圈．因此这是 F_4 李代数，邓金图如下：



6．试计算 C_2 代数的全部正根．

解　C_2 代数有两个素根，常取为

$$\boldsymbol{r}_1=\sqrt{1/2}(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2),\qquad \boldsymbol{r}_2=\sqrt{2}\boldsymbol{e}_2.$$

C_2 代数的嘉当矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}2&-2\\-1&2\end{pmatrix}.$$

先确定 $\boldsymbol{r}_1+p_1\boldsymbol{r}_2$ 是不是根．由(9.7)式，

$$p_1=-\Gamma(\boldsymbol{r}_1/\boldsymbol{r}_2)=-A_{21}=1.$$

因此 $\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2=\sqrt{1/2}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$ 是根，而 $\boldsymbol{r}_1+2\boldsymbol{r}_2$ 不是根．这是惟一的二级根．再算 $(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)+p_2\boldsymbol{r}_1$ 是不是根，

$$p_2=1-A_{11}-A_{12}=1.$$

因此 $2\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2=\sqrt{2}\boldsymbol{e}_1$ 是惟一的三级根，而 $3\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2$ 不是根．因为 $(2\boldsymbol{r}_1+2\boldsymbol{r}_2)$ 是根 $\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_1$ 的两倍，显然不是根．因此 C_2 代数有四个正根，四个负根，两个零根，阶为10．本题算出了 C_2 代数的根用直角坐标系的基矢量 $\boldsymbol{e}_j$ 表出的形式，这结果可以推

广到 C_l 代数根的一般形式，它们是 $\pm\sqrt{2}e_j$，$\pm\sqrt{1/2}(e_j+e_k)$ 和 $\sqrt{1/2}(e_j-e_k)$.

7. 试计算 B_3 代数的全部正根.

解 B_3 代数有三个素根，常取为

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2,\qquad \boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3,\qquad \boldsymbol{r}_3=\boldsymbol{e}_3.$$

B_3 代数的嘉当矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-2&2\end{pmatrix}.$$

先确定 $\boldsymbol{r}_1+p_1\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_1+p_2\boldsymbol{r}_3$，$\boldsymbol{r}_2+p_3\boldsymbol{r}_3$ 是不是根. 由(9.7)式，

$$p_1=-A_{21}=1,\qquad p_2=-A_{31}=0,\qquad p_3=-A_{32}=2,$$

因而有两个二级根 $\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2$ 和 $\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3$，而且知 $\boldsymbol{r}_2+2\boldsymbol{r}_3$ 也是根，$\boldsymbol{r}_1+2\boldsymbol{r}_2$ 和 $\boldsymbol{r}_2+3\boldsymbol{r}_3$ 不是根. 现在来确定 $(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)+p_4\boldsymbol{r}_1$，$(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)+p_5\boldsymbol{r}_3$，$(\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3)+p_6\boldsymbol{r}_1$ 和 $(\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3)+p_7\boldsymbol{r}_2$ 是不是根.

$$p_4=1-A_{11}-A_{12}=0,\qquad p_5=-A_{31}-A_{32}=2,$$

$$p_6=-A_{12}-A_{13}=1,\qquad p_7=1-A_{22}-A_{23}=0.$$

因而除了前面给出的三级根 $\boldsymbol{r}_2+2\boldsymbol{r}_3$ 外，还有一个三级根 $\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3$. 在四级根中，已知 $\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+2\boldsymbol{r}_3$ 是根，三级根 $\boldsymbol{r}_2+2\boldsymbol{r}_3$ 加 $\boldsymbol{r}_2$ 或 $\boldsymbol{r}_3$ 都不是根，加 $\boldsymbol{r}_1$ 已知是根. 三级根 $\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3$ 加 $\boldsymbol{r}_1$ 不是根，加 $\boldsymbol{r}_3$ 已知是根，现在来确定 $(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3)+p_8\boldsymbol{r}_2$ 是不是根. 注意 $\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_3$ 不是根，得

$$p_8=-A_{21}-A_{22}-A_{23}=0.$$

这样，$\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+2\boldsymbol{r}_3$ 是惟一的四级根，已知它加 $\boldsymbol{r}_3$ 不是根，要计算它加 $p_9\boldsymbol{r}_1$ 和加 $p_{10}\boldsymbol{r}_2$ 是不是根：

$$p_9=1-A_{11}-A_{12}-2A_{13}=0,$$

$$p_{10}=-A_{21}-A_{22}-2A_{23}=1.$$

得惟一的五级根 $\boldsymbol{r}_1+2\boldsymbol{r}_2+2\boldsymbol{r}_3$，已知它加 $\boldsymbol{r}_2$ 不是根，加 $\boldsymbol{r}_1$ 是已知根的两倍，因而不是根，要计算它加 $p_{11}\boldsymbol{r}_3$ 是不是根：

$$p_{11} = -A_{31} - 2A_{32} - 2A_{33} = 0.$$

没有六级根.

小结一下，B_3代数有三个一级根，即三个素根 $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3$和 $\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{e}_3$，两个二级根 $\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3$和 $\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{e}_2$，两个三级根 $\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{e}_1$和 $\boldsymbol{r}_2 + 2\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$，一个四级根 $\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + 2\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$，和一个五级根 $\boldsymbol{r}_1 + 2\boldsymbol{r}_2 + 2\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$，因此$B_3$代数的秩为 3，阶为 21. 本题算出了$B_3$代数的根用直角坐标系的基矢量$\boldsymbol{e}_j$表出的形式，这结果可以推广到$B_l$代数根的一般形式，它们是 $\pm\boldsymbol{e}_j$，$\pm(\boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_k)$和$(\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_k)$.

8. 试计算D_4代数的全部正根.

解 D_4代数有四个素根，常取为

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_3,$$

$$\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{e}_4, \quad \boldsymbol{r}_4 = \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4.$$

D_4代数的嘉当矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

先确定 $\boldsymbol{r}_1 + p_1\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_1 + p_2\boldsymbol{r}_3$，$\boldsymbol{r}_1 + p_3\boldsymbol{r}_4$，$\boldsymbol{r}_2 + p_4\boldsymbol{r}_3$，$\boldsymbol{r}_2 + p_5\boldsymbol{r}_4$，和 $\boldsymbol{r}_3 + p_6\boldsymbol{r}_4$是不是根. 由(9.7)式，

$$p_1 = -A_{21} = 1, \qquad p_2 = -A_{31} = 0, \qquad p_3 = -A_{41} = 0,$$

$$p_4 = -A_{32} = 1, \qquad p_5 = -A_{42} = 1, \qquad p_6 = -A_{43} = 0.$$

因而有三个二级根 $\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_4$，和 $\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_4 = \boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_4$，已知它们分别加 $\boldsymbol{r}_2$、$\boldsymbol{r}_3$和 $\boldsymbol{r}_4$不是根. 现在计算 $\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + p_7\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + p_8\boldsymbol{r}_3$，$\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + p_9\boldsymbol{r}_4$，$\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 + p_{10}\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 + p_{11}\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 + p_{12}\boldsymbol{r}_4$，$\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_4 + p_{13}\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_4 + p_{14}\boldsymbol{r}_2$和 $\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_4 + p_{15}\boldsymbol{r}_3$是不是根：

$$p_7 = 1 - A_{11} - A_{21} = 0, \qquad p_8 = -A_{31} - A_{32} = 1,$$

$$p_9 = -A_{41} - A_{42} = 1, \qquad p_{10} = -A_{12} - A_{13} = 1,$$

$$p_{11} = 1 - A_{22} - A_{23} = 0, \quad p_{12} = - A_{42} - A_{43} = 1,$$

$$p_{13} = - A_{12} - A_{14} = 1, \quad p_{14} = 1 - A_{22} - A_{24} = 0,$$

$$p_{15} = - A_{32} - A_{34} = 1.$$

其中有些是重复的，共有三个三级根，$\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_4$，$\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_4 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_4$，$\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_4 = \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3$，在它们基础上加某些素根已经知道不是根，要计算 $\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 + p_{16}\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 + p_{17}\boldsymbol{r}_4$，$\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_4 + p_{18}\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_4 + p_{19}\boldsymbol{r}_3$，$\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_4 + p_{20}\boldsymbol{r}_1$和 $\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_4 + p_{21}\boldsymbol{r}_2$是不是根：

$$p_{16} = - A_{21} - A_{22} - A_{23} = 0, \qquad p_{17} = A_{41} - A_{42} - A_{43} = 1,$$

$$p_{18} = - A_{21} - A_{22} - A_{24} = 0, \qquad p_{19} = A_{31} - A_{32} - A_{34} = 1,$$

$$p_{20} = - A_{12} - A_{13} - A_{14} = 1, \qquad p_{21} = - A_{22} - A_{23} - A_{24} = 0.$$

只有一个四级根 $\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_4 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3$. 已经知道在四级根上加 $\boldsymbol{r}_1$、$\boldsymbol{r}_3$和 $\boldsymbol{r}_4$不是根，现计算加 $p_{22}\boldsymbol{r}_2$是不是根.

$$p_{22} = - A_{21} - A_{22} - A_{23} - A_{24} = 1.$$

只有一个五级根，$\boldsymbol{r}_1 + 2\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{r}_4 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$. 在五级根上加 $\boldsymbol{r}_2$不是根，现计算加 $p_{23}\boldsymbol{r}_1$、$p_{24}\boldsymbol{r}_3$和 $p_{25}\boldsymbol{r}_4$是不是根.

$$p_{23} = - A_{11} - 2A_{12} - A_{13} - A_{14} = 0,$$

$$p_{24} = - A_{31} - 2A_{32} - A_{33} - A_{34} = 0,$$

$$p_{25} = - A_{41} - 2A_{42} - A_{43} - A_{44} = 0.$$

这样，D_4代数有四个一级根，三个二级根，三个三级根，一个四级根和一个五级根，因此 D_4代数的秩为 4，阶为 28. 本题算出了 D_4代数的根用直角坐标系的基矢量 $\boldsymbol{e}_j$表出的形式，这结果可以推广到 D_l代数根的一般形式，它们是 $\pm(\boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_k)$和 $(\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_k)$.

二、不可约表示和谢瓦莱基

★ 在一个不可约表示的表示空间中，取 H_j的共同本征状态 $|\boldsymbol{m}\rangle$作为基，本征值构成的 l 维空间的矢量称为权矢量，简称权：

$$H_j |\boldsymbol{m}\rangle = m_j |\boldsymbol{m}\rangle. \tag{9.8}$$

对应同一个权 $\boldsymbol{m}$ 的线性无关的状态数可能多于一个，这样的权称为重权，否则称为单权. 由(9.2)式得

$$E_{\alpha}|\boldsymbol{m}\rangle \sim |\boldsymbol{m}+\boldsymbol{\alpha}\rangle.$$

正根 $\boldsymbol{\alpha}$ 对应的生成元E_{α}称为升权算符，而 $E_{-\alpha}$称为降权算符. 在给定的不可约表示中，对于任意给定的权 $\boldsymbol{m}$ 和根$\boldsymbol{\alpha}$，可以得到一个有限长的权链：

$$\begin{gathered}\boldsymbol{m}+n\boldsymbol{\alpha},\ -q \leqslant n \leqslant p,\quad \text{是权},\\ \boldsymbol{m}+(p+1)\boldsymbol{\alpha}\ \text{和}\ \boldsymbol{m}-(q+1)\boldsymbol{\alpha}\ \text{不是权}.\end{gathered} \tag{9.9}$$

可以证明，

$$\Gamma(\boldsymbol{m}/\boldsymbol{\alpha}) = q - p = \text{整数}, \tag{9.10}$$

而且权 $\boldsymbol{m}$ 和权 $\boldsymbol{m}-\boldsymbol{\alpha}\Gamma(\boldsymbol{m}/\boldsymbol{\alpha})$的重数相同，它们通过关于过原点垂直根 $\boldsymbol{\alpha}$ 的平面的反射相联系. 这样的两个权称为等价权，这样的反射称为外尔(Weyl)反射，通过外尔反射相联系的所有等价权称为外尔轨道，等价权的数目称为外尔轨道长度.

由于(9.10)式，在权空间中可以定义基本主权 $\boldsymbol{w}_{\mu}$，满足

$$\Gamma(\boldsymbol{w}_{\mu}/\boldsymbol{r}_{\nu}) = (\boldsymbol{w}_{\mu}\cdot\boldsymbol{r}_{\nu})/d_{\nu} = \delta_{\mu\nu}. \tag{9.11}$$

与(9.6)式相比较，基本主权 $\boldsymbol{w}_{\mu}$与素根$\boldsymbol{r}_{\nu}$可通过嘉当矩阵相联系

$$\boldsymbol{r}_{\nu} = \sum_{\mu=1}^{l}\boldsymbol{w}_{\mu}A_{\mu\nu},\quad \boldsymbol{w}_{\mu} = \sum_{\nu=1}^{l}\boldsymbol{r}_{\nu}(A^{-1})_{\nu\mu}. \tag{9.12}$$

采用基本主权作为基特别方便，因为在基本主权的表象里，根和权的所有分量都是整数.

★　把嘉当-外尔基 H_j和E_{α}作适当组合，可得谢瓦莱基 H_{μ}，E_{μ}和F_{μ}：

$$\begin{gathered}H_{\mu} = d_{\mu}^{-1}\sum_{j=1}^{l}(\boldsymbol{r}_{\mu})_j\quad H_j,\\ E_{\mu} = d_{\mu}^{-1/2}E_{\boldsymbol{r}_{\mu}},\quad F_{\mu} = d_{\mu}^{-1/2}E_{-\boldsymbol{r}_{\mu}}.\end{gathered} \tag{9.13}$$

它们满足

$$\begin{gathered}[H_{\mu},H_{\nu}] = 0,\qquad [H_{\mu},E_{\nu}] = A_{\mu\nu}E_{\nu},\\ [H_{\mu},F_{\nu}] = -A_{\mu\nu}E_{\nu},\qquad [E_{\mu},F_{\nu}] = \delta_{\mu\nu}H_{\mu}.\end{gathered} \tag{9.14}$$

此外还有塞尔(Serre)关系：

$$\underbrace{[E_\mu,[E_\mu,\cdots[E_\mu}_{1-A_{\mu\nu}},E_\nu]\cdots]]=0,$$

$$\underbrace{[F_\mu,[F_\mu,\cdots[F_\mu}_{1-A_{\mu\nu}},F_\nu]\cdots]]=0. \tag{9.15}$$

对应非素根的生成元 E_α 可由谢瓦莱基的李乘积(对易关系)得到. 特别注意，有相同 μ 的三个谢瓦莱基 H_μ、E_μ 和 F_μ，就像 SU(2)代数的生成元 $2T_3$、T_+ 和 T_- 一样，满足 SU(2)代数的对易关系

$$[H_\mu,E_\mu]=2E_\mu,\qquad [H_\mu,F_\mu]=-2F_\mu,\qquad [E_\mu,F_\mu]=H_\mu.$$

选用谢瓦莱基后，权分量正是以基本主权为基所得的分量:

$$H_\mu|\boldsymbol{m}\rangle=m_\mu|\boldsymbol{m}\rangle,\qquad m_\mu=\Gamma(\boldsymbol{m}/\boldsymbol{r}_\mu). \tag{9.16}$$

m_μ 是整数，而且由权 $\boldsymbol{m}$ 通过素根 $\boldsymbol{r}_\mu$ 得到的等价权为

$$\boldsymbol{m}-\boldsymbol{r}_\mu\Gamma(\boldsymbol{m}/\boldsymbol{r}_\mu)=\boldsymbol{m}-m_\mu\boldsymbol{r}_\mu. \tag{9.17}$$

E_μ 是升权算符，F_μ 是降权算符. 由于表示是有限维的，每一个不可约表示都有一个最高权态 $|\boldsymbol{M}\rangle$:

$$H_\mu|\boldsymbol{M}\rangle=M_\mu|\boldsymbol{M}\rangle,\quad E_\mu|\boldsymbol{M}\rangle=0. \tag{9.18}$$

最高权必是单权，表示中的所有权都由降权算符作用在最高权上得到:

$$\boldsymbol{m}=\boldsymbol{M}-\sum_\mu c_\mu\boldsymbol{r}_\mu,\qquad C_{\boldsymbol{m}}=\sum_\mu c_\mu. \tag{9.19}$$

$C_{\boldsymbol{m}}$ 称为权 $\boldsymbol{m}$ 的高度，最高权的高度为零. 常用最高权标记该不可约表示.

分量都是非负整数的权称为主权. 由于(9.10)式，最高权一定是主权，每个主权都是某一个不可约表示的最高权. 以基本主权作为最高权的表示称为基本表示. 另一方面，在给定的不可约表示中可以包含若干个主权. 把每一个主权的重数乘上它的外尔轨道长度，相加起来，就得到该表示的维数. 因此在计算给定不可约表示时，确定该表示包含哪些主权及其重数十分重要. 最高权的重数为一，从最高权通过单一的方式用降权算符 F_μ 作用得到的主权也必是单权，而能通过不同方式降下来的主权则一般是重权，重数一般等于此不同方式数.

另一方面，在一个不可约表示中，状态的权都分属各权链. 不失普遍性，可通过重新定义权 $\boldsymbol{m}$，把(9.9)式的权链表为

$$\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}-\boldsymbol{r}_\mu,\cdots,\boldsymbol{m}-q\boldsymbol{r}_\mu, \tag{9.20}$$

其中 $q=m_\mu$，根 $\boldsymbol{\alpha}$ 改取素根 $\boldsymbol{r}_\mu$. 如果它们都是单权，则它们对应的状态构成由 H_μ、E_μ 和 F_μ 构成的 SU(2)子代数(记作 $\mathscr{A}_\mu$)的一个 $q+1$ 重态. 在此多重态中 F_μ

的矩阵元是

$$F_\mu\,|\boldsymbol{m}-n\boldsymbol{r}_\mu\rangle=\sqrt{(q-n)(n+1)}\,|\boldsymbol{m}-(n+1)\boldsymbol{r}_\mu\rangle,\quad 0\leqslant n<q. \tag{9.21}$$

当存在重权时，构成多重态的状态则要根据对易关系(9.14)或状态正交归一的条件计算适当的线性组合.

★　实际计算中，可用方块权图方法计算不可约表示的状态基和生成元的矩阵形式，具体步骤如下. 每一个状态基对应一个方块，填入对应的权，重权时用序指标加以区分. 最高权态对应的方块排在最上面一行，以后随高度增加逐行排列这些方块. 从最高权出发，每见到权含有正分量，就按(9.20)式建立一个多重态. 每出现一个主权，就确定它的重数，并按(9.17)式计算所有等价权，它们的重数相同. 如果多重态中都是单权，则用(9.21)式计算降权算符 F_μ 的矩阵元，如有重权，则用(9.14)式或状态正交归一的条件计算相应状态的线性组合，同时算出降权算符 F_μ 的矩阵元. 升权算符 E_μ 的矩阵是降权算符 F_μ 矩阵的转置. H_μ 的矩阵元已由(9.16)式给出. 按此方式计算下去，直至新产生的权中没有正分量出现为止. 最后画成的方块权图成纺锤形，即各高度所包含的状态数随高度增加，先增加后减少，上下对称. 通过方块权图方法还可计算两不可约表示的直乘分解问题，具体方法见下面习题. 对二秩李代数，也可用平面权图来表明各权及其对应的态，平面坐标取 H_j 的本征值. 因为伴随表示的权和李代数的根对应相等，画出伴随表示的权图也是计算李代数全部根的一种方法.

9.　画出 C_2 李代数的两个基本表示(1,0)，(0,1)和伴随表示(2,0)的方块权图和平面权图.

解　C_2 李代数的嘉当矩阵 A，逆嘉当矩阵 A^{-1}，素根及其与基本主权的关系如下：

$$A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix},\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1/2 & 1\end{pmatrix},$$

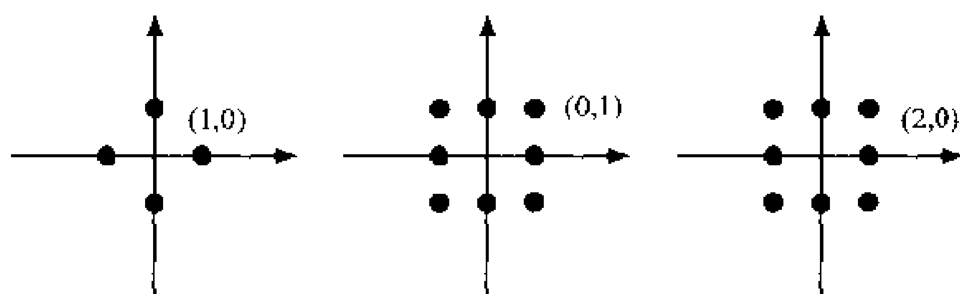
$$\boldsymbol{r}_1=(\sqrt{1/2},\,-\sqrt{1/2})=2\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w}_2,$$

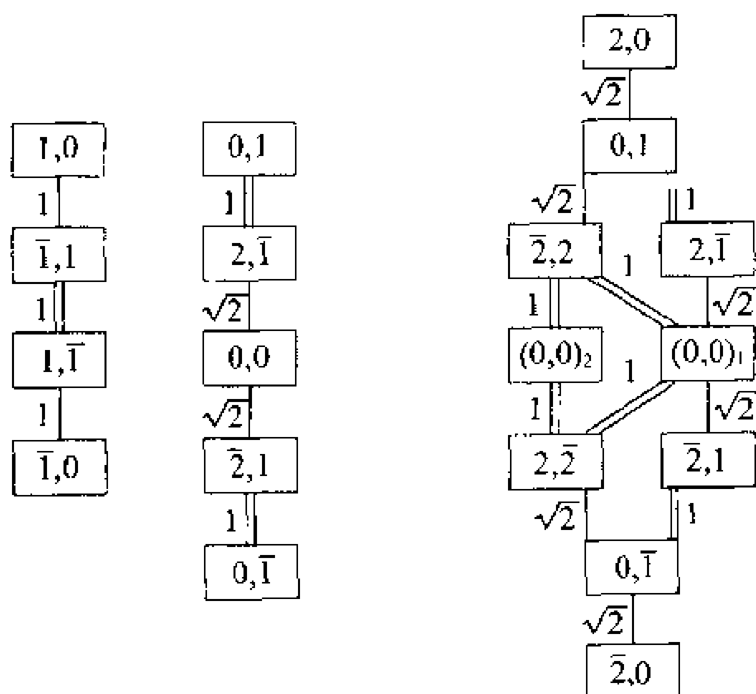
$$\boldsymbol{r}_2=(0,\sqrt{2})=-2\boldsymbol{w}_1+2\boldsymbol{w}_2,$$

$$\boldsymbol{w}_1=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2/2=(\sqrt{1/2},\,0),$$

$$\boldsymbol{w}_2=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2=(\sqrt{1/2},\,\sqrt{1/2}).$$

由此可画出 C_2 李代数的表示(1,0)、(0,1)、(2,0)的平面权图和方块权图





从伴随表示的权图中可以看出，C_2李代数包含四个正根：

$$2\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{r}_1, \quad -2\boldsymbol{w}_1 + 2\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{r}_2,$$

$$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2, \quad 2\boldsymbol{w}_1 = 2\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2.$$

10. 计算 C_2李代数直乘表示$(1,0)\times(1,0)$分解的克莱布施-戈登级数和克莱布施-戈登系数.

解 组合前后的态分别记作$|\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}\rangle$和$\|\boldsymbol{M},\boldsymbol{m}\rangle$，其中$\boldsymbol{\mu}$和$\boldsymbol{\nu}$是表示$(1,0)$的权矢量，$\boldsymbol{M}$是克莱布施-戈登级数中出现的表示(最高权)，$\boldsymbol{m}$是表示$M$中的权矢量. 在降权算符作用下，

$$F_a \|\boldsymbol{M},\boldsymbol{m}\rangle = \sum_{m'} D^{\boldsymbol{M}}_{m'm}(F_a)\|\boldsymbol{M},\ \boldsymbol{m}'\rangle,$$

$$F_a|\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}\rangle = \sum_{\boldsymbol{\nu}'} D^{(1,0)}_{\boldsymbol{\nu}'\boldsymbol{\nu}}(F_a)|\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}'\rangle + \sum_{\boldsymbol{\mu}'} D^{(1,0)}_{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\mu}}(F_a)|\boldsymbol{\mu}',\boldsymbol{\nu}\rangle.$$

乘积空间的最高权为(2,0)，可见在克莱布施-戈登级数中有表示(2,0)，它的最高权态为

$$\|(2,0),(2,0)\rangle = |(1,0),(1,0)\rangle.$$

(2,0)的等价权都是单权，它们有

$$(2,0)\leftrightarrow(\bar{2},2)\leftrightarrow(2,\bar{2})\leftrightarrow(\bar{2},0).$$

用降权算符作用，得

$$\|(2,0),(0,1)\rangle = \sqrt{1/2}F_1\|(2,0),(2,0)\rangle$$

$$= \sqrt{1/2}\{|(1,0),(\bar{1},1)\rangle + |(\bar{1},1),(1,0)\rangle\}.$$

(0,1)是主权，在乘积空间中，(0,1)是二重权，但在表示(2,0)中它是单权，可见在克莱布施-戈登级数中有一个表示(0,1)，根据正交性，可得它的最高权态是

$$|(0,1),(0,1)\rangle = \sqrt{1/2}\{|(1,0),(\bar{1},1)\rangle - |(\bar{1},1),(1,0)\rangle\}.$$

此式也可由升权算符作用为零的条件得到. (0,1)的等价权有

$$(0,1)\leftrightarrow(2,\bar{1})\leftrightarrow(\bar{2},1)\leftrightarrow(0,\bar{1}).$$

继续用降权算符作用，得

$$\|(2,0),(\bar{2},2)\rangle = \sqrt{1/2}F_1\|(2,0),(0,1)\rangle = |(\bar{1},1),(\bar{1},1)\rangle,$$

$$\|(2,0),(2,\bar{1})\rangle = F_2\|(2,0),(0,1)\rangle$$

$$= \sqrt{1/2}\{|(1,0),(1,\bar{1})\rangle + |(1,\bar{1}),(1,0)\rangle\},$$

下面有两种方法得到权(0,0)，因而可能是二重权. 按 $\mathscr{A}_1$ 子代数的多重态来区分两个态，$(0,0)_1$属三重态，$(0,0)_2$属单态：

$$\|(2,0),(0,0)_1\rangle = \sqrt{1/2}F_1\|(2,0),(2,\bar{1})\rangle$$

$$= (1/2)\{|(1,0),(\bar{1},0)\rangle + |(\bar{1},1),(1,\bar{1})\rangle + |(1,\bar{1}),(\bar{1},1)\rangle$$

$$+ |(\bar{1},0),(1,0)\rangle\},$$

$$F_2\|(2,0),(\bar{2},2)\rangle = |(\bar{1},1),(1,\bar{1})\rangle + |(1,\bar{1}),(\bar{1},1)\rangle$$

$$= \sqrt{2}\{a_1\|(2,0),(0,0)_1\rangle + a_2\|(2,0),(0,0)_2\rangle\}.$$

有两个办法计算系数 a_1 和 a_2，一是利用波函数的正交性，二是应用算符对易关系. 计算 $F_2\|(2,0),(\bar{2},2)\rangle$ 与 $\|(2,0),(0,0)_1\rangle$ 的内积，得 $\sqrt{2}a_1=1$，因此，$a_2=\sqrt{1-1/2}=\sqrt{1/2}$，

$$F_2\|(2,0),(2,2)\rangle=\|(2,0),(0,0)_1\rangle+\|(2,0),(0,0)_2\rangle,$$

$$\|(2,0),(0,0)_2\rangle=(1/2)\{-|(1,0),(\bar{1},0)\rangle+|(\bar{1},1),(1,\bar{1})\rangle$$
$$+|(1,\bar{1}),(\bar{1},1)\rangle-|(\bar{1},0),(1,0)\rangle\}.$$

也可用算符对易关系计算：

$$E_1F_2\|(2,0),(2,2)\rangle=2a_1\|(2,0),(2,\bar{1})\rangle$$
$$=F_2E_1\|(2,0),(\bar{2},2)\rangle=\sqrt{2}F_2\|(2,0),(0,1)\rangle=\sqrt{2}\|(2,0),(2,\bar{1})\rangle.$$

算得相同结果.

(0,0)也是主权. 在表示(2,0)中，(0,0)是二重权，我们已经知道在表示(0,1)中(0,0)是单权. 但在乘积空间，(0,0)是4重权，可见在克莱布施-戈登级数中存在一个表示(0,0)，它是一维表示，我们在后面再计算它的状态的展开式. 先计算表示(2,0)其余状态的展开式.

$$\|(2,0),(\bar{2},1)\rangle=\sqrt{1/2}F_1\|(2,0),(0,0)_1\rangle$$
$$=\sqrt{1/2}\{|(\bar{1},1),(\bar{1},0)\rangle+|(\bar{1},0),(\bar{1},1)\rangle\},$$

$$F_2\|(2,0),(0,0)_1\rangle=|(\bar{1},1),(\bar{1},\bar{1})\rangle=\|(2,0),(\bar{2},\bar{2})\rangle,$$

$$\|(2,0),(0,\bar{1})\rangle=\sqrt{1/2}F_1\|(2,0),(2,\bar{2})\rangle$$
$$=\sqrt{1/2}\{|(1,\bar{1}),(\bar{1},0)\rangle-|(\bar{1},0),(1,\bar{1})\rangle\},$$

$$\|(2,0),(\bar{2},0)\rangle=\sqrt{1/2}F_1\|(2,0),(0,\bar{1})\rangle=|(\bar{1},0),(\bar{1},0)\rangle.$$

此外，还可算得

$$F_2\|(2,0),(0,0)_2\rangle=\|(2,0),(2,\bar{2})\rangle,$$
$$F_2\|(2,0),(\bar{2},1)\rangle=\|(2,0),(0,\bar{1})\rangle.$$

现在计算表示(0,1)中态的展开式.

$$\|(0,1),(2,\bar{1})\rangle=F_2\|(0,1),(0,1)\rangle$$
$$=\sqrt{1/2}\{|(1,0),(1,\bar{1})\rangle-|(1,\bar{1}),(1,0)\rangle\},$$

$$\|(0,1),(0,0)\rangle=\sqrt{1/2}F_1\|(0,1),(2,\bar{1})\rangle$$
$$=(1/2)\{|(1,0),(\bar{1},0)\rangle+|(\bar{1},1),(1,\bar{1})\rangle$$
$$-|(1,\bar{1}),(\bar{1},1)\rangle-|(\bar{1},0),(1,0)\rangle\},$$

$$\|(0,1),(2,1)\rangle=\sqrt{1/2}F_1\|(0,1),(0,0)\rangle$$
$$=\sqrt{1/2}\{|(\bar{1},1),(\bar{1},0)\rangle-|(\bar{1},0),(\bar{1},1)\rangle\},$$

$$\|(0,1),(0,\bar{1})\rangle=F_2\|(0,1),(\bar{2},1)\rangle$$
$$=\sqrt{1/2}\{|(1,\bar{1}),(\bar{1},0)\rangle-|(\bar{1},0),(1,\bar{1})\rangle\}.$$

表示(0,0)的态的展开式，可由与前面三个权为(0,0)的态正交的条件得到，但这里我们用升权算符作用为零的条件来计算．设

$$\|(0,0),(0,0)\rangle=a|(1,0),(\bar{1},0)\rangle+b|(\bar{1},1),(1,\bar{1})\rangle$$
$$+c|(1,\bar{1}),(\bar{1},1)\rangle+d|(\bar{1},0),(1,0)\rangle.$$

分别用 E_1和 E_2作用得

$$E_1\|(0,0),(0,0)\rangle=a|(1,0),(1,\bar{1})\rangle+b|(1,0),(1,\bar{1})\rangle$$
$$+c|(1,\bar{1}),(1,0)\rangle+d|(1,\bar{1}),(1,0)\rangle=0,$$

$$E_2\|(0,0),(0,0)\rangle=b|(\bar{1},1),(\bar{1},1)\rangle+c|(\bar{1},1),(\bar{1},1)\rangle=0.$$

得 $a=-b=c=-d$，归一化后得

$$\|(0,0),(0,0)\rangle=(1/2)\{|(1,0),(\bar{1},0)\rangle-|(\bar{1},1),(1,\bar{1})\rangle$$
$$+|(1,\bar{1}),(\bar{1},1)\rangle-|(\bar{1},0),(1,0)\rangle\}.$$

可以验证，它与前面三个权为(0,0)的态是正交的．

最后，C_2李代数直乘表示$(1,0)\times(1,0)$分解的克莱布施-戈登级数和相应表示的维数如下：

$$(1,0)\times(1,0)\simeq(2,0)\oplus(0,1)\oplus(0,0),$$
$$4\times4=16=10+5+1,$$

其中表示(2,0)中的态展开式关于乘积表示交换是对称的，而表示(0,1)和表示(0,0)的态是反对称的．

11． 计算 C_2李代数直乘表示$(0,1)\times(0,1)$分解的克莱布施-戈登级数和克莱布

施-戈登系数.

解 组合前后的态仍分别记作$|\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}\rangle$和$\|\boldsymbol{M},\boldsymbol{m}\rangle$. 其中$\boldsymbol{\mu}$和$\boldsymbol{\nu}$是表示(0,1)的权矢量，$\boldsymbol{M}$是克莱布施-戈登级数中出现的表示(最高权)，$\boldsymbol{m}$是表示$M$中的权矢量. 乘积空间的最高权为(0,2)，可见在克莱布施-戈登级数中有表示(0,2)，它的最高权态为

$$\|(0,2),(0,2)\rangle=|(0,1),(0,1)\rangle.$$

(0,2)的等价权都是单权，它们有

$$(0,2)\leftrightarrow(4,\bar{2})\leftrightarrow(4,2)\leftrightarrow(0,\bar{2}).$$

用降权算符作用，得

$$\begin{aligned}\|(0,2),(2,0)\rangle&=\sqrt{1/2}F_2\|(0,2),(0,2)\rangle\\&=\sqrt{1/2}\{|(0,1),(2,\bar{1})\rangle+|(2,\bar{1}),(0,1)\rangle\}.\end{aligned}$$

(2,0)是主权，在乘积空间中，(2,0)是二重权，但在表示(0,2)中它是单权，可见在克莱布施-戈登级数中有一个表示(2,0)，根据正交性，可得它的最高权态是

$$\|(2,0),(2,0)\rangle=\sqrt{1/2}\{|(0,1),(2,\bar{1})\rangle-|(2,\bar{1}),(0,1)\rangle\}.$$

此式也可用升权算符作用为零的条件来计算. (2,0)的等价权上题已计算过. 继续用降权算符作用，得

$$\|(0,2),(4,\bar{2})\rangle=\sqrt{1/2}F_2\|(0,2),(2,0)\rangle=|(2,\bar{1}),(2,\bar{1})\rangle,$$

$$\begin{aligned}\|(0,2),(0,1)\rangle&=\sqrt{1/2}F_1\|(0,2),(2,0)\rangle\\&=\sqrt{1/2}\{|(0,1),(0,0)\rangle+|(0,0),(0,1)\rangle\}.\end{aligned}$$

(0,1)也是主权，它的等价权也在上题计算过. 在乘积空间中，(0,1)是二重权，在表示(0,2)和表示(2,0)中它都是单权，可见在克莱布施-戈登级数中不出现表示(0,1).

$$\begin{aligned}\|(0,2),(\bar{2},2)\rangle&=\sqrt{1/2}F_1\|(0,2),(0,1)\rangle\\&=\sqrt{1/2}\{|(0,1),(\bar{2},1)\rangle+|(\bar{2},1),(0,1)\rangle\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|(0,2),(2,\bar{1})\rangle&=(1/2)F_1\|(0,2),(4,\bar{2})\rangle\\&=\sqrt{1/2}\{|(2,\bar{1}),(0,0)\rangle+|(0,0),(2,\bar{1})\rangle\},\end{aligned}$$

$$\|(0,2),(2,\bar{1})\rangle=F_2\|(0,2),(0,1)\rangle$$

$$=\sqrt{1/2}\{|(2,1),(0,0)\rangle+|(0,0),(2,\bar{1})\rangle\}.$$

把降权算符 F_1 作用到态 $\|(0,2),(2,\bar{1})\rangle$ 上和把降权算符 F_2 作用到态 $\|(0,2),(\bar{2},2)\rangle$ 上都得到权为(0,0)的态，因此在表示(0,2)中(0,0)可能是二重权. 按照李代数 $\mathscr{A}_1$ 的多重态来定义此两个态，即态 $(0,0)_1$ 属五重态，态 $(0,0)_2$ 只能属单态.

$$\|(0,2),(0,0)_1\rangle=\sqrt{1/6}F_1\|(0,2),(2,\bar{1})\rangle$$
$$=\sqrt{1/6}\{|(2,1),(\bar{2},1)\rangle+2|(0,0),(0,0)\rangle+|(\bar{2},1),(2,\bar{1})\rangle\},$$

$$F_2|(0,2),(\bar{2},2)\rangle=\sqrt{1/2}\{|(0,1),(0,\bar{1})\rangle+|(2,\bar{1}),(\bar{2},1)\rangle+|(\bar{2},1),(2,\bar{1})\rangle+|(0,\bar{1}),(0,1)\rangle\}$$
$$=\sqrt{2}\{a_1\|(2,0),(0,0)_1\rangle+a_2\|(2,0),(0,0)_2\rangle\}.$$

用波函数正交的方法，计算 $F_2\|(0,2),(\bar{2},2)\rangle$ 与 $\|(0,2),(0,0)_1\rangle$ 的内积，得 $\sqrt{2}a_1=\sqrt{1/3}$，因此，$a_2=\sqrt{1-1/6}=\sqrt{5/6}$，

$$F_2\|(0,2),(\bar{2},2)\rangle=\sqrt{1/3}\|(0,2),(0,0)_1\rangle+\sqrt{5/3}\|(0,2),(0,0)_2\rangle,$$

$$\|(0,2),(0,0)_2\rangle=\sqrt{3/5}\{F_2\|(0,2),(\bar{2},2)\rangle-\sqrt{1/3}\|(0,2),(0,0)_1\rangle\}$$
$$=\sqrt{1/30}\{3|(0,1),(0,\bar{1})\rangle+2|(2,\bar{1}),(\bar{2},1)\rangle$$
$$-2|(0,0),(0,0)\rangle+2|(\bar{2},1),(2,\bar{1})\rangle+3|(0,\bar{1}),(0,1)\rangle\}.$$

如用算符对易关系的方法，有

$$E_1F_2\|(0,2),(\bar{2},2)\rangle=2\sqrt{3}a_1\|(0,2),(2,\bar{1})\rangle$$
$$=F_2E_1\|(0,2),(\bar{2},2)\rangle=\sqrt{2}F_2\|(0,2),(0,1)\rangle=\sqrt{2}\|(0,2),(2,\bar{1})\rangle,$$

算得同样结果.

(0,0)是主权. 在表示(0,2)和表示(2,0)中，(0,0)都是二重权，但在乘积空间，(0,0)是5重权，可见在克莱布施-戈登级数中存在一个表示(0,0)，它是一维表示，我们在后面再计算它的状态的展开式. 先计算表示(0,2)其余状态的展开式.

$$\|(0,2),(\bar{2},1)\rangle=\sqrt{1/6}F_1\|(0,2),(0,0)_1\rangle$$

$=\sqrt{1/2}\{|(0,0),(\bar{2},1)\rangle+|(\bar{2},1),(0,0)\rangle\}$,

$\|(0,2),(\bar{4},2)\rangle=(1/2)F_1\|(0,2),(\bar{2},1)\rangle=|(2,1),(\bar{2},1)\rangle$,

$F_2\|(0,2),(0,0)_2\rangle=\sqrt{5/6}\{|(2,\bar{1}),(0,\bar{1})\rangle+|(0,\bar{1}),(2,\bar{1})\rangle\}$

$=\sqrt{5/3}\|(0,2),(2,\bar{2})\rangle$,

$\|(0,2),(2,\bar{2})\rangle=\sqrt{1/2}\{|(2,\bar{1}),(0,\bar{1})\rangle+|(0,\bar{1}),(2,\bar{1})\rangle\}$,

$\|(0,2),(0,\bar{1})\rangle=\sqrt{1/2}F_1\|(0,2),(2,\bar{2})\rangle$

$=\sqrt{1/2}\{|(0,0),(0,\bar{1})\rangle+|(0,\bar{1}),(0,0)\rangle\}$,

$\|(0,2),(\bar{2},0)\rangle=\sqrt{1/2}F_1\|(0,2),(0,\bar{1})\rangle$

$=\sqrt{1/2}\{|(\bar{2},1),(0,\bar{1})\rangle+|(0,\bar{1}),(\bar{2},1)\rangle\}$,

$\|(0,2),(0,\bar{2})\rangle=\sqrt{1/2}F_2\|(0,2),(\bar{2},0)\rangle=|(0,\bar{1}),(0,\bar{1})\rangle$.

此外，还可算得

$$F_2\|(0,2),(0,0)_1\rangle=\sqrt{1/3}\|(0,2),(2,\bar{2})\rangle,$$

$$F_2\|(0,2),(\bar{2},1)\rangle=\|(0,2),(0,\bar{1})\rangle,$$

$$F_2\|(0,2),(\bar{4},2)\rangle=\sqrt{2}\|(0,2),(\bar{2},0)\rangle.$$

根据上面计算，可以画出表示(0,2)的平面权图和方块权图.

现在计算表示(2,0)中态的展开式. 由最高权态出发，

$\|(2,0),(0,1)\rangle=\sqrt{1/2}F_1\|(2,0),(2,0)\rangle$

$=\sqrt{1/2}\{|(0,1),(0,0)\rangle-|(0,0),(0,1)\rangle\}$,

$\|(2,0),(\bar{2},2)\rangle=\sqrt{1/2}F_1\|(2,0),(0,1)\rangle$

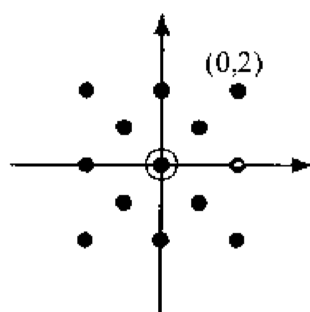
$=\sqrt{1/2}\{|(0,1),(\bar{2},1)\rangle-|(\bar{2},1),(0,1)\rangle\}$,

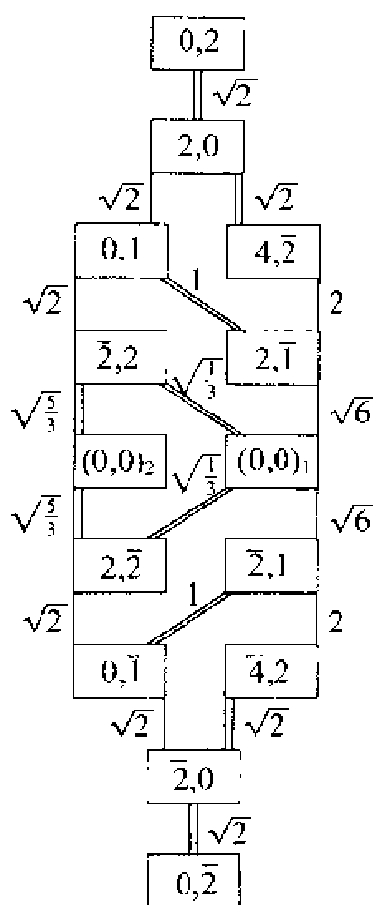
$\|(2,0),(2,\bar{1})\rangle=F_2\|(2,0),(0,1)\rangle$

$=\sqrt{1/2}\{|(2,\bar{1}),(0,0)\rangle-|(0,0),(2,\bar{1})\rangle\}$,

$\|(2,0),(0,0)_1\rangle=\sqrt{1/2}F_1\|(2,0),(2,\bar{1})\rangle$

$=\sqrt{1/2}\{|(2,\bar{1}),(\bar{2},1)\rangle-|(\bar{2},1),(2,\bar{1})\rangle\}$,





$$\|(2,0),(\bar{2},1)\rangle=\sqrt{1/2}F_1\|(2,0),(0,0)_1\rangle$$

$$=\sqrt{1/2}\{|(0,0),(\bar{2},1)\rangle-|(\bar{2},1),(0,0)\rangle\},$$

$$\|(2,0),(0,0)_2\rangle=F_2\|(2,0),(\bar{2},2)\rangle-\|(2,0),(0,0)_1\rangle$$

$$=\sqrt{1/2}\{|(0,1),(0,\bar{1})\rangle-|(0,\bar{1}),(0,1)\rangle\},$$

$$\|(2,0),(2,\bar{2})\rangle=F_2\|(2,0),(0,0)_2\rangle$$

$$=\sqrt{1/2}\{|(2,\bar{1}),(0,\bar{1})\rangle-|(0,1),(2,\bar{1})\rangle\},$$

$$\|(2,0),(0,\bar{1})\rangle=\sqrt{1/2}F_1\|(2,0),(2,\bar{2})\rangle$$

$$=\sqrt{1/2}\{|(0,0),(0,\bar{1})\rangle-|(0,\bar{1}),(0,0)\rangle\},$$

$$\|(2,0),(2,0)\rangle=\sqrt{1/2}F_1\|(2,0),(0,\bar{1})\rangle$$

$$=\sqrt{1/2}\{|(\bar{2},1),(0,\bar{1})\rangle-|(0,\bar{1}),(\bar{2},1)\rangle\}.$$

表示(0,0)的态的展开式，可用与前面四个权为(0,0)的态正交的条件得到，

现在我们用升权算符作用为零的条件来计算. 设

$$\|(0,0),(0,0)\rangle = a|(0,1),(0,\bar{1})\rangle + b|(2,\bar{1}),(\bar{2},1)\rangle + c|(0,0),(0,0)\rangle$$
$$+ d|(\bar{2},1),(2,\bar{1})\rangle + e|(0,\bar{1}),(0,1)\rangle.$$

用 E_1 和 E_2 作用得零的条件得

$$E_1\|(0,0),(0,0)\rangle = \sqrt{2}b|(2,\bar{1}),(0,0)\rangle + \sqrt{2}c|(2,\bar{1}),(0,0)\rangle$$
$$+\sqrt{2}\,c|(0,0),(2,\bar{1})\rangle + \sqrt{2}d|(0,0),(2,\bar{1})\rangle = 0,$$

$$E_2\,|(0,0),(0,0)\rangle = a|(0,1),(\bar{2},1)\rangle + b|(0,1),(\bar{2},1)\rangle$$
$$+ d|(\bar{2},1),(0,1)\rangle + e|(\bar{2},1),(0,1)\rangle = 0.$$

解得 $a = -b = c = -d = e$, 归一化后得

$$\|(0,0),(0,0)\rangle = \sqrt{1/5}\{|(0,1),(0,\bar{1})\rangle - |(2,1),(\bar{2},1)\rangle$$
$$+ |(0,0),(0,0)\rangle - |(\bar{2},1),(2,\bar{1})\rangle + |(0,\bar{1}),(0,1)\rangle\}.$$

可以验证, 它与前面四个权为(0,0)的态是正交的.

最后, C_2李代数直乘表示(0,1)×(0,1)分解的克莱布施-戈登级数和相应表示的维数如下:

$$(0,1)\times(0,1) \simeq (0,2)\oplus(2,0)\oplus(0,0),$$
$$5\times 5 = 25 = 14 + 10 + 1,$$

其中表示(0,2)和表示(0,0)中的态展开式关于乘积表示交换是对称的, 而表示(2,0)的态是反对称的.

12. C_l李代数的素根还可以用 l 维空间对称分布的 $(l+1)$ 个基 $\boldsymbol{V}_j$ 表出:

$$\sum_{j=1}^{l+1}\boldsymbol{V}_j = 0, \qquad \boldsymbol{V}_j\cdot\boldsymbol{V}_k = \frac{\delta_{jk}}{2} - \frac{1}{2(l+1)},$$
$$\boldsymbol{r}_\mu = \boldsymbol{V}_\mu - \boldsymbol{V}_{\mu+1}, \quad 1\leqslant\mu\leqslant(l-1),$$
$$\boldsymbol{r}_l = 2\boldsymbol{V}_l - \frac{2}{l}(\sqrt{l+1}-1)\boldsymbol{V}_{l+1}.$$

试计算 C_l代数的基本主权 $\boldsymbol{w}_j$ 和全部根矢量. 注意第 6 题已给出了 C_l代数的根用直角坐标系的基矢量 $\boldsymbol{e}_j$ 表出的形式, 它们是 $\pm\sqrt{2}\boldsymbol{e}_j$, $\pm\sqrt{1/2}(\boldsymbol{e}_j+\boldsymbol{e}_k)$和 $\sqrt{1/2}(\boldsymbol{e}_j-\boldsymbol{e}_k)$.

解　C_l代数的A^{-1}矩阵为

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\1&2&2&\cdots&2&2\\1&2&3&\cdots&3&3\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&2&3&\cdots&l-1&l-1\\1/2&1&3/2&\cdots&(l-1)/2&l/2\end{pmatrix},$$

由它可算得

$$\begin{aligned}w_\mu&=\sum_{k=1}^{\mu}k\boldsymbol{r}_k+\sum_{k=\mu+1}^{l-1}\mu\,\boldsymbol{r}_k+\mu\,\boldsymbol{r}_l/2\\&=\sum_{k=1}^{\mu}\boldsymbol{V}_k-\frac{\mu}{l}(\sqrt{l+1}-1)\boldsymbol{V}_{l+1},\qquad 1\leqslant\mu\leqslant l-1,\\w_l&=\sum_{k=1}^{l-1}k\quad\boldsymbol{r}_k+l\quad\boldsymbol{r}_l/2\\&=\sum_{k=1}^{l}\boldsymbol{V}_k-(\sqrt{l+1}-1)\boldsymbol{V}_{l+1}=-\sqrt{l+1}\boldsymbol{V}_{l+1}.\end{aligned}$$

C_l李代数的阶为$l(2l+1)$，共有$2l^2$个根，表为

$$\begin{aligned}\pm\sqrt{1/2}(\boldsymbol{e}_j-\boldsymbol{e}_k)&=\pm\sum_{n=j}^{k-1}\boldsymbol{r}_n=\pm(\boldsymbol{V}_j-\boldsymbol{V}_k),\\\pm\sqrt{1/2}(\boldsymbol{e}_j+\boldsymbol{e}_k)&=\pm\left\{\sum_{n=j}^{k-1}\quad\boldsymbol{r}_n+2\sum_{n=k}^{l-1}\quad\boldsymbol{r}_n+\boldsymbol{r}_l\right\}\\&=\pm\left\{\boldsymbol{V}_j+\boldsymbol{V}_k-\frac{2}{l}(\sqrt{l-1}-1)\boldsymbol{V}_{l+1}\right\},\\\pm\sqrt{2}\boldsymbol{e}_j&=\pm2\sum_{n=j}^{l-1}\quad\boldsymbol{r}_n+\boldsymbol{r}_l\\&=\pm2\left\{\boldsymbol{V}_j-\frac{1}{l}(\sqrt{l+1}-1)\boldsymbol{V}_{l-1}\right\}.\end{aligned}$$

13.　计算G_2李代数直乘表示$(1,0)\times(1,0)$分解的克莱布施-戈登级数，其中各有关表示维数，外尔轨道长度(OS)和包含各主权重数列于下表.

表示	维数	OS	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(0,2)	(1,1)	(0,3)	(2,0)
(0,0)	1	1	1						
(0,1)	7	6	1	1					
(1,0)	14	6	2	1	1				
(0,2)	27	6	3	2	1	1			
(1,1)	64	12	4	4	2	2	1		
(0,3)	77	6	5	4	3	2	1	1	
(2,0)	77	6	5	3	3	2	1	1	1

解　G_2李代数的嘉当矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

因此，素根 $\boldsymbol{r}_j$ 关于基本主权 $\boldsymbol{w}_j$ 的展开式为

$$\boldsymbol{r}_1 = 2\boldsymbol{w}_1 - 3\boldsymbol{w}_2, \qquad \boldsymbol{r}_2 = -\boldsymbol{w}_1 + 2\boldsymbol{w}_2.$$

在 G_2 表示(1,0)中，包含 12 个单权和一个二重权(0,0)，其中 6 个单权与主权(1，0)等价，它们是

$$(1,0), \quad (\bar{1},3), \quad (2,\bar{3}), \quad (\bar{2},3), \quad (1,\bar{3}), \quad (\bar{1},0),$$

另 6 个单权与主权(0,1)等价，它们是

$$(0,1), \quad (1,\bar{1}), \quad (\bar{1},2), \quad (1,\bar{2}), \quad (\bar{1},1), \quad (0,\bar{1}).$$

由此可算出，在乘积空间(1,0)×(1,0)中，各主权的重数和状态的乘积如下. 注意状态相乘的次序可以交换.

主权	重数	状态的乘积
(2,0)	1	$(1,0)\times(1,0)$
(0,3)	2	$(1,0)\times(\bar{1},3)$
(1,1)	2	$(1,0)\times(0,1)$
(0,2)	5	$(0,1)\times(0,1),(1,0)\times(\bar{1},2),(\bar{1},3)\times(1,\bar{1})$
(1,0)	8	$(1,0)\times(0,0)_1,(1,0)\times(0,0)_2,$ $(\bar{1},3)\times(2,\bar{3}),(0,1)\times(1,\bar{1})$
(0,1)	10	$(0,1)\times(0,0)_1,(0,1)\times(0,0)_2,(1,0)\times(\bar{1},1),$ $(\bar{1},3)\times(1,\bar{2}),(1,\bar{1})\times(\bar{1},2)$
(0,0)	16	12 个单权都正负成对出现. 二重权(0,0)产生四个(0,0)态.

状态总数是

$$1\times 6+2\times 6+2\times 12+5\times 6+8\times 6+10\times 6+16\times 1=196.$$

在直乘表示(1,0)×(1,0)分解的克莱布施-戈登级数中，有一个(2,0)表示．因为在表示(2,0)中(0,3)是单权，而在乘积空间中(0,3)是二重权，所以在克莱布施-戈登级数中有一个表示(0,3)．因为在表示(2,0)和(0,3)中(1,1)都是单权，而在乘积空间中(1,1)是二重权，所以在克莱布施-戈登级数中不包含表示(1,1)．因为在表示(2,0)和(0,3)中(0,2)都是二重权，而在乘积空间中(0,2)是5重权，所以在克莱布施-戈登级数中有一个表示(0,2)．因为在表示(2,0)和(0,3)中(1,0)都是3重权，在表示(0,2)中(1,0)是单权，而在乘积空间中(1,0)是8重权，所以在克莱布施-戈登级数中有一个表示(1,0)．因为在表示(2,0)，(0,3)，(0,2)和(1,0)中，权(0,1)的重数分别是3，4，2和1，而在乘积空间中(0,1)是10重权，所以在克莱布施-戈登级数中不包含表示(0,1)．因为在表示(2,0)，(0,3)，(0,2)和(1,0)中，权(0,0)的重数分别是5、5，3和2，而在乘积空间中权(0,0)是16重权，所以在克莱布施-戈登级数中有一个表示(0,0)．因此，G_2李代数直乘表示(1,0)×(1,0)分解的克莱布施-戈登级数和相应表示的维数如下：

$$(1,0)\times(1,0)\simeq(2,0)\oplus(0,3)\oplus(0,2)\oplus(1,0)\oplus(0,0),$$

$$14\times 14=196=77+77+27+14+1.$$

14. 计算F_4李代数直乘表示(0,0,0,1)×(0,0,0,1)分解的克莱布施-戈登级数，其中各有关表示维数，外尔轨道长度(OS)和包含各主权重数列于下表．

表示	维数	OS	(0,0,0,0)	(0,0,0,1)	(1,0,0,0)	(0,0,1,0)	(0,0,0,2)
(0,0,0,0)	1	1	1				
(0,0,0,1)	26	24	2	1			
(1,0,0,0)	52	24	4	1	1		
(0,0,1,0)	273	96	9	5	2	1	
(0,0,0,2)	324	24	12	5	3	1	1

解　F_4李代数的嘉当矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{pmatrix},$$

因此，素根 r_j 关于基本主权 w_j 的展开式为

$$r_1 = 2w_1 - w_2, \qquad r_2 = -w_1 + 2w_2 - 2w_3,$$

$$r_3 = -w_2 + 2w_2 - w_4, \quad r_4 = -w_3 + 2w_4.$$

在 F_4表示(0,0,0,1)中，包含 24 个等价的单权和一个二重权(0,0,0,0)，等价的单权是

$$(0,0,0,1),\quad (0,0,1,\bar{1}),\quad (0,1,\bar{1},0),\quad (1,\bar{1},1,0),$$

$$(\bar{1},0,1,0),\quad (1,0,\bar{1},1),\quad (\bar{1},1,\bar{1},1),\quad (1,0,0,\bar{1}),$$

$$(0,\bar{1},1,1),\quad (\bar{1},1,0,\bar{1}),\quad (0,0,\bar{1},2),\quad (0,\bar{1},2,\bar{1}),$$

$$(0,0,1,\bar{2}),\quad (0,1,\bar{2},1),\quad (0,1,\bar{1},\bar{1}),\quad (1,\bar{1},0,1),$$

$$(1,\bar{1},1,\bar{1}),\quad (\bar{1},0,0,1),\quad (\bar{1},0,1,\bar{1}),\quad (1,0,\bar{1},0),$$

$$(\bar{1},1,\bar{1},0),\quad (0,\bar{1},1,0),\quad (0,0,\bar{1},1),\quad (0,0,0,\bar{1}).$$

由此可算出，在乘积空间(0,0,0,1)×(0,0,0,1)中，各主权的重数和状态的乘积如下. 注意状态相乘的次序可以交换.

主权	重数	状态的乘积
(0,0,0,2)	1	$(0,0,0,1)\times(0,0,0,1)$
(0,0,1,0)	2	$(0,0,0,1)\times(0,0,1,\bar{1})$
(1,0,0,0)	6	$(0,0,0,1)\times(1,0,0,\bar{1})$, $(0,0,1,\bar{1})\times(1,0,\bar{1},1)$, $(0,1,\bar{1},0)\times(1,\bar{1},1,0)$
(0,0,0,1)	12	$(0,0,0,1)\times(0,0,0,0)_1$, $(0,0,0,1)\times(0,0,0,0)_2$, $(0,0,1,\bar{1})\times(0,0,\bar{1},2)$, $(0,1,\bar{1},0)\times(0,\bar{1},1,1)$, $(1,\bar{1},1,0)\times(\bar{1},1,\bar{1},1)$, $(\bar{1},0,1,0)\times(1,0,\bar{1},1)$
(0,0,0,0)	28	24 个单权都正负成对出现，二重权(0,0)产生四个(0,0)态.

状态总数是

$$1\times 24 + 2\times 96 + 6\times 24 + 12\times 24 + 28\times 1 = 676.$$

在直乘表示(0,0,0,1)×(0,0,0,1)所分解的克莱布施-戈登级数中，有一个(0,0,0,2)表示. 因为在表示(0,0,0,2)中(0,0,1,0)是单权，而在乘积空间中(0,0,1,0)是二重权，所以在克莱布施-戈登级数中有一个表示(0,0,1,0). 因为在表示(0,0,0,2)和(0,0,1,0)中权(1,0,0,0)的重数分别是 3 和 2，而在乘积空间中(1,0,0,0)是 6 重权，所以在克莱布施-戈登级数中有一个表示(1,0,0,0). 因为在表示(0,0,0,2)，(0,0,1,0)和(1,0,0,0)中权(0,0,0,1)的重数分别是 5，5 和 1，

而在乘积空间中(0,0,0,1)是12重权，所以在克莱布施-戈登级数中有一个表示(0,0,0,1). 因为在表示(0,0,0,2), (0,0,1,0), (1,0,0,0)和(0,0,0,1)中权(0,0,0,0)的重数分别是12, 9, 4和2, 而在乘积空间中(0,0,0,0)是28重权. 所以在克莱布施-戈登级数中有一个表示(0,0,0,0). 因此, F_4李代数直乘表示(0,0,0,1)×(0,0,0,1)分解的克莱布施-戈登级数和相应表示的维数如下:

$$(0,0,0,1) \times (0,0,0,1) \simeq (0,0,0,2) \oplus (0,0,1,0) \oplus (1,0,0,0)$$
$$\oplus (0,0,0,1) \oplus (0,0,0,0),$$
$$26 \times 26 = 676 = 324 + 273 + 52 + 26 + 1.$$

三、D维欧氏空间的角动量算符和本征状态

★ 在三维空间中，角动量算符的本征函数通常用球谐函数表达，变量采用球坐标 θ 和 φ,

$$L^2 Y_m^l(\theta,\varphi) = l(l+1) Y_m^l(\theta,\varphi), \quad L_3 Y_m^l(\theta,\varphi) = m\, Y_m^l(\theta,\varphi).$$

但本征函数也可用球谐多项式表达，它是拉普拉斯方程的解，且变量直接采用直角坐标:

$$\mathscr{Y}_m^l(\boldsymbol{x}) = r^l Y_m^l(\theta,\varphi), \qquad r^2 = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2,$$
$$\nabla^2 \mathscr{Y}_m^l(\boldsymbol{x}) = 0,$$
$$\boldsymbol{L}^2 \mathscr{Y}_m^l(\boldsymbol{x}) = l(l+1)\mathscr{Y}_m^l(\boldsymbol{x}), \quad L_3 \mathscr{Y}_m^l(\boldsymbol{x}) = m \mathscr{Y}_m^l(\boldsymbol{x}). \tag{9.22}$$

由于空间各向同性，通常只需要写出磁量子数最大($m = l$)的球谐多项式就够了，少数情况需写出磁量子数次大($m = l-1$)的球谐多项式. 略去归一化系数，它们是

$$\mathscr{Y}_l^l(\boldsymbol{x}) \sim (x_1 + \mathrm{i}x_2)^l, \qquad \mathscr{Y}_{l-1}^l(\boldsymbol{x}) \sim -\sqrt{2l}(x_1 + \mathrm{i}x_2)^{l-1} x_3. \tag{9.23}$$

★ D维空间有 $D(D-1)/2$ 个角动量算符

$$L_{ab} = -\mathrm{i}\left\{ x_a \frac{\partial}{\partial x_b} - x_b \frac{\partial}{\partial x_a} \right\}, \tag{9.24}$$

它们也是SO(D)群的生成元，可把它们组合成谢瓦莱基. 当 $1 \leqslant \nu \leqslant n-1$ 时，对 $D = 2n$ 和 $D = 2n+1$，它们有共同的谢瓦莱基

$$
\begin{aligned}
H_\nu &= L_{(2\nu-1)(2\nu)} - L_{(2\nu+1)(2\nu+2)}, \\
E_\nu &= \frac{1}{2}\left(L_{(2\nu)(2\nu+1)} - \mathrm{i}L_{(2\nu-1)(2\nu+1)}\right. \\
&\qquad \left. - \mathrm{i}L_{(2\nu)(2\nu+2)} - L_{(2\nu-1)(2\nu+2)}\right), \\
F_\nu &= \frac{1}{2}\left(L_{(2\nu)(2\nu-1)} + \mathrm{i}L_{(2\nu-1)(2\nu+1)}\right. \\
&\qquad \left. + \mathrm{i}L_{(2\nu)(2\nu+2)} - L_{(2\nu-1)(2\nu+2)}\right).
\end{aligned} \tag{9.25a}
$$

当 $\nu = n$ 时，对 SO$(2n+1)$群有

$$
\begin{aligned}
H_n &= 2L_{(2n-1)(2n)}, \\
E_n &= L_{(2n)(2n+1)} - \mathrm{i}L_{(2n-1)(2n+1)}, \\
F_n &= L_{(2n)(2n+1)} + \mathrm{i}L_{(2n-1)(2n+1)},
\end{aligned} \tag{9.25b}
$$

而对 SO$(2n)$群有

$$
\begin{aligned}
H_n &= L_{(2n-3)(2n-2)} + L_{(2n-1)(2n)}, \\
E_n &= \frac{1}{2}\left(L_{(2n-2)(2n-1)} - \mathrm{i}L_{(2n-3)(2n-1)}\right. \\
&\qquad \left. + \mathrm{i}L_{(2n-2)(2n)} + L_{(2n-3)(2n)}\right), \\
F_n &= \frac{1}{2}\left(L_{(2n-2)(2n-1)} + \mathrm{i}L_{(2n-3)(2n-1)}\right. \\
&\qquad \left. - \mathrm{i}L_{(2n-2)(2n)} + L_{(2n-3)(2n)}\right).
\end{aligned} \tag{9.25c}
$$

H_μ架设嘉当子代数，它们的本征值构成权矢量 $\boldsymbol{m} = (m_1, \cdots, m_n)$：

$$
H_\mu \mid \boldsymbol{m}\rangle = m_\mu \mid \boldsymbol{m}\rangle, \quad 1 \leqslant \mu \leqslant n. \tag{9.26}
$$

最高权态$|\boldsymbol{M}\rangle$满足

$$
H_\mu \mid \boldsymbol{M}\rangle = M_\mu \mid \boldsymbol{M}\rangle, \qquad E_\mu \mid \boldsymbol{M}\rangle = 0. \tag{9.27}
$$

总角动量平方算符 $\boldsymbol{L}^2 = \sum_{a<b} L_{ab}{}^2$是二阶开西米尔算子，它在最高权表示 $\boldsymbol{M}$ 中的本征值$C_2(\boldsymbol{M})$为

$$
C_2(\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{M} \cdot (\boldsymbol{M} + 2\boldsymbol{\rho}) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} M_\mu d_\mu (A^{-1})_{\mu\nu}(M_\nu + 2), \tag{9.28}
$$

其中 $\boldsymbol{\rho}$ 是基本主权 w_μ 之和，A^{-1} 是嘉当矩阵的逆矩阵，d_μ 是素根 $\boldsymbol{r}_\mu$ 长度平方之半.

另一方面，SO(D)群不可约单值表示是用杨图$[\lambda]=[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]$描写的无迹张量表示，杨图指标 λ_μ 和最高权分量 M_ν 之间的关系，当 $1\leqslant\nu\leqslant n-2$ 时，对 SO($2n+1$)群和 SO($2n$)群是相同的，

$$M_\nu=\lambda_\nu-\lambda_{\nu+1},\qquad 1\leqslant\nu\leqslant n-2, \tag{9.29a}$$

最后两个略有差异，对 SO($2n+1$)群有

$$M_{n-1}=\lambda_{n-1}-\lambda_n,\qquad M_n=2\lambda_n, \tag{9.29b}$$

对 SO($2n$)群自对偶表示有

$$M_{n-1}=\lambda_{n-1}-\lambda_n,\qquad M_n=\lambda_{n-1}+\lambda_n, \tag{9.29c}$$

对 SO($2n$)群反自对偶表示有

$$M_{n-1}=\lambda_{n-1}+\lambda_n,\qquad M_n=\lambda_{n-1}-\lambda_n, \tag{9.29d}$$

★　对 N 粒子系统，设各粒子的质量和坐标矢量分别为 m_k 和 $\boldsymbol{r}_k$，则薛定鄂方程为

$$-\frac{\hbar^2}{2}\sum_{k=1}^{N}m_k^{-1}\nabla_{r_k}^2\Psi(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N)=(E-V)\Psi(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N).$$

作为孤立系统薛定鄂方程对空间平移和转动保持不变. 引入雅可比(Jacobi)坐标. 在质心坐标系中可把质心平动与系统内部运动完全分离开来.

$$\boldsymbol{R}_0=M^{-1}\sum_{k=1}^{N}m_k\boldsymbol{r}_k,$$

$$\boldsymbol{R}_j=\left(\frac{m_jM_{j+1}}{MM_j}\right)^{1/2}\left\{\boldsymbol{r}_j-M_{j+1}^{-1}\sum_{k=j+1}^{N}m_k\boldsymbol{r}_k\right\}.$$

其中 $M_j=\sum\limits_{k=j}^{N}m_k$，和 $M=M_1$ 是系统总质量. 通过变量替换，薛定鄂方程可分离变量：

$$\Psi(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N)=\Phi(\boldsymbol{R}_0)\psi(\boldsymbol{R}_1,\cdots,\boldsymbol{R}_{N-1}),$$

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_{R_0}^2\Phi(\boldsymbol{R}_0)=E_0\Phi(\boldsymbol{R}_0),$$

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\sum_{j=1}^{N-1}\nabla_{R_j}^2\psi(\boldsymbol{R}_1,\cdots,\boldsymbol{R}_{N-1})=(E-E_0-V)\psi(\boldsymbol{R}_1,\cdots,\boldsymbol{R}_{N-1}).$$

为了把系统整体转动与系统内部运动分离开来，需要找到完备的独立角动量本征函数基. 首先，在 D 维空间，角动量的概念需要推广，角动量量子数由 SO(D)群的不可约表示及其行数来标记. 不可约表示用杨图[λ]或最高权 $\boldsymbol{M}$ 描写，而行数则用权 $\boldsymbol{m}$ 描写，重权情况还需标上序指标. 其次，由于空间各向同性，只需研究最高权态，其他权态可用降权算符作用得到. 设完备的独立的角动量本征函数基为 ψ_q^M，系统中任意角动量本征函数可按这组函数基展开

$$\psi_{\mathbf{M}}^{\mathbf{M}} = \sum_q \phi_q \psi_q^M, \tag{9.30}$$

其中 ϕ_q 称为广义径向函数，它们只依赖于内部变量，内部变量应在转动中保持不变. 这里所谓"独立"的角动量本征函数基指它们中的每一个都不能表为其他基的组合，组合系数只是内部变量的函数. 通常用球谐多项式表出这组基比较方便.

15. 证明公式(9.28)，并分别计算总角动量平方算符 L^2 在 SO($2n$)群和 SO($2n+1$)群最高权表示 $\boldsymbol{M}$ 中的本征值.

解 先证明基本主权之和等于正根和之半. 设 $\boldsymbol{\rho}$ 为基本主权 $\boldsymbol{w}_\mu$ 之和，由(9.11)式得

$$\Gamma(\boldsymbol{\rho}/\boldsymbol{r}_\mu) = 1.$$

对给定的 μ，把 $\boldsymbol{r}_\mu$ 单独考虑，其他正根都分属于根链

$$\boldsymbol{\beta}_t = \boldsymbol{\alpha} + t\boldsymbol{r}_\mu, \qquad -q \leqslant t \leqslant p.$$

对根链中每个根 $\boldsymbol{\beta}_t$，有

$$\Gamma(\boldsymbol{\alpha}/\boldsymbol{r}_\nu) = (q-p), \quad \Gamma(\boldsymbol{\beta}_t/\boldsymbol{r}_\mu) = (q-p) + 2t.$$

对 t 求和得

$$\sum_{t=-q}^{p}(q-p+2t) = (q-p)(p-q+1) + (-q+p)(p+q+1) = 0.$$

而 $\Gamma(\boldsymbol{r}_\mu/\boldsymbol{r}_\mu)=2$. 因此，正根之和 $\boldsymbol{V}$ 满足 $\Gamma(\boldsymbol{V}/\boldsymbol{r}_\mu)=2$，既然此式对所有 μ 都成立，得 $\boldsymbol{V}=2\boldsymbol{\rho}$.

现在用嘉当-外尔基表出二阶开西米尔算子，即总角动量平方算符，

$$L^2 = \sum_{j=1}^{n} H_j^2 + \sum_{\alpha\in\sum^+}(E_\alpha E_{-\alpha} + E_{-\alpha}E_\alpha),$$

前项作用在最高权态上得 $\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{M}$，后项作用时，注意升权算符作用在最高权态上得零，

$$\sum_{\alpha\in\sum^+} E_\alpha E_{-\alpha} | \boldsymbol{M}\rangle = \sum_{\alpha\in\sum^+} \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{H} | \boldsymbol{M}\rangle = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{M} | \boldsymbol{M}\rangle.$$

因此(9.28)式得证.

为了计算总角动量平方算符 L^2 的本征值 $C_2(\boldsymbol{M})$，先要计算嘉当矩阵的逆矩阵. 对 SO$(2n+1)$群$(D=2n+1)$有

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3/2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & (n-1)/2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n/2 \end{pmatrix}.$$

素根长度为 $d_n=1/2$，其他 $d_\mu=1$. 由(9.29)式，最高权的分量 M_μ 可用杨图各行格数 λ_μ 表出：

$$\boldsymbol{M} = \sum_{\mu=1}^{n} M_\mu \boldsymbol{w}_\mu = \sum_{\mu=1}^{n-1} (\lambda_\mu - \lambda_{\mu+1}) \boldsymbol{w}_\mu + 2\lambda_n \boldsymbol{w}_n.$$

由(9.28)式算得

$$\begin{aligned} C_2(\boldsymbol{M}) &= (\lambda_1-\lambda_2)[\lambda_1+2n-1] \\ &\quad + (\lambda_2-\lambda_3)[\lambda_1+\lambda_2+4n-4]+\cdots \\ &\quad + (\lambda_\mu-\lambda_{\mu+1})[\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\mu+2n\mu-\mu^2]+\cdots \\ &\quad + (\lambda_{n-1}-\lambda_n)[\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_{n-1}+2n(n-1)-(n-1)^2] \\ &\quad + \lambda_n[\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n+n^2] \\ &= \lambda_1[\lambda_1+D-2]+\lambda_2[\lambda_2+D-4]+\cdots \\ &\quad + \lambda_\mu[\lambda_\mu+D-2\mu]+\cdots \\ &\quad + \lambda_{n-1}[\lambda_{n-1}+D-2(n-1)]+\lambda_n[\lambda_n+D-2n] \\ &= \sum_{\mu=1}^{n}\lambda_\mu[\lambda_\mu+D-2\mu]. \end{aligned} \tag{9.31}$$

对 SO$(2n)$群$(D=2n)$有

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 6 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2(n-2) & n-2 & n-2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n/2 & (n-2)/2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & (n-2)/2 & n/2 \end{pmatrix},$$

素根长度为 $d_v=1$. 对 n 行的杨图，表示又分解为自对偶和反自对偶表示，它们的二阶开西米尔 $C_2(\boldsymbol{M})$是一样的,下面以自对偶表示为例来计算. 对少于 n 行的杨图，$M_{n-1}=M_n=\lambda_{n-1}$，下面的计算也适用.

$$\boldsymbol{M} = \sum_{\mu=1}^{n} M_\mu \boldsymbol{w}_\mu = \sum_{\mu=1}^{n-1}(\lambda_\mu - \lambda_{\mu+1})\boldsymbol{w}_\mu + (\lambda_{n-1} + \lambda_n)\boldsymbol{w}_n .$$

由(9.28)式算得

$$\begin{aligned} C_2(\boldsymbol{M}) = & (\lambda_1 - \lambda_2)[\lambda_1 + 2n - 2] \\ & + (\lambda_2 - \lambda_3)[\lambda_1 + \lambda_2 + 4n - 6] + \cdots \\ & + (\lambda_\mu - \lambda_{\mu+1})[\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\mu + 2n\mu - \mu(\mu+1)] + \cdots \\ & + (\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1})[\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-2} + (n-2)(n+1)] \\ & + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)(1/2)[\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1} - \lambda_n + (n-1)n] \\ & + (\lambda_{n-1} + \lambda_n)(1/2)[\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1} + \lambda_n + (n-1)n] \\ = & \lambda_1[\lambda_1 + D - 2] + \lambda_2[\lambda_2 + D - 4] + \cdots \\ & + \lambda_\mu[\lambda_\mu + D - 2\mu] + \cdots \\ & + \lambda_{n-2}[\lambda_{n-2} + D - 2(n-2)] + \cdots \\ & + \lambda_{n-1}[\lambda_{n-1} + D - 2(n-1)] + \lambda_n^2 \\ = & \sum_{\mu=1}^{n}\lambda_\mu[\lambda_\mu + D - 2\mu]. \end{aligned}$$

同于(9.31)式. 可见 $C_2(\boldsymbol{M})$的公式对 SO$(2n+1)$群和 SO$(2n)$群是统一的.

16. 在 D 维空间计算各向同性的二体系统的角动量本征函数基，并由此简化薛定谔方程.

解 在把质心平动分离出去后，二体系统只有一个雅可比坐标矢量，记作 $\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{x}$，由它构成的在转动中保持不变的独立变量只有 $r^2=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$，它就是惟一的内部变量. 单由矢量 $\boldsymbol{x}$ 无法构成反对称张量，因而角动量本征函数只能对应一行杨图的表示，记作 $[\lambda]$，用第八章的方法算得维数为

$$d_D([\lambda])=\frac{(D+2\lambda-2)(D+\lambda-3)!}{\lambda!(D-2)!}. \qquad (9.32)$$

另一方面，显然 $\boldsymbol{x}$ 分量的齐次多项式构成的线性空间在转动变换中保持不变. 讨论 l 次齐次多项式，它们构成的空间维数为

$$N(l)=\begin{pmatrix} l+D-1 \\ D-1 \end{pmatrix}=\frac{(l+D-1)!}{l!(D-1)!}.$$

作为独立的角动量本征函数基，应该排除形为 $r^2f(\boldsymbol{x})$ 的多项式，其中 $f(\boldsymbol{x})$ 是 $(l-2)$ 次齐次多项式，因为 r^2 可以合并到广义径向函数中去. 这样余下的空间维数是

$$\begin{aligned} N(l)-N(l-2)&=\frac{(l+D-3)!}{l!(D-1)!}\{(l+D-1)(l+D-2)-l(l-1)\} \\ &=d_D([l]). \end{aligned}$$

正好对应表示 $[l]$. 设最高权态记作 $Q^l(\boldsymbol{x})$，它应满足

$$\begin{aligned} &H_1Q^l(\boldsymbol{x})=l\,Q^l(\boldsymbol{x}), \quad H_\nu Q^l(\boldsymbol{x})=E_\mu Q^l(\boldsymbol{x})=0, \\ &2\leqslant\nu\leqslant n, \quad 1\leqslant\mu\leqslant n, \\ &L^2Q^l(\boldsymbol{x})=C_2([l])Q^l(\boldsymbol{x})=l(l+D-2)Q^l(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

其中 $D=2n$ 或 $D=2n+1$. 由(9.25)式不难验算下面函数满足条件:

$$Q^l(\boldsymbol{x})=(x_1+\mathrm{i}x_2)^l.$$

这里归一化系数是不重要的. 很明显，$Q^l(\boldsymbol{x})$ 还满足拉普拉斯方程

$$\nabla_x^2Q^l(\boldsymbol{x})=0.$$

由于转动不变性，其他权态也满足拉普拉斯方程. 它就是要找的角动量本征函数基. 任意角动量本征函数 $\psi^l(\boldsymbol{x})$ 都可按此本征函数基展开

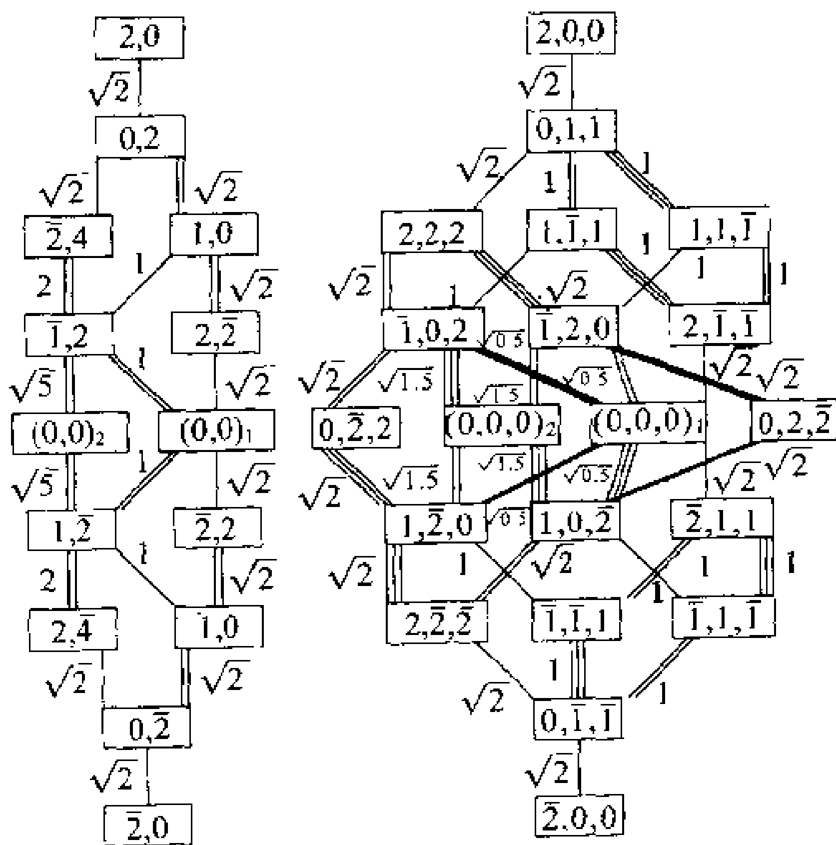
$$\psi^l(\boldsymbol{x})=\phi(r)Q^l(\boldsymbol{x}).$$

代入薛定谔方程，得

$$
\begin{aligned}
\nabla_x^2\psi^l(\boldsymbol{x}) &= Q^l(\boldsymbol{x})\,\nabla_x^2\phi(r) + 2(\nabla_x\phi(r))\cdot\nabla_x Q^l(\boldsymbol{x}) \\
&= Q^l(\boldsymbol{x})\left\{r^{1-D}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r^{D-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\phi(r)+\frac{2l}{r}\frac{\mathrm{d}\phi(r)}{\mathrm{d}r}\right\} \\
&= -\frac{2M}{\hbar^2}(E-E_0-V)\phi(r)Q^l(\boldsymbol{x}).
\end{aligned}
$$

消去 $Q^l(\boldsymbol{x})$就是径向方程.

现在举两个例子来说明，如何计算表示中对应于其他权的球谐多项式. 讨论SO(5)群的表示[2,0]和SO(6)群的表示[2,0,0]. 先用前面方法画出方块权图，这里只解释与重权有关的表示矩阵元的计算.



1) SO(5)群表示 (2,0)　　　　2) SO(6)群表示 (2,0,0)

对SO(5)群的表示[2,0]，出现二重权(0,0). 按照 $\mathscr{A}_1$ 子代数的多重态来定义这两个态，一个属三重态$|(0,0)_1\rangle$，一个是单态$|(0,0)_2\rangle$，则有

$$F_1\,|2,\bar{2}\rangle = \sqrt{2}\,|(0,0)_1\rangle,\qquad F_1\,|(0,0)_1\rangle = \sqrt{2}\,|\bar{2},2\rangle,$$

$$F_2|\bar{1},2\rangle=\sqrt{6}\{a_1|(0,0)_1\rangle+a_2|(0,0)_2\rangle\}.$$

利用生成元的对易关系来确定组合系数，

$$E_1F_2|\bar{1},2\rangle=2\sqrt{3}a_1|2,\bar{2}\rangle$$

$$=F_2E_1|\bar{1},2\rangle=F_2|1,0\rangle=\sqrt{2}|2,\bar{2}\rangle.$$

定出 $a_1=\sqrt{1/6}$，$a_2=\sqrt{1-1/6}=\sqrt{5/6}$. 注意作为生成元的矩阵元，前面还要乘系数$\sqrt{6}$. 再设

$$E_2|1,\bar{2}\rangle=\sqrt{6}\{b_1|(0,0)_1\rangle+b_2|(0,0)_2\rangle\}.$$

得

$$E_2F_2|(0,0)_2\rangle=6b_1b_2|(0,0)_1\rangle+6b_2^2|(0,0)_2\rangle$$

$$=(2H_2+F_2E_2)|(0,0)_2\rangle=\sqrt{5}|(0,0)_1\rangle+5|(0,0)_2\rangle.$$

定出 $b_2=\sqrt{5/6}=a_2$，$b_1=\sqrt{1/6}=a_1$.

SO(6)群局域同态于SU(4)群，但邓金图指标的排列次序不同. 对SO(6)群的表示[2,0,0]，出现二重权(0,0,0). 按照$\mathscr{A}_1$子代数的多重态来定义这两个态，一个属三重态$|(0,0,0)_1\rangle$，另一个是单态$|(0,0,0)_2\rangle$，则有

$$F_1|2,\bar{1},\bar{1}\rangle=\sqrt{2}|(0,0,0)_1\rangle,\quad F_1|(0,0,0)_1\rangle=\sqrt{2}|\bar{2},1,1\rangle,$$

$$F_2|\bar{1},2,0\rangle=\sqrt{2}\{c_1|(0,0,0)_1\rangle+c_2|(0,0,0)_2\rangle\},$$

$$F_3|\bar{1},0,2\rangle=\sqrt{2}\{d_1|(0,0,0)_1\rangle+d_2|(0,0,0)_2\rangle\}.$$

利用生成元的对易关系来确定组合系数，

$$E_1F_2|\bar{1},2,0\rangle=2c_1|2,\bar{1},\bar{1}\rangle$$

$$=F_2E_1|\bar{1},2,0\rangle=F_2|1,1,\bar{1}\rangle=|2,\bar{1},\bar{1}\rangle.$$

定出 $c_1=1/2$，$c_2=\sqrt{1-1/4}=\sqrt{3/4}$. 同样计算可得$\sqrt{2}d_1=\sqrt{1/2}$，$\sqrt{2}d_2=\sqrt{3/2}$. 再设

$$E_2|1,\bar{2},0\rangle=\sqrt{2}\{e_1|(0,0,0)_1\rangle+e_2|(0,0,0)_2\rangle\},$$

$$E_3|1,0,\bar{2}\rangle=\sqrt{2}\{f_1|(0,0,0)_1\rangle+f_2|(0,0,0)_2\rangle\}.$$

得

$$E_2F_2|(0,0,0)_2\rangle = 2e_1e_2|(0,0,0)_1\rangle + 2e_2^2|(0,0,0)_2\rangle$$

$$= (2H_2 + F_2E_2)|(0,0,0)_2\rangle = \sqrt{3/4}|(0,0,0)_1\rangle - (3/2)|(0,0,0)_2\rangle,$$

$$E_3F_3|(0,0,0)_2\rangle = 2f_1f_2|(0,0,0)_1\rangle + 2{f_2}^2|(0,0,0)_2\rangle$$

$$= (2H_3 + F_3E_3)|(0,0,0)_2\rangle = \sqrt{3/4}|(0,0,0)_1\rangle + (3/2)|(0,0,0)_2\rangle.$$

定出 $e_2 = f_2 = \sqrt{3/4}$，$e_1 = f_1 = \sqrt{1-3/4} = 1/2$.

现在来具体计算对应各态的球谐多项式，对每一个不可约表示，计算得的球谐多项式可以乘一个公共的归一化因子．为书写简单，引入简化符号：$X_{\pm\mu} = x_{2\mu-1} \pm \mathrm{i}x_{2\mu}$．由(9.25)式直接计算得，当 $D = 2n+1$ 时，

$$F_\mu X_{+\nu} = \begin{cases} -X_{+(\mu+1)}, & \text{当 } \nu = \mu < n, \\ -2x_{2n+1}, & \text{当 } \nu = \mu = n, \\ 0, & \text{当 } \nu \neq \mu, \end{cases}$$

$$F_\mu X_{-(\nu+1)} = \begin{cases} X_{-\mu}, & \text{当 } \nu = \mu < n, \\ 0, & \text{当 } \nu \neq \mu, \end{cases}$$

$$F_\mu x_{2n+1} = \begin{cases} 0, & \text{当 } \mu < n, \\ X_{-n}, & \text{当 } \mu = n, \end{cases}$$

当 $D = 2n$ 时，

$$F_\mu X_{+\nu} = \begin{cases} -X_{+(\mu+1)}, & \text{当 } \nu = \mu < n, \\ X_{(n-1)}, & \text{当 } \nu = \mu = n, \\ -X_{-n}, & \text{当 } \nu + 1 = \mu = n, \\ 0, & \text{其他情况}. \end{cases}$$

$$F_\mu X_{-(\nu+1)} = \begin{cases} X_{-\mu}, & \text{当 } \nu = \mu < n, \\ 0, & \text{其他情况}. \end{cases}$$

先算 SO(5)群表示[2,0].

$$|2,0\rangle = X_{+1}^2,$$

$$|0,2\rangle = \sqrt{1/2}F_1|2,0\rangle = \sqrt{1/2}F_1X_{+1}^2 = -\sqrt{2}X_{+1}X_{+2},$$

$$|\bar{2},4\rangle=\sqrt{1/2}F_1|0,2\rangle=-F_1X_{+1}X_{+2}=X^2_{+2},$$

$$|1,0\rangle=\sqrt{1/2}F_2|0,2\rangle=-F_2X_{+1}X_{+2}=2X_{+1}x_5,$$

$$|2,\bar{2}\rangle=\sqrt{1/2}F_2|1,0\rangle=\sqrt{2}F_2X_{+1}x_5=\sqrt{2}X_{+1}X_{-2},$$

$$|(0,0)_1\rangle=\sqrt{1/2}F_1|2,\bar{2}\rangle=F_1X_{+1}X_{-2}=X_{+1}X_{-1}-X_{+2}X_{-2},$$

$$|\bar{2},2\rangle=\sqrt{1/2}F_1|(0,0)_1\rangle=\sqrt{1/2}F_1\{X_{+1}X_{-1}-X_{+2}X_{-2}\}$$

$$=-\sqrt{2}X_{+2}X_{-1},$$

$$|\bar{1},2\rangle=(1/2)F_2|\bar{2},4\rangle=(1/2)F_2X^2_{+2}=-2X_{+2}x_5,$$

$$|(0,0)_2\rangle=\sqrt{1/5}\{F_2|\bar{1},2\rangle-|(0,0)_1\rangle\}$$

$$=\sqrt{1/5}\{-2F_2X_{+2}x_5-X_{+1}X_{-1}+X_{+2}X_{-2}\}$$

$$=\sqrt{1/5}\{-X_{+1}X_{-1}-X_{+2}X_{-2}+4x_5^2\},$$

$$|1,\bar{2}\rangle=\sqrt{1/5}F_2|(0,0)_2\rangle$$

$$=(1/5)F_2\{-X_{+1}X_{-1}-X_{+2}X_{-2}+4x_5^2\}=2x_5X_{-2},$$

$$|2,\bar{4}\rangle=(1/2)F_2|1,\bar{2}\rangle=F_2x_5X_{-2}=X^2_{-2},$$

$$|\bar{1},0\rangle=\sqrt{1/2}F_2|\bar{2},2\rangle=-F_2X_{+2}X_{-1}=2x_5X_{-1},$$

$$|0,\bar{2}\rangle=\sqrt{1/2}F_2|\bar{1},0\rangle=\sqrt{2}F_2x_5X_{-1}=\sqrt{2}X_{-2}X_{-1},$$

$$|\bar{2},0\rangle=\sqrt{1/2}F_1|0,\bar{2}\rangle=F_2X_{-2}X_{-1}=X^2_{-1}.$$

中间还有许多关系可供检验用，这里只举一个例子来说明：

$$|1,\bar{2}\rangle=F_2|(0,0)_1\rangle=F_2\{X_{+1}X_{-1}-X_{+2}X_{-2}\}=2x_5X_{-2}.$$

再算 SO(6)群表示(2,0,0).

$$|2,0,0\rangle=X^2_{+1},$$

$$|0,1,1\rangle=\sqrt{1/2}F_1|2,0,0\rangle=\sqrt{1/2}F_1X^2_{+1}=-\sqrt{2}X_{+1}X_{+2},$$

$$|\bar{2},2,2\rangle=\sqrt{1/2}F_1|0,1,1\rangle=-F_1X_{+1}X_{+2}=X^2_{+2},$$

$$|1,\bar{1},1\rangle=F_2|0,1,1\rangle=-\sqrt{2}F_2X_{+1}X_{+2}=\sqrt{2}X_{+1}X_{+3},$$

$$|1,1,\bar{1}\rangle = F_3|0,1,1\rangle = -\sqrt{2}F_3X_{+1}X_{+2} = \sqrt{2}X_{+1}X_{-3},$$

$$|\bar{1},0,2\rangle = \sqrt{1/2}F_2|\bar{2},2,2\rangle = \sqrt{1/2}F_2X_{+2}^2 = -\sqrt{2}X_{+2}X_{+3},$$

$$|0,\bar{2},2\rangle = \sqrt{1/2}F_2|\bar{1},0,2\rangle = -F_2X_{+2}X_{+3} = X_{+3}^2,$$

$$|\bar{1},2,0\rangle = \sqrt{1/2}F_3|\bar{2},2,2\rangle = \sqrt{1/2}F_3X_{+2}^2 = -\sqrt{2}X_{+2}X_{-3},$$

$$|0,2,\bar{2}\rangle = \sqrt{1/2}F_3|\bar{1},2,0\rangle = -F_3X_{+2}X_{-3} = X_{-3}^2,$$

$$|2,\bar{1},\bar{1}\rangle = F_2|1,1,\bar{1}\rangle = \sqrt{2}F_2X_{+1}X_{-3} = \sqrt{2}X_{+1}X_{-2},$$

$$|(0,0,0)_1\rangle = \sqrt{1/2}F_1|2,\bar{1},\bar{1}\rangle = F_1X_{+1}X_{-2} = X_{+1}X_{-1} - X_{+2}X_{-2},$$

$$|\bar{2},1,1\rangle = \sqrt{1/2}F_1|(0,0,0)_1\rangle = \sqrt{1/2}F_1\{X_{+1}X_{-1} - X_{+2}X_{-2}\}$$

$$= -\sqrt{2}X_{+2}X_{-1},$$

$$|(0,0,0)_2\rangle = \sqrt{2/3}\{F_2|\bar{1},2,0\rangle - \sqrt{1/2}|(0,0,0)_1\rangle$$

$$= \sqrt{1/3}\{-2F_2X_{+2}X_{-3} - X_{+1}X_{-1} + X_{+2}X_{-2}\}$$

$$= \sqrt{1/3}\{2X_{+3}X_{-3} - X_{+2}X_{-2} - X_{+1}X_{-1}\},$$

$$|1,\bar{2},0\rangle = \sqrt{1/2}F_3|0,\bar{2},2\rangle = \sqrt{1/2}F_3X_{+3}^2 = \sqrt{2}X_{+3}X_{-2},$$

$$|2,\bar{2},\bar{2}\rangle = \sqrt{1/2}F_3|1,\bar{2},0\rangle = F_3X_{+3}X_{-2} = X_{-2}^2,$$

$$|1,0,\bar{2}\rangle = \sqrt{1/2}F_2|0,2,\bar{2}\rangle = \sqrt{1/2}F_2X_{-3}^2 = \sqrt{2}X_{-3}X_{-2},$$

$$|\bar{1},\bar{1},1\rangle = F_1|1,\bar{2},0\rangle = \sqrt{2}F_1X_{+3}X_{-2} = \sqrt{2}X_{+3}X_{-1},$$

$$|\bar{1},1,\bar{1}\rangle = F_3|\bar{2},1,1\rangle = -\sqrt{2}F_3X_{+2}X_{-1} = \sqrt{2}X_{-3}X_{-1},$$

$$|0,\bar{1},\bar{1}\rangle = \sqrt{1/2}F_1|2,\bar{2},\bar{2}\rangle = \sqrt{1/2}F_1X_{-2}^2 = \sqrt{2}X_{-2}X_{-1},$$

$$|\bar{2},0,0\rangle = \sqrt{1/2}F_1|0,\bar{1},\bar{1}\rangle = F_1X_{-2}X_{-1} = X_{-1}^2.$$

17. 在 D 维空间计算各向同性的三体系统的角动量本征函数基，并由此简化薛定谔方程.

解 在把质心平动分离出去后，三体系统有两个雅可比坐标矢量，记作 $\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{y}$，因而内部变量有三个，$\xi_1 = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$，$\xi_2 = \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{y}$ 和 $\xi_3 = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$，角动量本征函数

只能对应一行或两行的杨图表示，记作$[\lambda_1,\lambda_2]$，用第八章的方法算得表示的维数为

$$d_{[\lambda_1,\lambda_2]}(\mathrm{SO}(D)) = (D+2\lambda_1-2)(D+\lambda_1+\lambda_2-3)(D+2\lambda_2-4)$$
$$\times(\lambda_1-\lambda_2+1)\frac{(D+\lambda_1-4)!(D+\lambda_2-5)!}{(\lambda_1+1)!\,\lambda_2!\,(D-2)!\,(D-4)!}. \tag{9.33}$$

表示$[\lambda_1,\lambda_2]$的最高权为$\boldsymbol{M}=(\lambda_1-\lambda_2,\ \lambda_2,\ 0,\ \cdots,\ 0)$，对应的最高权态可以由两个球谐多项式$\mathscr{Y}_m^q(\boldsymbol{x})$和$\mathscr{Y}_m^p(\boldsymbol{y})$通过克莱布施-戈登系数组合得到，记作$\mathscr{Y}_M^{\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，它应满足

$$\begin{aligned}
&H_1\mathscr{Y}_M^{\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\lambda_1-\lambda_2)\mathscr{Y}_M^{\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\\
&H_2\mathscr{Y}_M^{\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \lambda_2\mathscr{Y}_M^{\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\\
&H_\nu\mathscr{Y}_M^{\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = E_\mu\mathscr{Y}_M^{\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0,\\
&3\leqslant\nu\leqslant n,\qquad 1\leqslant\mu\leqslant n,\\
&L^2\mathscr{Y}_M^{\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = C_2([\lambda_1\ \lambda_2])\mathscr{Y}_M^{\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\\
&\qquad = [\lambda_1(\lambda_1+D-2)+\lambda_2(\lambda_2+D-4)]\mathscr{Y}_M^{\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),
\end{aligned} \tag{9.34}$$

其中$D=2n$或$D=2n+1$. 由(9.25)式不难验算下面函数满足条件(9.34)：

$$Q_q^{\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{X_{+1}^{q-\lambda_2}Y_{+1}^{\lambda_1-q}}{(q-\lambda_2)!(\lambda_1-q)!}(X_{+1}Y_{+2}-X_{+2}Y_{+1})^{\lambda_2}, \tag{9.35a}$$

其中$\lambda_2\leqslant q\leqslant\lambda_1$. $X_{\pm\mu}=x_{2\mu-1}\pm\mathrm{i}x_{2\mu}$和$Y_{\pm\mu}=y_{2\mu-1}\pm\mathrm{i}y_{2\mu}$. 这里归一化系数是不重要的. 当$D=3$时，$X_{+2}=x_3$和$Y_{+2}=y_3$，而且$\lambda_2$只能等于0或1. 当$D=4$和$\lambda_2\neq0$时，表示$[\lambda_1,\lambda_2]$分解为自对偶和反自对偶表示的直和，最高权态分别为

$$\begin{aligned}
Q_q^{(S)\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \frac{X_{+1}^{q-\lambda_2}Y_{+1}^{\lambda_1-q}}{(q-\lambda_2)!(\lambda_1-q)!}(X_{+1}Y_{+2}-X_{+2}Y_{+1})^{\lambda_2},\\
Q_q^{(A)\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \frac{X_{+1}^{q-\lambda_2}Y_{+1}^{\lambda_1-q}}{(q-\lambda_2)!(\lambda_1-q)!}(X_{+1}Y_{-2}-X_{-2}Y_{+1})^{\lambda_2}.
\end{aligned} \tag{9.35b}$$

$Q_q^{\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$关于$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$分量分别是$q$和$\lambda_1+\lambda_2-q$次齐次多项式，而且还满足拉普拉斯方程：

$$\nabla_x^2Q_q^{\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \nabla_y^2Q_q^{\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \nabla_x\cdot\nabla_yQ_q^{\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0. \tag{9.36}$$

由于转动不变性，其他权态也满足拉普拉斯方程. 我们要证明它们构成角动量本征函数的完备基，任意角动量为$[\lambda_1\ \lambda_2]$的本征函数$\psi_M^{\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$都可按此本征函数基展开

$$\psi_M^{\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{q=\lambda_2}^{\lambda_1} \phi_q^{\lambda_1\lambda_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) Q_q^{\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}). \tag{9.37}$$

证明 关于$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$分量的齐次多项式构成的线性空间在转动变换中保持不变. 讨论l次齐次多项式，它们构成的空间维数为

$$M_D(l) = \begin{pmatrix} l+2D-1 \\ 2D-1 \end{pmatrix} = \frac{(l+2D-1)!}{l!(2D-1)!}.$$

作为独立的角动量本征函数基，需排除形为$\xi_j f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$的多项式，其中$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$是$(l-2)$次齐次多项式，因为$\xi_j$可以合并到广义径向函数中去. 如果从$M_D(l)$中减去$3M_D(l-2)$，则对包含因子$\xi_j\xi_k$的多项式排除了两次，若补回$3M_D(l-4)$，则对包含因子$\xi_1\xi_2\xi_3$的多项式又没有得到排除. 最后，排除了形为$\xi_j f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$的多项式后，线性无关的$l$次齐次多项式的数目应该为

$$\begin{aligned} K_D(l) &= M_D(l) - 3M_D(l-2) + 3M_D(l-4) - M_D(l-6) \\ &= 4(l+D-3)[2l(l+2D-6)+(D-2)(2D-5)]\frac{(l+2D-7)!}{l!(2D-4)!}. \end{aligned}$$

这公式成立的条件是$l+2D-7\geqslant 0$，惟一的例外是$D=3$和$l=0$，此时$K_3(0)=1$. 我们需要证明的是，形如$Q_q^{(l-\lambda)\lambda}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$的$(l-2\lambda+1)$个$l$次齐次多项式，连同用降权算符作用得到的其他权状态，总数刚好等于$K_D(l)$，也就是说，下面式子成立

$$\sum_{\lambda=0}^{[l/2]}(l-2\lambda+1)d_{[(l-\lambda),\lambda]}(\mathrm{SO}(D)) = K_D(l),$$

其中$[l/2]$是不大于$l/2$的最大整数. 这两个公式手算比较繁琐，但很容易用Mathematica来验证其正确性. 证完.

把(9.37)式代入薛定谔方程

$$\nabla^2\psi_M^{\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{2M}{\hbar^2}\{E-E_0-V(\xi_1\xi_2\xi_3)\}\psi_M^{\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),$$

$$\nabla^2 = \nabla_x^2 + \nabla_y^2$$

等式左面的计算分三部分，一是拉普拉斯算符对$\phi_q^{\lambda_1\lambda_2}(\xi_1\xi_2\xi_3)$的作用，这可直接

用变量替换的方法计算，结果是

$$\nabla^2\phi_q^{\lambda_1\lambda_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \{4\xi_1\partial_{\xi_1}^2 + 4\xi_2\partial_{\xi_2}^2 + 2D(\partial_{\xi_1} + \partial_{\xi_2})$$

$$+ (\xi_1 + \xi_2)\partial_{\xi_3}^2 + 4\xi_3(\partial_{\xi_1} + \partial_{\xi_2})\partial_{\xi_3}\}\phi_q^{\lambda_1\lambda_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3), \qquad (9.38)$$

其中∂_ξ表$\partial/\partial\xi$. 二是拉普拉斯算符对 $Q_q^{\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$的作用，已经知道它为零. 三是混合作用：

$$2\{(\partial_{\xi_1}\phi_q^{\lambda_1\lambda_2})2\boldsymbol{x} + (\partial_{\xi_3}\phi_q^{\lambda_1\lambda_2})\boldsymbol{y}\}\cdot\nabla_x Q_q^{\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

$$+ 2\{(\partial_{\xi_2}\phi_q^{\lambda_1\lambda_2})2\boldsymbol{y} - (\partial_{\xi_3}\phi_q^{\lambda_1\lambda_2})\boldsymbol{x}\}\cdot\nabla_y Q_q^{\lambda_1\lambda_2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

由(9.35)式可得

$$\boldsymbol{x}\cdot\nabla_x Q_q^{\lambda_1\lambda_2} = qQ_q^{\lambda_1\lambda_2},$$

$$\boldsymbol{y}\cdot\nabla_y Q_q^{\lambda_1\lambda_2} = (\lambda_1 + \lambda_2 - q)Q_q^{\lambda_1\lambda_2},$$

$$\boldsymbol{y}\cdot\nabla_x Q_q^{\lambda_1\lambda_2} = (\lambda_1 - q + 1)Q_{q-1}^{\mu\nu},$$

$$\boldsymbol{x}\cdot\nabla_y Q_q^{\lambda_1\lambda_2} = (q - \lambda_2 + 1)Q_{q+1}^{\mu\nu}.$$

最后得到广义径向函数 $\phi_q^{\lambda_1\lambda_2}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$所满足的广义径向方程：

$$\nabla^2\phi_q^{\lambda_1\lambda_2} + 4q\,\partial_{\xi_1}\phi_q^{\lambda_1\lambda_2} + 4(\lambda_1 + \lambda_2 - q)\,\partial_{\xi_2}\phi_q^{\lambda_1\lambda_2}$$

$$+ 2(\lambda_1 - q)\,\partial_{\xi_3}\phi_{q-1}^{\lambda_1\lambda_2} + 2(q - \lambda_2)\,\partial_{\xi_3}\phi_{q+1}^{\lambda_1\lambda_2}$$

$$= -\frac{2M}{\hbar^2}(E - E_0 - V)\,\phi_q^{\lambda_1\lambda_2},$$

其中$\nabla^2\phi_q^{\lambda_1\lambda_2}$由(9.38)式给出.

参 考 文 献

[1] 马中骐，物理学中的群论，科学出版社，北京，1998.

[2] B. G. Adams, J. Cizek and J. Paldus, Lie Algebraic Methods and Their Applications to Simple Quantum Systems, *Advances in Quantum Chemistry* Vol. 19, ed. by Per-Olov Löwd.n, (Academic Press, New York, 1987).

[3] R. Berenson and J. L. Birman, Clebsch-Gordan coefficients for crystal space group, *J. Math. Phys.* **16** (1975) 227.

[4] L. C. Biedenharn and J. D. Louck, Angular Momentum in Quantum Physics, Theory and application, *Encyclopedia of Mathematics and its Application*, Vol. **8**, Ed. G. C. Rota, Addison-Wesley, Massachusetts, 1981.

[5] H. Boerner, *Representations of Groups*, North-Holland, Amsterdam, 1963.

[6] C. J. Bradley and A. P. Cracknell, *The Mathematical Theory of Symmetry in Solids*, Oxford: Clarendon Press, 1972.

[7] M. R. Bremner, R. V. Moody and J. Patera, *Tables of Dominant Weight Multiplicities for Representations of Simple Lie Algebras*, Pure and Applied Mathematics, A Series of Monographs and Textbooks 90, Marcel Dehker, New York, 1985.

[8] G. Burns and A. M. Glazer, *Space Groups for Solid State Scientists*, Academic Press, New York, 1978

[9] X. Chapuisat, Phys. Rev. A **45**(1992)4277.

[10] X. Chapuisat and A. Nauts, Phys. Rev. A **44** (1991)1328.

[11] 陈金全，群表示论的新途径，上海科学技术出版社，上海，1984.

[12] Jin-Quan Chen, *Group Representation Theory for Physicists*, World Scientific, Singapore, 1989.

[13] Jin-Quan Chen and Jia-Lun Ping, Algebraic expressions for irreducible bases of icosahedral group. *J. Math. Phys.* **38** (1997) 387.

[14] C. F. Curtiss, J. O. Hirschfelder, and F. T. Adler, J. Chem. Phys. **18** (1950)1638.

[15] 戴安英，计算 SO(N)群不可约旋量表示维数的一种图形规则，兰州大学学报(自然科学版) **19** No. 2 (1983) 33.

[16] J. J. de Swart, The octet model and its Clebsch-Gordan coefficients, *Rev. Mod. Phys.* **35** (1963) 916.

[17] 邓金，半单纯李氏代数的结构，俄文中译本，曾肯成译，科学出版社，北京，1954.

[18] Yuefan Deng and Chen Ning Yang, Eigenvalues and eigenfunctions of the Hückel Hamiltonian for carbon-60, *Phys. Lett.* **A170** (1992) 116.

[19] 丁培柱和王毅，群及其表示，高等教育出版社，北京，1990.

[20] P. A. M. Dirac, The Principle of Quantum Mechnics, Clarendon Press, Oxford, 1958. 中译本，量子力学原理，陈咸亨译，科学出版社，北京，1979.

[21] Shi-Hai Dong, Xi-Wen Hou, and Z. Q. Ma, Irreducible bases and correlations of spin states for double point groups, *Inter. J. Theor. Phys.* **37** (1998) 841.

[22] Shi-Hai Dong, Xi-Wen Hou, Mi Xie, and Z. Q. Ma, Irreducible bases in icosahedral group space, *Inter. J. Theor. Phys.* **37** (1998) 2135.

[23] Shi-Hai Dong, Xi-Wen Hou and Zhong-Qi Ma, Correlations of spin states for icosahedral double group, *In-*

ter J. Theor. Phys. **40** (2001) 569.

[24] Bin Duan, Xiao-Yan Gu and Zhong-Qi Ma, Precise calculation for energy levels of a helium atom in P states, *Phys. Lett.* A **283** (2001) 229

[25] Bin Duan, Xiao-Yan Gu and Zhong-Qi Ma, Numerical calculation of energies of some excited states in a helium atom, *Eur. Phys. J.* D **19** (2002) 9.

[26] C. Eckart, Phys. Rev. **46**(1934)383.

[27] A. R. Edmonds, Augular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton University Press, Princeton, 1957.

[28] C. Fronsdal, Group theory and applications to particle physics, 1962, *Brandies Lectures*, Vol. 1, p.427, ed. by K. W. Ford, Benjamin, New York, 1963.

[29] 高崇寿，群论及其在粒子物理学中的应用，高等教育出版社，北京，1992

[30] I. M. Gel'fand, R. A. Minlos and Z. Ya. Shapiro, Representations of the Rotation and Lorentz Groups and Their Applications, translated from Russian by G. Cummins and T. Boddington, Pergamon Press, New York, 1963.

[31] I. M. Gel'fand and M. L. Zetlin, Matrix elements for the unitary groups, *Dokl. Akad. Nauk.* **71** (1950) 825.

[32] M. Gell-Mann and Y. Ne'eman, *The Eightfold Way*, Benjamin, New York, 1964.

[33] H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics*, Benjamin, New York, 1982.

[34] R. Gilmore, *Lie Groups*, *Lie Algebras and Some of Their Applications*, Wiley, New York, 1974.

[35] Xiao-Yan Gu, Bin Duan and Zhong-Qi Ma, Conservation of angular momentum and separation of global rotation in a quantum N-body system, *Phys. Lett.* A **281** (2001) 168

[36] Xiao-Yan Gu, Bin Duan and Zhong-Qi Ma, Independent eigenstates of angular momentum in a quantum N-body system, *Phys. Rev.* A **64** (2001) 042108.

[37] Xiao-Yan Gu, Bin Duan, and Zhong-Qi Ma, Quantum three-body system in *D* dimensions, *J. Math. Phys.* **43** (2002) June

[38] M. Hamermesh, *Group Theory and its Application to Physical Problems*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1962.

[39] 韩其智和孙洪洲，群论，北京大学出版社，北京，1987.

[40] V. Heine, Group Theory in Quantum Mechanics, Pergamon Press, London, 1960.

[41] J. O. Hirschfelder and E. P. Wigner, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **21** (1935)113.

[42] 侯伯元和侯伯宇，物理学家用微分几何，科学出版社，北京，1990.

[43] Xi-Wen Hou, M. Xie, S. H. Dong, and Z. Q. Ma, Overtone spectra and intensities of tetrahedral molecules in boson-realization models, *Ann. Phys.* (N.Y.) **263** (1998) 340.

[44] C. Itzykson and M. Nauenberg, Unitary groups: Representations and decompositions, *Rev. Mod. Phys.* **38** (1966) 95.

[45] A. W. Joshi, Elements of Group Theory for Physicists, Wiley, 1977，中译本，王锡绂，刘秉正，赵展岳，吴兆颜译，科学出版社，北京，1985

[46] G. F. Koster, Space Groups and Their Representations in Solid State Physics, ed. by F. Seitz and D. Turnbull, Academic Press, New York, 1957, Vol. **5**, p.174.

[47] O. V. Kovalev, Irreducible Representations of Space Groups, translated from Russian by A. M. Gross, Gordon & Breach, 1961.

[48] H. J. Lipkin, *Lie Groups for Pedestrians*, North-Holland, Amsterdam, 1965.

[49] D. E. Littlewood, *The Theory of Group Characters*, Oxford University Press, Oxford, 1958.

[50] Fa Liu, Jia-Lun Ping and Jin-Quan Chen, Application of the eigenfunction method to the icosahedral group, *J. Math. Phys.* **31** (1990) 1065.

[51] 马中骐和戴安英，计算 SO(N)群不可约张量表示维数的一种图形规则，兰州大学学报(自然科学版) **18**, No 2 (1982) 97.

[52] 马中骐和戴安英，群论及其在物理中的应用，北京理工大学出版社，北京，1988.

[53] Zhong-Qi Ma, Dian-Min Tong and Bin Zhou, Finite dimensional representations of braid groups, *Commun. Theor. Phys.* **18** (1992) 369.

[54] 马中骐，杨-巴克斯特方程和量子包络代数，科学出版社，北京，1993

[55] Zhong-Qi Ma, Yang-Baxter equation and quantum enveloping algebras, World Scientific, Singapore, 1993.

[56] Zhong-Qi Ma, Xi-Wen Hou, and Mi Xie, Boson-realization model for the vibrational spectra of tetrahedral molecules, *Phys. Rev* A **53** (1996) 2173.

[57] Z. Q. Ma, Xi-Wen Hou and Mi Xie, Removal of the spurious components from the vibrations of a polyatomic molecule, *Phys. Rev.* A **56** (1997)4341.

[58] 马中骐，董世海，侯喜文，正二十面体对称双群的对称基，兰州大学学报(自然科学版) 第 33 卷，物理学专辑，(1997) 5.

[59] W. Miller, Jr., *Symmetry Groups and Their Applications*, Academic Press. New York, 1972. 中译本，密勒，对称性群及其应用，栾德怀，冯承天和张民生译，科学出版社，北京，1981.

[60] R. T. Pack and J. O. Hirschfelder, J. Chem. Phys. **49** (1968) 4009.

[61] G. Racah, *Group Theory and Spectroscopy*, Lecture Notes in Princeton, 1951，中译本，群论和核谱，梅向明译，高等教育出版社，北京，1959.

[62] P. Roman, Theory of Elementary Particles, North-Holland, Amsterdam, 1964，基本粒子理论，蔡建华，龚昌德和孙景李译，上海科学技术出版社，上海，1966.

[63] M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957，中译本，角动量理论，万乙译，上海科学技术出版社，上海，1963.

[64] A. Salam. The formalism of Lie groups, in *Theoretical Physics*, Director: A. Salam, International Atomic Energy Agency, Vienna, 1963, p. 173，中译本，李群概论，物理译丛，核物理和理论物理，王佩译，1964，12 期，78 页.

[65] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, Third Edition, McGraw-Hill, New York, 1968，中译本，量子力学，李淑娴和陈崇光译，人民教育出版社，北京，1982.

[66] J. P. Serre, *Lie Algebras and Lie Groups*, Benjamin, New York, 1965.

[67] 斯米尔诺夫，高等数学教程，第三卷第一分册，俄文中译本，北京大学数学力学系代数教研室译，高等教育出版社，北京，1954.

[68] 陶瑞宝，物理学中的群论，上海科学技术出版社，1986.

[69] M. Tinkham, *Group Theory and Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1964

[70] Dian-Min Tong, Cheng-Jiu Zhu and Zhong-Qi Ma, Irreducible representations of braid groups, *J. Math. Phys.* **33** (1992) 2660.

[71] Wu-Ki Tung, *Group Theory in Physics*, World Scientific. Singapore, 1985.

[72] 万哲先，李代数，科学出版社，北京，1964.

[73] 王仁卉和郭可信，晶体学中的对称群，科学出版社，北京，1990.

[74] H. Weyl, The Theory of Groups and Quantum mechanics, translated from German by H. P. Robertson, Dover Publications, 1931.

[75] H. Weyl, The Cassical Groups, Princeton University Press, Princeton, 1946.

[76] E. P. Wigner, *Group Theory and its Applications to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*. Academic Press, New York, 1959.

[77] B. G. Wybourne, *Classical Groups for Physicists*, Wiley, New York, 1974, 中译本，典型群及其在物理学上的应用，冯承天，金元望，张民生和栾德怀译，科学出版社，北京，1982

[78] T. Yamanouchi, On the construction of unitary irreducible representation of the symmetric group, *Proc Phys. Math. Soc. Japan*, **19** (1937) 436.

[79] 严志达和许以超，Lie 群及其 Lie 代数，高等教育出版社，北京，1985.

[80] 余文海，晶体结构的对称群，中国科学技术大学出版社，合肥，1991.

[81] Cheng-Jiu Zhu and Jin-Quan Chen. A new approach to permutation group representations II, *J. Math. Phys*. **24** (1983) 2266.

[82] 邹鹏程，量子力学，高等教育出版社，2002